

УДК 517.958:536.2

СЕТОЧНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПЕРЕНОСА ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. А. Шестаков

(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина",
г. Снежинск Челябинской области)

Одной из наиболее трудных задач теории переноса является решение уравнения переноса теплового излучения. Его сложность определяется главным образом существенной нелинейностью всех исследуемых величин и большой размерностью рассматриваемого пространства. При численном моделировании уравнений переноса теплового излучения возникают эффекты, не связанные с физикой описываемых процессов и мешающие правильному пониманию этих явлений. Приводятся описание сеточных эффектов и примеры модельных задач, в которых наиболее наглядно проявляются эти эффекты.

Ключевые слова: перенос излучения, численное моделирование.

Введение

При численном моделировании уравнений математической физики возникают эффекты, не связанные с физикой описываемых процессов и мешающие правильному пониманию этих явлений. Самыми распространенными среди них являются *сеточные эффекты*, связанные с дискретизацией рассматриваемого пространства разностной сеткой. Хотя большинство сеточных эффектов при использовании устойчивых и сходящихся разностных схем исчезают при уменьшении размеров ячеек дискретной сетки, в каждой задаче необходима оценка влияния этой погрешности на расчет. Понятно, что применение разностных схем с неисчезающими сеточными эффектами крайне нежелательно, хотя в ряде случаев такие схемы до сих пор применяются.

Особенно сложно разбираться с сеточными эффектами в численных методах переноса теплового излучения, так как при численном моделировании этого процесса наблюдается наибольшее количество их проявлений. Это связано с тем, что дискретизация уравнения переноса проводится по семи переменным — три координаты в геометрическом пространстве, две координаты в пространстве полета частиц, энергия фотонов или частота и время. При этом данные задачи отличаются существенной нелинейностью всех переменных величин: интенсивности и плотности излучения, энергии и температуры вещества, коэффициентов поглощения и теплопроводности.

Прежде чем приступить к рассмотрению вопроса возникновения сеточных эффектов в задачах переноса излучения, напомним, что существует три основных способа передачи энергии:

- 1) излучением посредством электромагнитного поля;
- 2) теплопроводностью посредством движения и колебания микроскопических элементов вещества (молекул, ионов и электронов);
- 3) конвекцией посредством движения газов или жидкостей.

В общем случае все три способа существуют одновременно, но здесь будет рассматриваться только первый способ передачи энергии, который является наиболее сложным физическим явлением среди перечисленных. Процесс теплопроводности хорошо описывается законом Фурье и приводит к параболическому уравнению, для которого создано множество устойчивых разностных схем второго порядка точности. Передача энергии конвекцией посредством движения газов или жидкостей

описывается совместно с уравнениями газовой динамики (гидродинамики) и определяется с точностью аппроксимации этих уравнений, для которых существует достаточное количество устойчивых разностных схем.

Передачу энергии излучением можно описывать уравнениями Максвелла или уравнением Больцмана. Уравнения Максвелла хороши при изучении волновой природы электромагнитного поля. Уравнение Больцмана удобно использовать при изучении суммарного воздействия излучения на вещество в макроскопической трактовке. В данной трактовке взаимодействие излучения с веществом можно описать через испускание, поглощение и рассеяние, которые могут быть определены экспериментально. Передача энергии излучением особенно важна в задачах астрофизики, управляемого термоядерного синтеза, в ядерных взрывах.

В связи со сложностью и большим количеством сеточных эффектов при моделировании уравнения переноса излучения (УПИ) необходимо их подробное описание. При численном моделировании УПИ в различных приближениях, на взгляд автора, к сеточным можно отнести следующие эффекты:

- 1) *лучевой* — возникает в кинетическом приближении при аппроксимации УПИ DS_n -методом в многомерных геометриях из-за ротационной неинвариантности этого метода;
- 2) *волновой* — возникает в методе сферических гармоник из-за волновой природы решения гиперболических уравнений;
- 3) *колебательный* — возникает в кинетическом приближении для плотности излучения при численном интегрировании интенсивности по направлениям;
- 4) *эффект неравномерной сетки* — приводит к немонотонности по пространству;
- 5) *эффект сферической неинвариантности* — возникает из-за неинвариантной аппроксимации разностных операторов дивергенции и градиента в многомерных геометриях;
- 6) *шахматный* — возникает на квадратных и кубических сетках в градиентных схемах;
- 7) *осевой* — возникает из-за ухудшения аппроксимации в осесимметричных задачах около оси;
- 8) *эффект немонотонности потока в центрах* — проявляется в отличиях потоков в узлах и центрах разностных ячеек при монотонном поведении остальных функций;
- 9) *шаговый* — возникает при использовании явной аппроксимации коэффициента поглощения и теплопроводности в неявных схемах из-за ограничения на шаг по времени;
- 10) *аспектный* — возникает при больших аспектных числах.

