УДК 519.6+533.6

ИСКУССТВЕННАЯ ВЯЗКОСТЬ ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ ЧИСЛЕННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТИПА "КАРБУНКУЛ" В РАСЧЕТАХ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ

А. В. Родионов
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Приводится обобщение метода искусственной вязкости для подавления "карбункул"-неустойчивости на случай моделирования трехмерных задач. Рассматриваются схемы первого порядка точности (Годунова, Роу, схемы HLLC, AUSM$^+$ и схема Сафронова) применительно к расчетам трехмерных задач на гладких структурированных сетках. Эффективность метода демонстрируется примерами решения известных тестовых задач.

Ключевые слова: гиперзвуковые течения, уравнения Эйлера и Навье—Стокса, численная неустойчивость, искусственная вязкость, расчеты трехмерных задач.

Введение

Феномен "карбункула" (также известный как ударно-волновая неустойчивость) остается одной из наиболее серьезных вычислительных проблем с тех пор, как он был впервые замечен и идентифицирован [1, 2]. В работах [3, 4] был опробован новый подход к решению проблемы. Он заключается в том, что в базовый метод решения уравнений Эйлера добавляется некоторое количество диссипации в форме правых частей уравнений Навье—Стокса; при этом коэффициент молекулярной вязкости заменяется коэффициентом искусственной вязкости. В последующих работах [5, 6] эта методика подавления ударно-волновой неустойчивости получила свое развитие: модель искусственной вязкости была скорректирована и настроена на случай применения схем первого порядка аппроксимации к моделированию двумерных течений. Эффективность данного подхода была продемонстрирована многочисленными примерами решения известных тестовых задач. В данной статье предложенная в [5, 6] модель искусственной вязкости распространяется на случай решения трехмерных задач.

Модель искусственной вязкости

Выбранная в [5, 6] формула для коэффициента искусственной вязкости записывается следующим образом:

$$\mu_{AV} = \begin{cases} C_{AV}\rho h^2\sqrt{(\nabla\cdot\vec{u})^2 - (C_{th}a/h)^2}, & \text{если } \nabla\cdot\vec{u} < -C_{th}a/h; \\ 0 & \text{в противном случае}, \end{cases} \qquad (1)$$

где $\vec{u}$ — вектор скорости; ρ — плотность; a — скорость звука; h — характерный размер ячейки; C_{AV} — безразмерный параметр; C_{th} – коэффициент пороговой интенсивности сжатия, ограничивающей действие искусственной вязкости только фронтом ударной волны (было выбрано $C_{th} = 0{,}05$).

В дополнение к искусственной вязкости предлагаемый подход подразумевает учет искусственной теплопроводности, которая рассчитывается через коэффициент

$$\lambda_{AV} = \frac{\mu_{AV} C_P}{\mathrm{Pr}}, \qquad (2)$$

где C_P — удельная теплоемкость при постоянном давлени; Pr — число Прандтля, полагаемое равным 3/4.

Коэффициенты искусственной вязкости и теплопроводности первоначально вычисляются в центрах ячеек, причем дивергенция вектора скорости вычисляется по теореме Гаусса—Остроградского. В случае использования достаточно гладкой структурированной сетки значения коэффициентов на боковых гранях ячеек находятся при помощи простой линейной интерполяции вида $f_{i+1/2,j} = 0{,}5(f_{i,j} + f_{i+1,j})$.

Как было установлено в [5, 6], при использовании схем первого порядка аппроксимации, таких как схема Годунова [7], схема Роу [8] и схема HLLC [9], значение $C_{AV} = 0{,}6$ обеспечивает подавление ударно-волновой неустойчивости во всех рассмотренных тестовых задачах. При этом характерный размер ячейки следует вычислять как

$$h = \frac{\max(d_1, d_2)}{\sqrt{2}}, \tag{3}$$

где d_1 и d_2 — длины диагоналей ячейки. Для прямоугольных ячеек в декартовых координатах это выражение сводится к $h = \sqrt{\left(h_x^2 + h_y^2\right)/2}$.