При математическом моделировании к погрешностям решений могут приводить другие численные эффекты, не связанные с разностной сеткой. При численном моделировании сеточные и несеточные эффекты могут возникать одновременно или в разных сочетаниях друг с другом, что затрудняет их анализ. В приведенных далее примерах автор попытался подобрать задачи, в которых каждый отдельно взятый сеточный эффект проявляется наиболее сильно. Рассмотрение каждого эффекта в отдельности помогает нахождению способов их устранения.

1. Лучевой эффект

Лучевой эффект возникает в кинетическом приближении при аппроксимации УПИ DS_n -методом в многомерных геометриях из-за ротационной неинвариантности этого метода. DS_n -метод предложен Карлсоном в 1963 г. [1] и до сих пор является наиболее распространенным в задачах переноса теплового излучения. Лучевой эффект впервые описан Латропом в 1968 г. [2], проявляется наиболее сильно в оптически прозрачных средах и уменьшается при увеличении числа направлений в пространстве полета частиц.

Для уравнения переноса частиц на дифференциальном уровне выполняется свойство ротационной инвариантности, которое заключается в инвариантности уравнений переноса относительно вращения координат в фазовом пространстве $\{R, \vec{\Omega}\}$. К сожалению, для разностных уравнений свойство ротационной инвариантности нарушается. В результате появляется лучевой эффект, а также происходит нарушение сферической симметрии при решении одномерных сферических задач по двумерной или трехмерной программе. Лучевой эффект проявляет себя в форме пространственных

осцилляций потока и плотности излучения в решении, полученном DS_n -методом. Он особенно заметен в задачах с точечным источником, где вместо симметричного относительно центра решения, как того требует физика задачи, получается осциллирующее решение с частотой, пропорциональной числу дискретных направлений. При увеличении количества направлений лучевой эффект уменьшается, но для достижения приемлемого результата может понадобиться слишком большое количество направлений. В 1962 г. С. Л. Соболевым [3] была поставлена задача о нахождении инвариантных относительно некоторой группы вращения квадратур для сферы. Задача построения таких квадратур очень сложна. Исследования по этой проблеме частично изложены в работе [4].

Для примера на рис. 1 приведены сетки по $\bar{\Omega}(\xi, \mu)$ на плоскости угловых переменных (ξ, μ) для разных квадратур ES_2 – ES_{64} , предложенных Карлсоном [5]. В скобках указано число дискретных направлений в пространстве полета частиц с учетом граничных направлений. Квадратуры ES_2 и ES_4 обычно используются для отладки алгоритмов и методических программ, квадратуры от ES_8 до ES_{32} используются для большинства решаемых задач, квадратуры выше ES_{32} — в расчетах на сходимость по разностной сетке.

Лучевой эффект не позволяет сохранять симметрию в сферически-симметричных системах, а это важно, например, в задачах лазерного термоядерного синтеза (ЛТС), так как может влиять на форму ДТ-газа, что приводит к нефизическому распределению всех величин при больших значениях объемного сжатия, типичных для мишеней ЛТС. Поэтому более чем актуальной является проблема сохранения одномерных симметрий в задачах ЛТС.

В качестве примера приведем задачу моделирования сжатия сферической мишени. Если задача сферически-симметричная и нет физических возмущений, то результат расчета должен быть сферически-симметричным. В действительности же сферическая симметрия нарушается при решении УПИ DS_n -методом, что приводит к нефизическому возмущению в газовой динамике, а затем через нее получается возмущение и в геометрической форме. Возникшее искажение формы будет усиливаться, поскольку граница веществ может быть неустойчива. В конечном счете вместо одномерной сферической задачи получим двумерную задачу, что и наблюдается в численных расчетах. На рис. 2 (см. также цветную вкладку) приведен пример возмущения разностной сетки и геометрической формы сферически-симметричной мишени из-за лучевого эффекта.

При увеличении количества направлений полета частиц Ω амплитуда возмущений уменьшается, но для достижения приемлемого результата, чтобы возмущения от применения алгоритма решения УПИ были существенно меньше моделируемых возмущений, может понадобиться слишком большое количество направлений, что делает расчет дорогостоящим.

Рассмотрим расчет двухоболочечной газонаполненной мишени. Двухоболочечные мишени представляют собой две концентрические оболочки, разделенные малоплотным веществом. Внутренняя оболочка выполнена из материала с высокой плотностью и заполнена ДТ-газом, который сжимается под действием внешнего излучения.

На рис. 3 приведены пространственные распределения ДТ-газа в центральных областях на момент максимального сжатия газа. Наибольшее влияние лучевого эффекта на форму ДТ-газа, которая должна оставаться сферической на протяжении всего счета, наблюдается в центральной области. Из рисунков видно улучшение симметрии формы ДТ-газа с ростом квадратуры. Хорошая симметрия формы ДТ-газа получилась для квадратуры ES_{32} . Однако полной сферической симметрии достичь не удастся, и при дальнейшем счете симметрия продолжает нарушаться.