Обобщение на случай трехмерных расчетов

Рассмотрим задачу типа задачи Кёрка, которая была использована в [5, 6] для тестирования и настройки метода искусственной вязкости применительно к расчетам двумерных задач. Она обобщается на трехмерный случай простым способом: добавляется координатное направление z с сеточным разбиением и граничными условиями, аналогичными тем, что использовались для координатного направления y. В результате получается трехмерная тестовая задача в следующей постановке.

Рассчитывается плоская ударная волна, распространяющаяся вдоль прямоугольного канала (вдоль оси x). Расчетная область $[0, 1600]\times[0, 25]\times[0, 25]$ в пространстве xyz покрывается регулярной сеткой, состоящей из кубических ячеек единичного размера ($h_x = h_y = h_z = 1$); начальное состояние газа (компоненты скорости, плотность и давление) в ячейках следующее: $(u_x, u_y, u_z, \rho, P) = (0, 0, 0, 1, 1)$. На боковых границах расчетной области (вдоль осей y и z) ставится условие периодичности течения. На правой границе расчетной области задается непроницаемая стенка, а слева — втекающий поток с набором параметров $(u_1, 0, 0, \rho_1, P_1)$, которые определяются ударно-волновым числом Маха M_S и показателем адиабаты γ:

$$u_1 = u_S \frac{2\left(\mathrm{M}_S^2 - 1\right)}{(\gamma+1)\,\mathrm{M}_S^2}; \quad \rho_1 = \frac{(\gamma+1)\,\mathrm{M}_S^2}{(\gamma-1)\,\mathrm{M}_S^2 + 2}; \quad P_1 = \frac{2\gamma\mathrm{M}_S^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1},$$

где $u_S = \sqrt{\gamma}\mathrm{M}_S$ — скорость распространения ударной волны по неподвижному газу.

В трехмерной тестовой задаче неустойчивость плоской ударной волны инициируется ничтожно малым возмущением продольной координаты x в узлах сетки, расположенных в одном поперечном сечении: $i = 10$. Это возмущение имеет вид $\hat{x}_{10,j,k} = x_{10,j,k} + \delta\left(2RND_{j,k} - 1\right)$, где $\delta = 10^{-4}$, $RND_{j,k}$ — случайные числа, генерируемые в интервале [0, 1]. Таким образом, ударная волна получает однократное (в момент прохождения сеточной линии $i = 10$) возмущение по всему фронту. Для измерения степени отклонения решения от одномерного потока используется величина

$$\varepsilon_0 = \max_{i,j,k}\left(|\rho_{i,j,k} - \bar{\rho}_i|\right), \quad \bar{\rho}_i = \frac{1}{JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\rho_{i,j,k}.$$

На рис. 1 (см. также цветную вкладку) приведены данные расчета по схеме Годунова трехмерной тестовой задачи при ударно-волновом числе Маха $\mathrm{M}_S = 6$. Показано развитие ударно-волновой неустойчивости в динамике.

На рис. 2, *а* приведены зависимости ε_0 от расстояния, пройденного ударной волной ($x_S = u_S t$), для различных ударно-волновых чисел Маха, а на рис. 2, *б* показана динамика роста возмущений

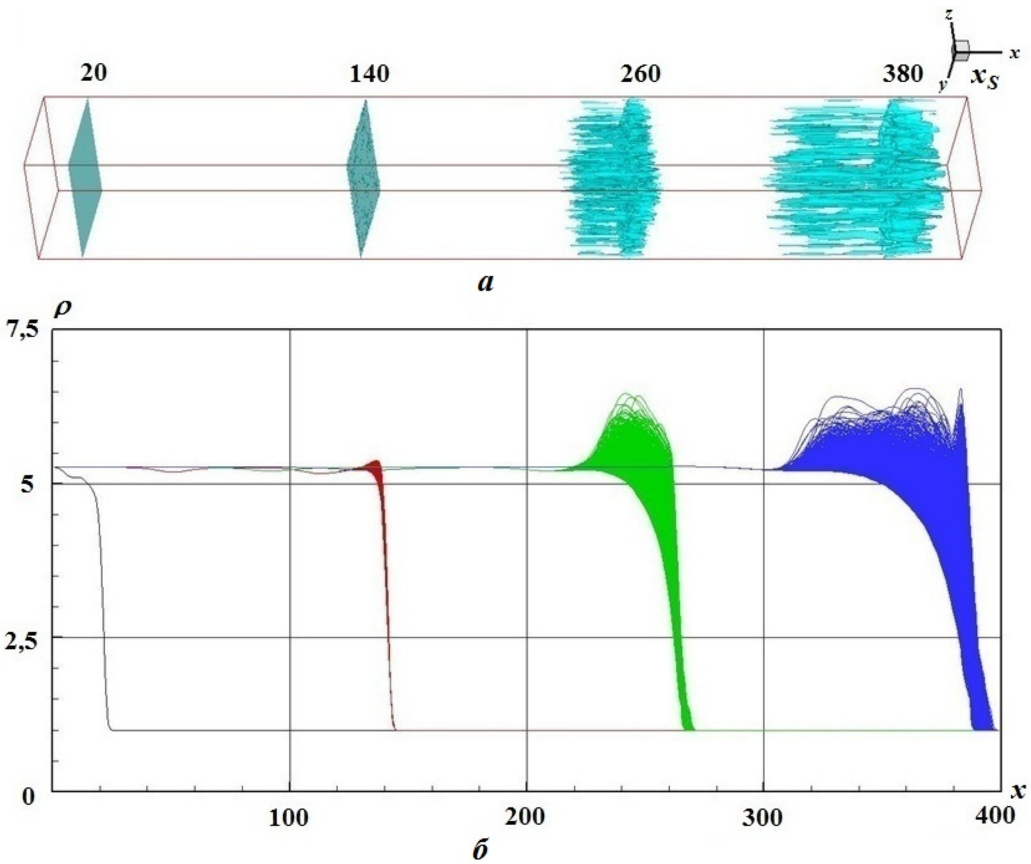

Рис. 1. Данные расчета по схеме Годунова трехмерной тестовой задачи с $\mathrm{M}_S = 6$ для четырех моментов времени, соответствующих положению ударной волны $x_S = 20; 140; 260; 380$: *а* — изоповерхности для трех уровней плотности $\rho = 4{,}5; 5{,}5; 6{,}5$; *б* — осевые профили плотности для всех продольных линий сетки