При исследовании проблемы лучевого эффекта возникает естественный вопрос: можно ли от него избавиться, и если нет, то какие численные алгоритмы решения УПИ позволяют эффективно решать проблему лучевого эффекта?

Одним из таких подходов является переход от решения УПИ DS_n -методом к решению уравнения переноса в самосопряженной форме. Для стационарной задачи самосопряженная форма приводит к эллиптическому уравнению относительно четной функции. Для такого уравнения можно построить разностную схему второго порядка точности, удовлетворяющую принципу максимума. В нестационарном случае имеем систему гиперболических уравнений относительно четной и нечетной функций и эта система похожа на P_1 -уравнения. Для такой системы уже не удастся построить монотонную

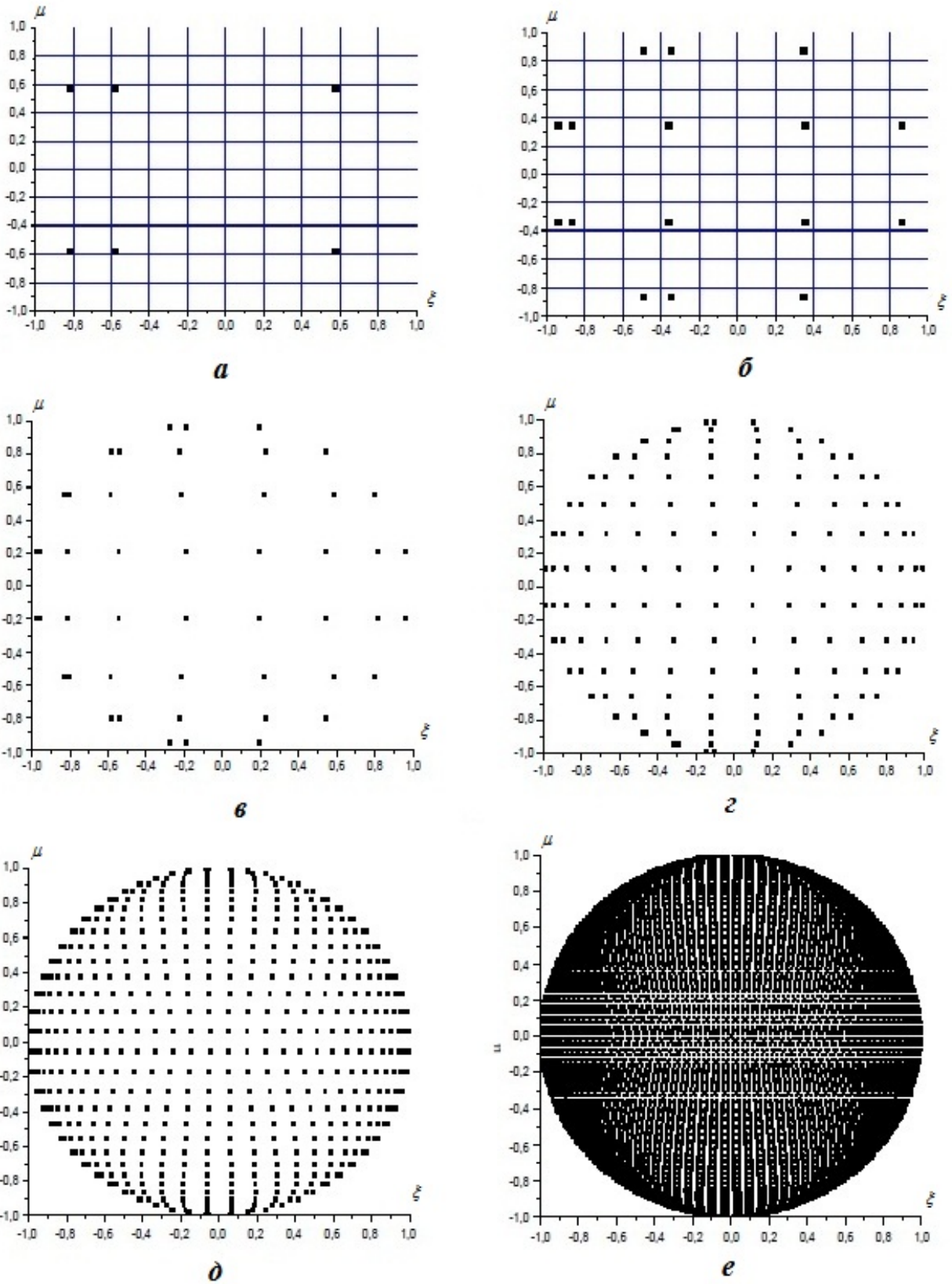


Рис. 1. Сетки по угловым переменным ξ, μ для разных квадратур: *a* — ES_2 (6 направлений); *б* — ES_4 (16 направлений); *в* — ES_8 (48 направлений); *г* — ES_{16} (160 направлений); *д* — ES_{32} (576 направлений); *е* — ES_{64} (2176 направлений)