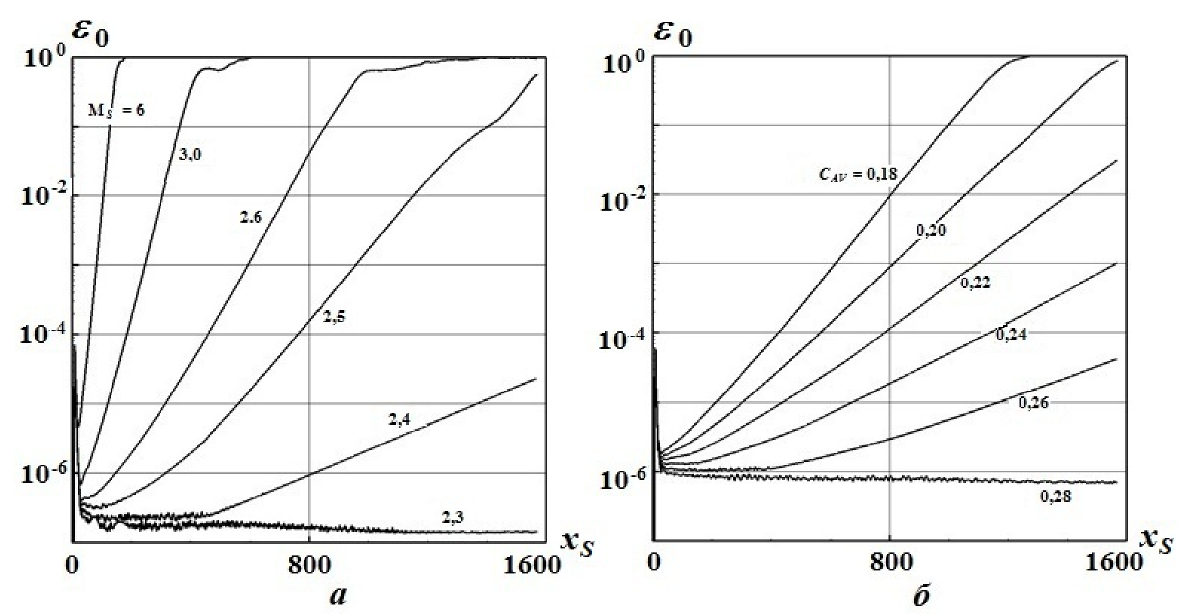

Рис. 2. Развитие неустойчивости в трехмерной тестовой задаче. Расчеты по схеме Годунова: *а* — без искусственной вязкости (варьируется M_S); *б* — с искусственной вязкостью ($\mathrm{M}_S = 6$, варьируется C_{AV})

для ударной волны с $\mathrm{M}_S = 6$ при различных значениях коэффициента C_{AV}. Если сравнить эти результаты с аналогичными данными для двумерного варианта тестовой задачи (см. рис. 3 в [5, 6]), то обнаружится их большое сходство. Действительно, в трехмерном случае пороговое значение ударно-волнового числа Маха составляет $\mathrm{M}_S^C \approx 2{,}3$ против $\mathrm{M}_S^C \approx 2{,}2$ в двумерном случае; минимальное значение C_{AV}, необходимое для подавления неустойчивости ударной волны с $\mathrm{M}_S = 6$, составляет $C_{AV}^{\min} \approx 0{,}28$ в обоих случаях. Отсюда можно заключить, что модель искусственной вязкости, выбранную в [5, 6] для подавления ударно-волновой неустойчивости в двумерных задачах, можно перенести на трехмерный случай с небольшой оговоркой: выражение для характерного размера ячейки должно быть распространено на трехмерный случай, а рекомендованное для использования в расчетах двумерных задач значение $C_{AV} = 0{,}6$, возможно, следует немного скорректировать.

Чтобы это осуществить, было проведено исследование на различных вариантах тестовой задачи; его результаты представлены в таблице. Во всех случаях поступательная ударная волна при $\mathrm{M}_S = 20$ рассчитывалась по схеме Годунова. Рассматривались случаи, когда ячейки сетки являются прямоугольными параллелепипедами (в таблице это сетка типа A), со сдвиговой деформацией ячеек только в направлении y (сетка типа B) или одновременно в направлениях y и z (сетка типа C). Подробное описание способа построения сетки со сдвиговой деформацией ячеек приводится в [5, 6].

Представленные в таблице значения $C_{AV}^{\min}$ (минимальные значения C_{AV}, необходимые для подавления неустойчивости в конкретных вариантах тестовой задачи) даны для двух способов расчета характерного размера ячейки:

$$1)\ h = d_{\max}^{(S)} \equiv \frac{\max\limits_i \left(d_i^{(S)}\right)}{\sqrt{2}}; \qquad 2)\ h = d_{\max}^{(V)} \equiv \frac{\max\limits_i \left(d_i^{(V)}\right)}{\sqrt{3}}, \tag{4}$$

где $d_i^{(S)}$ — длины диагоналей боковых граней ячейки; $d_i^{(V)}$ — длины объемных диагоналей ячейки. Оба варианта согласуются с выражением (3), используемым в расчетах двумерных задач. Заметим, что в случае, когда ячейка является параллелепипедом с реберными векторами $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ и $\vec{l}_3$, выражения (4) можно переписать в виде

$$1)\ h = d_{\max}^{(S)} = \sqrt{\frac{\max(d_{12}^2, d_{23}^2, d_{13}^2)}{2}}, \quad d_{jk}^2 = l_j^2 + l_k^2 + 2\left|\left(\vec{l}_j \cdot \vec{l}_k\right)\right|;$$

$$2)\ h = d_{\max}^{(V)} = \sqrt{\frac{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2\left|\left(\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2\right)\right| + 2\left|\left(\vec{l}_2 \cdot \vec{l}_3\right)\right| + 2\left|\left(\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_3\right)\right|}{3}}.$$