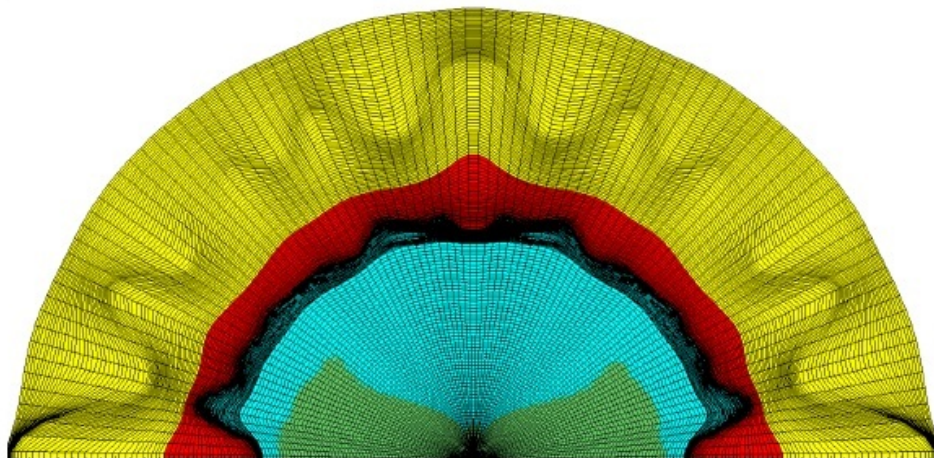


Рис. 2. Влияние лучевого эффекта на разностную сетку при квадратуре ES_8 в сферически-симметричной задаче

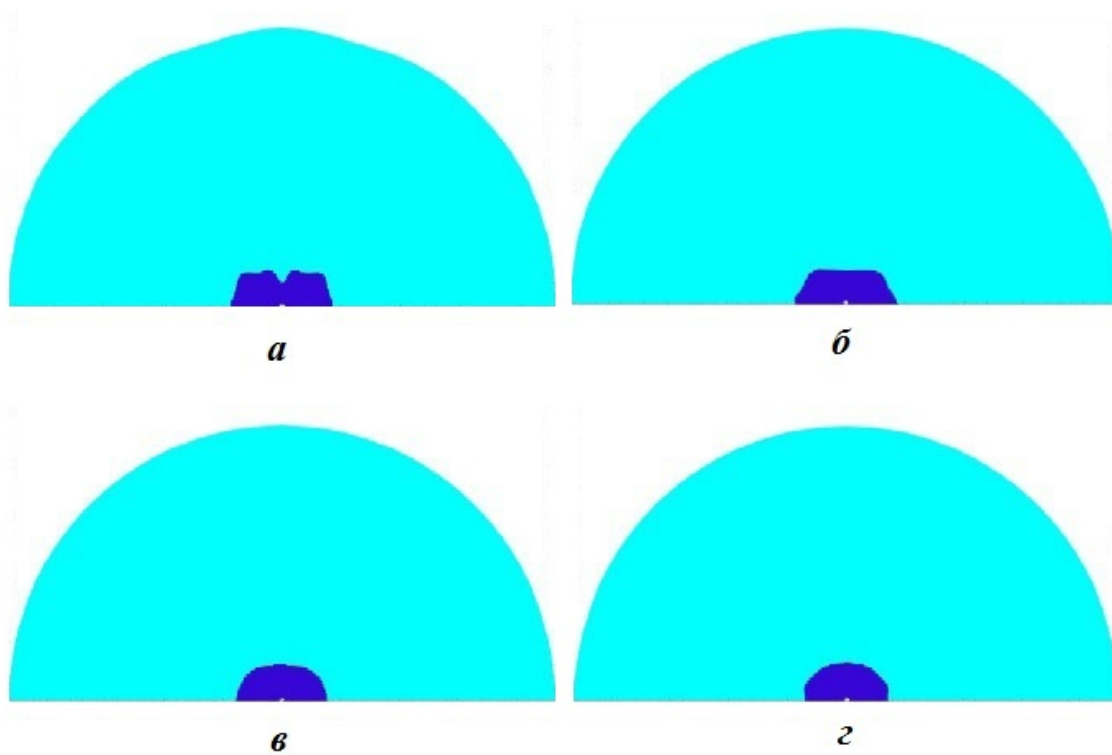


Рис. 3. Распределение ДТ-газа для разных квадратур: $a - ES_8$; $б - ES_{16}$; $в - ES_{32}$; $г - ES_{64}$

схему второго порядка точности, но можно построить схему, сохраняющую сферическую симметрию в одномерных задачах.