Как можно видеть из таблицы, использование выражения $h = d_{\max}^{(S)}$ обеспечивает устойчивый счет любого из рассмотренных вариантов при $C_{AV} = 0{,}64$, тогда как для выражения $h = d_{\max}^{(V)}$

Значения $C_{AV}^{\min}$ в тестовой задаче с поступательной ударной волной (схема Годунова, $\mathrm{M}_S = 20$)

Тип сетки	h_y/h_x	h_z/h_x	$C_{AV}^{\min}$: $h = d_{\max}^{(S)}$	$C_{AV}^{\min}$: $h = d_{\max}^{(V)}$
A	1	1	0,44	0,44
A	1/4	1	0,62	0,90
A	1/4	1/4	0,56	0,80
A	4	1	0,31	0,43
A	4	4	0,14	0,20
B	1/2	1/4	0,60	0,88
B	1/4	1/2	0,43	0,56
C	1/2	1/2	0,64	0,53
C	1/2	1/4	0,64	0,71

требуется значение $C_{AV} = 0{,}90$, что заметно больше. Исходя из полученных результатов, можно рекомендовать в расчетах трехмерных задач использовать выражение $h = d_{\max}^{(S)}$ и коэффициент $C_{AV} = 0{,}75$ (это значение взято с запасом).

Численные примеры

Рассмотрим задачу об обтекании цилиндра сверхзвуковым потоком, где феномен "карбункула" проявляется наиболее наглядно. Двумерный вариант постановки задачи и расчетная сетка описаны в [5, 6]. Отличие настоящих расчетов заключается в добавлении координаты z с равномерным разбиением интервала $0 \le z \le 1$ на 45 ячеек; на границах $z = 0$ и $z = 1$ задается условие периодичности течения.

Результаты расчетов задачи при $\gamma = 1{,}4$ и двух значениях числа Маха набегающего потока $\mathrm{M}_\infty = 20$ и $\mathrm{M}_\infty = 3$, представлены на рис. 3 и 4 соответственно. Расчеты задачи проводились с использованием схем Годунова [7], Роу [8], HLLC [9], AUSM$^+$ [10] и схемы Сафронова [11]. Заметим, что данные расчетов по схеме AUSM$^+$ на этих рисунках не приводятся, так как они оказались аналогичными тем, что были получены в двумерном приближении (зависимость от координаты z в этих расчетах отсутствует). Напомним, что в расчетах двумерной задачи по схеме AUSM$^+$ наблюдаются небольшие осцилляции параметров за ударной волной, которые в случае добавления искусственной вязкости исчезают.

В двух верхних рядах на рис. 3 и 4 приведены изолинии числа Маха на границах расчетной области и в расчетных сечениях $z = \mathrm{const}$, полученные с применением оригинальных схем. Видно, что феномен "карбункула" наиболее сильно проявляется при использовании схемы Роу. В этом случае решение имеет ярко выраженный пространственный и нестационарный характер с образованием рециркуляционной области в виде опухолеподобного нароста перед телом. При использовании схемы Годунова и схемы HLLC рециркуляционная область отсутствует. Тем не менее и в этих вариантах решение остается пространственным и нестационарным, причем наиболее сильно неустойчивость течения проявляется в направлении z. В случае использования схемы Сафронова неустойчивость течения оказывается выше, чем в случае использования схем Годунова и HLLC.

Нижние ряды на рис. 3 и 4 демонстрируют данные, полученные по тем же схемам, но с добавлением искусственной вязкости. Видно, что в этом случае патологическое проявление неустойчивости полностью устраняется и решения становятся двумерными; при этом все схемы демонстрируют близкие результаты.

Заключение

Новый способ подавления численной неустойчивости типа "карбункул" через добавление искусственной вязкости обобщен на случай моделирования трехмерных задач.