Вторым алгоритмом по решению проблемы ротационной инвариантности может быть метод сферических гармоник — P_n -метод [6]. Этот метод, обладая ротационной инвариантностью относительно угловых переменных (сферические функции инвариантны относительно вращения координат в пространстве направлений полета частиц Ω), кардинально решает проблему лучевого эффекта.

Для P_n -метода можно также построить пространственную аппроксимацию, сохраняющую инвариантность относительно одномерных симметрий.

Алгоритмами, уменьшающими лучевой эффект, являются приближения квазидиффузии [7] и квазипереноса [8, 9]. В них решаются системы уравнений, аналогичных P_1 - и диффузионным уравнениям, связь которых с кинетическим уравнением осуществляется через специальные коэффициенты, ослабляющие лучевой эффект.

Еще один подход к решению проблемы ротационной инвариантности состоит в конвертации DS_n -метода в P_{n-1} -метод. Для одномерной задачи хорошо известно, что если в методе дискретных ординат Вика—Чандрасекара в качестве узлов дискретности брать корни полинома Лежандра, то уравнения дискретных ординат эквивалентны P_n -уравнениям. В работах [10–12] показано, что идею эквивалентности в двумерном случае удастся осуществить лишь приближенно с некоторым остаточным членом. Этот остаточный член с предыдущей итерации добавляется к независимому источнику в методе дискретных ординат, и полученное уравнение решается обычным образом. В приведенных работах лучевой эффект снимается достаточно эффективно. С другой стороны, в тех же работах отмечается, что итерации по дополнительному источнику для конвертации $S_n \rightarrow P_{n-1}$ не всегда сходятся.

Если УПИ записать в сферической системе координат, то можно создать методики, более устойчивые к лучевым эффектам для определенного класса задач. Реализация методики численного решения двумерного уравнения переноса частиц, записанного в сферической системе координат, выполнена в работе [13].

В многомерных программах радиационной гидродинамики, которые применяются в ядерных лабораториях США, для решения УПИ стал использоваться полярный S_n -метод [14]. Этот метод труден для реализации, но позволяет существенно снизить влияние лучевого эффекта в расчетах лазерных мишеней с непрямым воздействием в многомерной постановке.

2. Волновой эффект

Волновой эффект возникает в методе сферических гармоник при решении гиперболических уравнений. Волновая природа гиперболических уравнений хорошо видна на примере решения одномерной системы P_1 -уравнений в вакууме, которая имеет вид $\frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0$, $\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial U}{\partial x} = 0$. После несложных преобразований ее можно свести к одному волновому уравнению $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{c^2}{3} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, решением которого являются две волны, распространяющиеся в разные стороны.

Волновой эффект описан во многих работах, в частности, его можно найти у Маккларена для P_n -приближения [15]. Эффект уменьшается при увеличении числа разложений в методе сферических гармоник.

В качестве примера приведем задачу из работы [16], в которой рассматривается остывание сферически-симметричной области в вакууме, заполненной только фотонами. На рис. 4 показаны профили температуры фотонов через равные промежутки времени, полученные в P_1 -приближении. Видно, что разностная аппроксимация в P_1 -приближении из-за волнового эффекта дает немонотонное решение. В задачах переноса энергии немонотонности в решении приводят к отрицательным плотностям излучения и температурам. Немонотонности решения не устраняются даже при уменьшении шагов по пространству и времени.

3. Колебательный эффект

Колебательный эффект возникает в кинетическом приближении для плотности и потока излучения при монотонной аппроксимации интенсивности излучения. Монотонное поведение интенсивностей во всех направлениях полета фотонов при складывании этих величин не гарантирует монотонности в потоках и плотностях излучения (сумма монотонных функций может не быть монотонной функцией). Немонотонности могут проявляться из-за различий в положениях фронтов

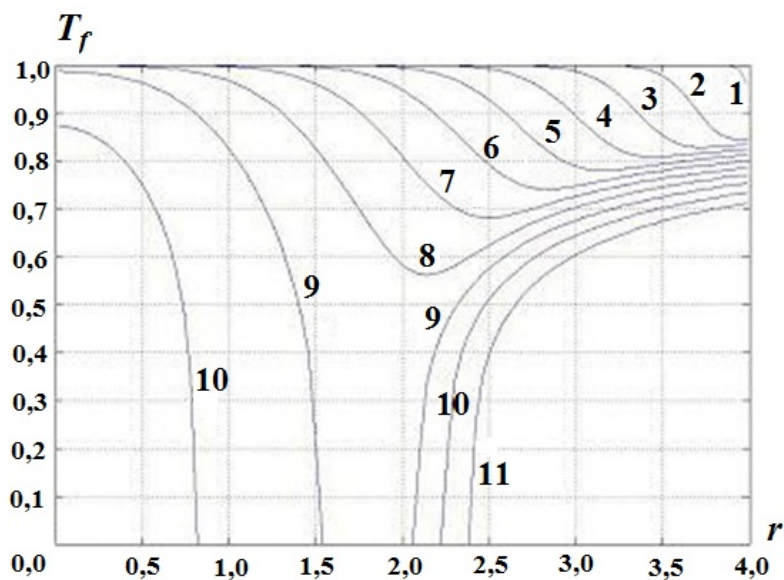


Рис. 4. Профили температуры фотонов, полученные в P_1 -приближении, для первого момента времени (1) и затем через равные промежутки времени (2–11)

интенсивностей в разных направлениях. Эффект уменьшается при увеличении числа направлений в пространстве полета фотонов.

В качестве примера рассмотрим остывание в вакууме плоского слоя толщиной 1 см в одномерном случае. Начальное распределение поля излучения — изотропное. На границах задана свободная поверхность. Коэффициенты поглощения и рассеяния равны нулю.

На рис. 5 (см. также цветную вкладку) приведены графики распределения температур фотонов, полученные в кинетическом приближении по St-схеме при разном числе узлов M в пространстве полета фотонов на один из моментов времени. Видно, что осцилляции, возникающие при разном

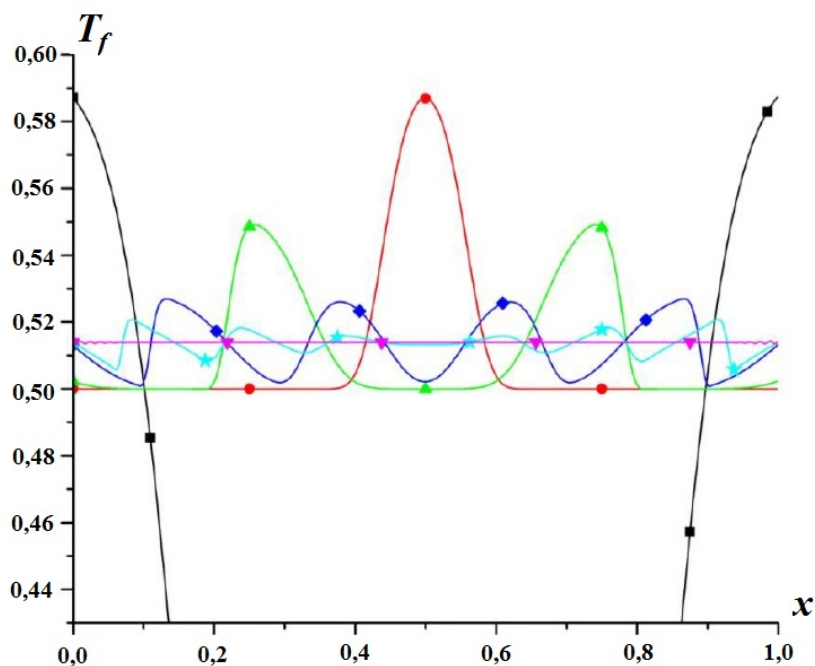


Рис. 5. Профили температур фотонов, полученные в кинетическом приближении: —■— — $M = 8$; —●— — $M = 16$; —▲— — $M = 32$; —◆— — $M = 64$; —★— — $M = 100$; —▼— — $M = 1000$

числе узлов M в пространстве полета фотонов, постепенно уменьшаются по амплитуде и исчезают только при $M = 1\,000$.

4. Эффект неравномерной сетки

Эффект неравномерной сетки проявляется в немонотонности решения, которое на равномерной сетке для данной задачи монотонно. В двумерных геометриях это проявляется в искажении фронта распространения тепла.

Для примера приведем сначала одномерную задачу в *сером* приближении для сферически-симметричной геометрии, в которой эффект неравномерной сетки приводит к немонотонности по температурам вещества и фотонов даже при использовании монотонной по интенсивности St-схемы. Уменьшение шага по времени снимает этот эффект.

В данной задаче сферически-симметричный слой ($101\text{ см} \leq r \leq 105\text{ см}$) прогревается стационарным планковским источником излучения, соответствующим температуре 1 кэВ . Начальная температура равна $T^0 = 0,00001\text{ кэВ}$, плотность вещества $\rho = 1\text{ г/см}^3$, уравнение состояния $E = 0,81T$, рассеяние отсутствует. На внутреннем радиусе задан односторонний входящий поток, определяемый по единичной температуре, на внешнем радиусе — условие свободной поверхности. Коэффициент поглощения $\alpha_c = 0,13739T^{-3}$.

По пространству использовалась неравномерная сетка.

На рис. 6, 7 приведены профили температуры вещества и фотонов, полученные в одномерном кинетическом приближении по St-схеме с разными шагами по времени: $\tau = 10^{-4}$; 10^{-5} ; 10^{-6} . При $\tau = 10^{-5}$ наступает сходимость и результат практически не меняется, но негладкие участки остаются. На равномерной сетке решение данной задачи ведет себя монотонно.