Как оказалось, особенности проявления "карбункул"-неустойчивости в трехмерном случае аналогичны тем, что наблюдались в двумерном приближении. Поэтому разработанная ранее модель искусственной вязкости была перенесена на трехмерный случай. При этом было выбрано выражение для характерного размера трехмерной ячейки и рекомендовано значение коэффициента C_{AV} для использования в расчетах трехмерных задач.

Обобщенная модель искусственной вязкости опробована на схемах первого порядка аппроксимации: Годунова, Роу, схемах HLLC, AUSM$^+$ и схеме Сафронова применительно к расчетам на гладких структурированных сетках. Эффективность модели продемонстрирована примерами решения известных тестовых задач.

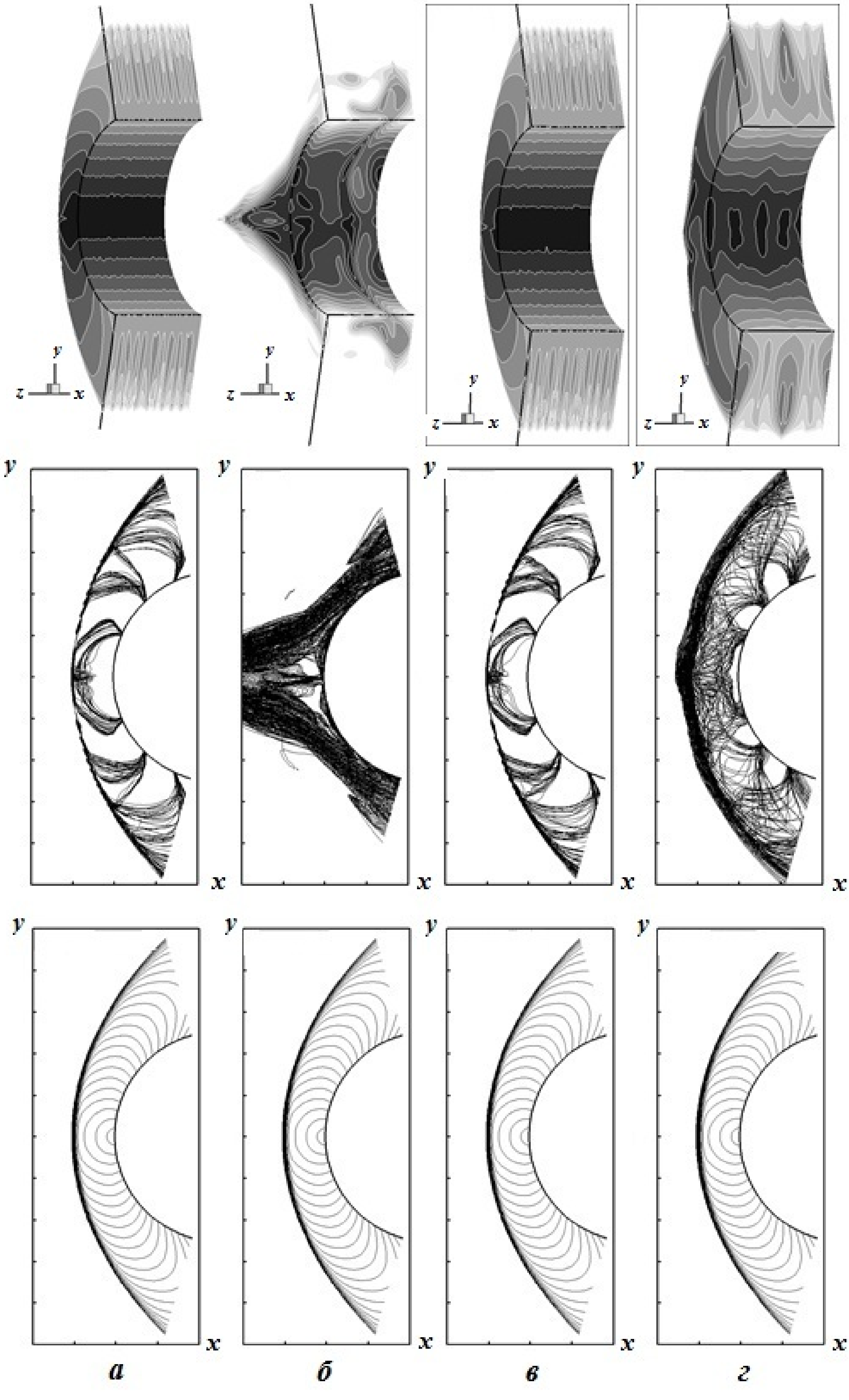

Рис. 3. Сверхзвуковое обтекание цилиндра при $M_\infty = 20$, рассчитанное по схемам Годунова (*а*), Роу (*б*), HLLC (*в*) и Сафронова (*г*). Изолинии числа Маха: вверху — через 0,25 на границах расчетной области; в середине — через 0,5 во всех расчетных сечениях $z = \text{const}$; внизу — через 0,1 во всех расчетных сечениях $z = \text{const}$ (расчеты с добавлением искусственной вязкости)