Приведем примеры искажения решения на неортогональных двумерных сетках. Двумерная задача взята из работы [17] и решалась в прямоугольной области ($10\text{ см} \leq r \leq 15\text{ см}$, $1\text{ см} \leq z \leq 11\text{ см}$). Расчеты проводились в кинетическом приближении на "комбинированной" сетке, результаты пред-

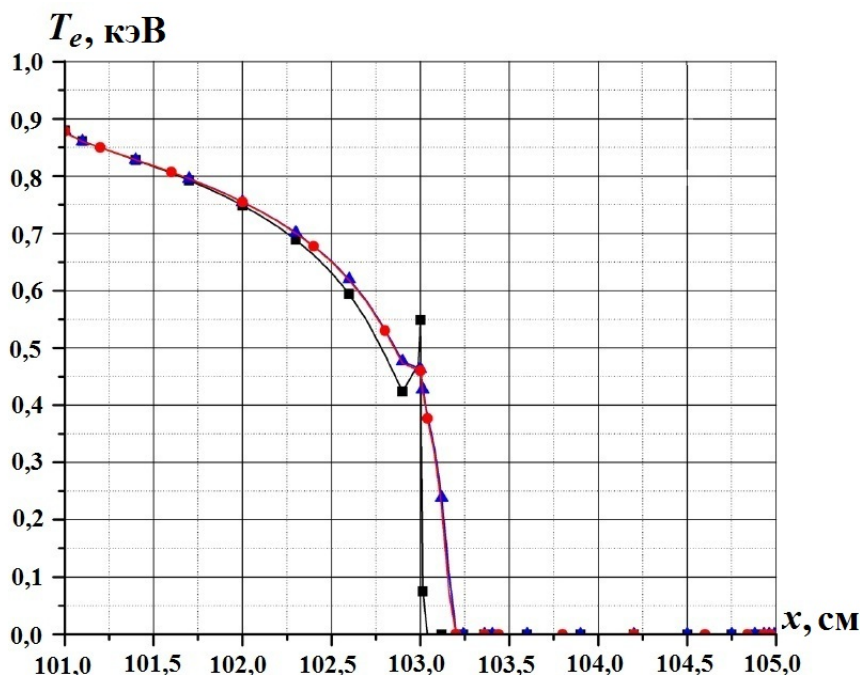


Рис. 6. Профили температуры вещества, полученные в кинетическом приближении по St-схеме: —■— $\tau = 10^{-4}$; —●— $\tau = 10^{-5}$; —▲— $\tau = 10^{-6}$

ставлены на рис. 8 (см. также цветную вкладку). Изолинии температуры точного решения представляют собой вертикальные прямые линии.

Видно, что все схемы искажают точное решение. На комбинированной сетке лучше всех ведет себя DDAD-схема, схемы типа TVDR показывают лучший результат по сравнению с St-схемой, причем применение расширенного шаблона для TVDR-схемы повышает точность.

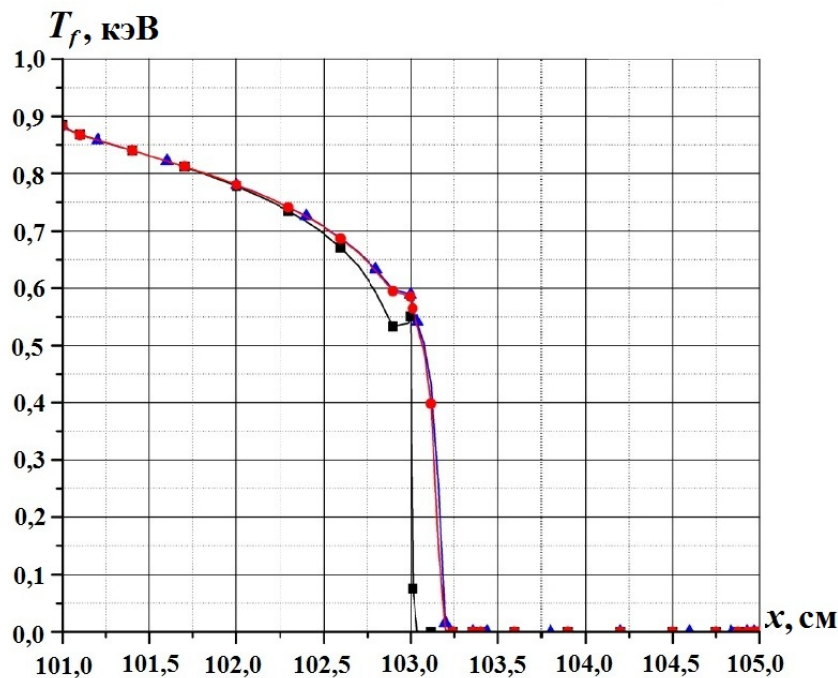


Рис. 7. Профили температуры фотонов, полученные в кинетическом приближении по St-схеме: \blacksquare — $\tau = 10^{-4}$; \bullet — $\tau = 10^{-5}$; \blacktriangle — $\tau = 10^{-6}$