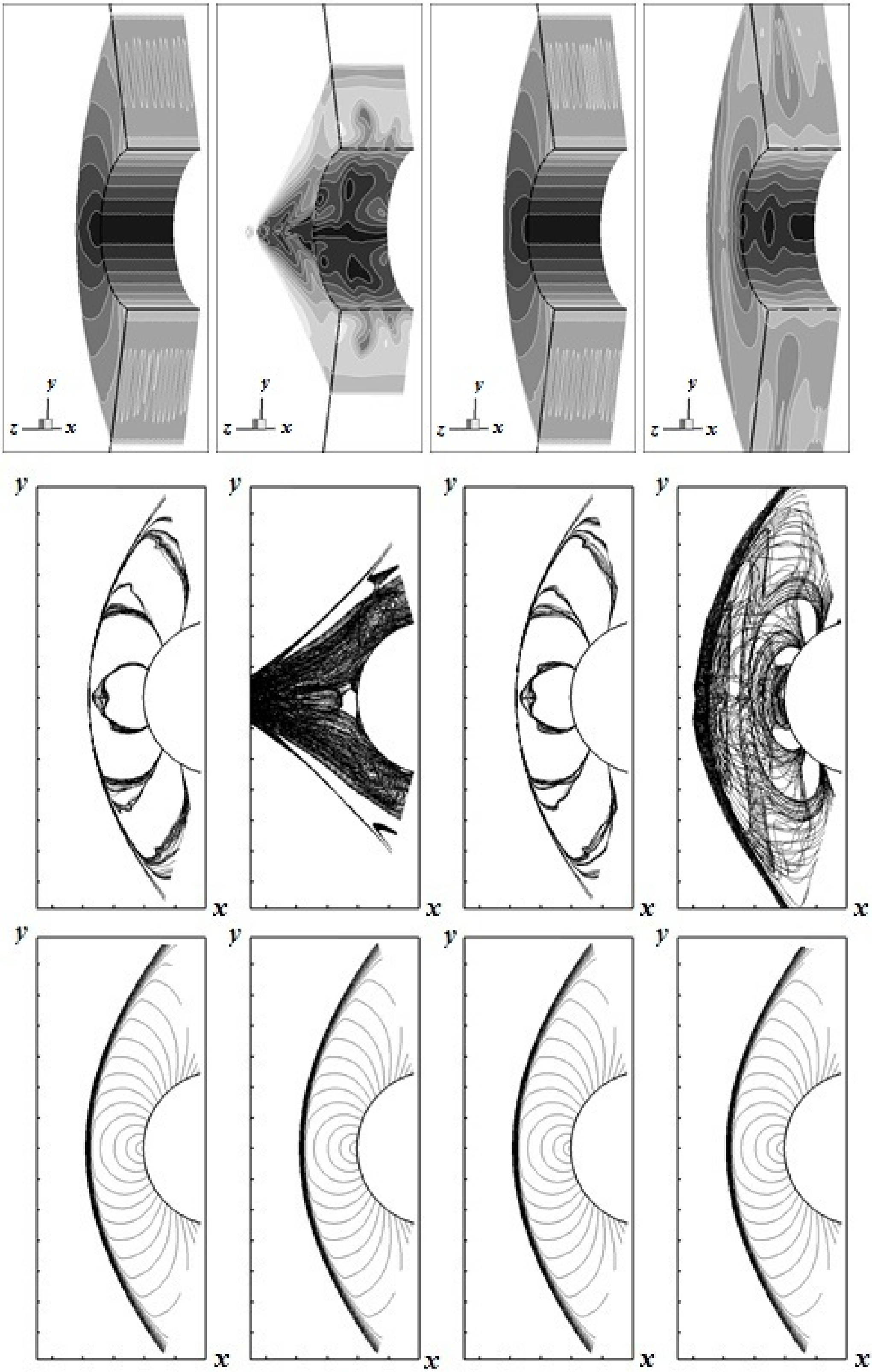

Рис. 4. Сверхзвуковое обтекание цилиндра при $M_\infty = 3$, рассчитанное по схемам Годунова (*а*), Роу (*б*), HLLC (*в*) и Сафронова (*г*). Изолинии числа Маха: вверху — через 0,2 на границах расчетной области, в середине — через 0,4 во всех расчетных сечениях $z = \mathrm{const}$; внизу — через 0,1 во всех расчетных сечениях $z = \mathrm{const}$ (расчеты с добавлением искусственной вязкости)

Список литературы

1. *Peery K. M., Imlay S. T.* Blunt body flow simulations // AIAA Paper. 1988. No 88—2924.
2. *Quirk J. J.* A contribution to the great Riemann solver debate // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 1994. Vol. 18. P. 555—574.
3. *Родионов А. В., Тагирова И. Ю.* Искусственная вязкость в схемах типа Годунова как метод подавления "карбункул"-неустойчивости // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2015. Вып. 2. С. 3—11.
4. *Тагирова И. Ю., Родионов А. В.* Применение искусственной вязкости для борьбы с "карбункул"-неустойчивостью в схемах типа Годунова // Математическое моделирование. 2015. Т. 27, № 10. С. 47—64.
5. *Родионов А. В.* Применение искусственной вязкости для борьбы с численной неустойчивостью типа "карбункул": Препринт №115—2017. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2017.
6. *Rodionov A. V.* Artificial viscosity in Godunov-type schemes to cure the carbuncle phenomenon // J. Comp. Phys. 2017. Vol. 345. P. 308—329.
7. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47, № 3. С. 271—306.
8. *Roe P. L.* Approximate Riemann Solvers // J. Comp. Phys. 1981. Vol. 43. P. 357—372.
9. *Toro E. F., Spruce M., Speares W.* Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver // Shock Waves. 1994. Vol. 4. P. 25—34.
10. *Liou M.-S.* A sequel to AUSM: AUSM$^+$ // J. Comp. Phys. 1996. Vol. 129. P. 364—382.
11. *Сафронов А. В.* Разностный метод для уравнений газодинамики из соотношений на разрывах // Математическое моделирование. 2008. Т. 20, № 2. С. 76—84.

Статья поступила в редакцию 17.11.17.

THE ARTIFICIAL VISCOSITY FOR SUPPRESSING THE "CARBUNCLE" TYPE NUMERICAL INSTABILITY IN 3D PROBLEM SIMULATIONS / A. V. Rodionov (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region).

Generalization of the artificial viscosity method to suppress the "carbuncle"-type instability in the simulation of 3D problems is described. The first-order schemes (Godunov, Rowe, and HLLC schemes, AUSM$^+$ and Safronov scheme) are considered as applied to the simulation of 3D problems using smooth structured grids. The efficiency of this method is demonstrated by the example of well-known test problems.

Keywords: hypersonic flows, Eulerian and Navier-Stokes equations, numerical instability, artificial viscosity, 3D problem simulations.