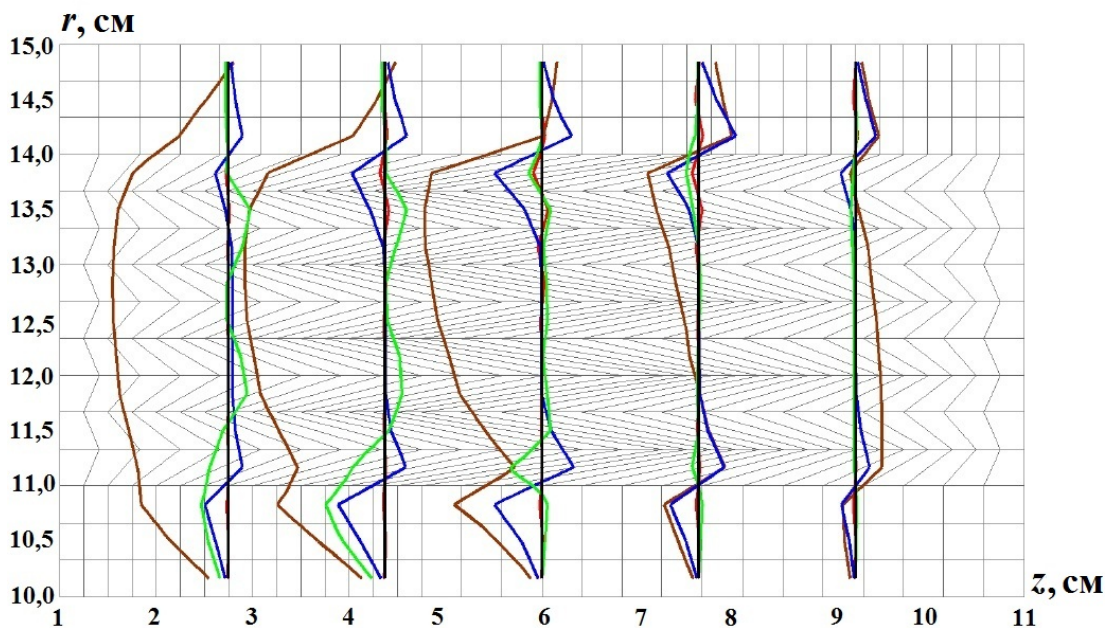


Рис. 8. Изолинии температуры вещества на комбинированной сетке: — — точное решение; — — St-схема [18]; — — DDAD-схема [19]; — — TVDR-схема [20]; — — TVDR-схема с расширенным шаблоном [21]

5. Эффект сферической неинвариантности

Эффект сферической неинвариантности возникает в многомерных P_1 - и диффузионных приближениях, где нет лучевого эффекта, но из-за неинвариантной аппроксимации разностных операторов дивергенции и градиента не обеспечивается выполнение условия сферической инвариантности на регулярных сетках, т. е. нет сохранения сферической симметрии для одномерных задач.

Для примера приведем инвариантную и неинвариантную аппроксимации разностного оператора градиента для двумерного уравнения переноса в P_1 -приближении:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} + \alpha_c U = \alpha_c B; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + \frac{1}{3} \nabla U + \alpha \vec{S} = 0.$$

Запишем интегральный закон сохранения энергии в рамках одной ячейки для разностной аппроксимации P_1 -уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{c\tau} + \operatorname{DIV} \left(\vec{S}_i^{n+1} \right) + (\alpha_c U)_i^{n+1} &= (\alpha_c B)_i^{n+1}; \\ \frac{\vec{S}_i^{n+1} - \vec{S}_i^n}{c\tau} + \frac{1}{3} \operatorname{GRAD} (U_i^{n+1}) + (\alpha \vec{S})_i^{n+1} &= 0, \end{aligned}$$

где i — индекс ячеек разностной сетки, $i = 1, 2, \dots, I$; DIV и GRAD — разностные операторы дивергенции и градиента. Остальные обозначения взяты из работ [22, 23].

Для разностного оператора дивергенции в большинстве схем используют консервативную аппроксимацию вида $\operatorname{DIV} \left(\vec{S}_i^{n+1} \right) = \frac{1}{\Delta V_i} \sum_{k=1}^{k_i} (r \vec{n} \Delta \ell)_{s_k} \vec{S}_{s_k}^{n+1}$, где s_k — индекс граней ячеек разностной сетки; k_i — число граней разностной ячейки. Такая аппроксимация обеспечивает выполнение закона сохранения тепловой энергии.

Для разностного оператора градиента можно использовать консервативную, но неинвариантную аппроксимацию вида $\operatorname{GRAD} (U_i) = \frac{1}{\Delta V_i} \sum_{k=1}^{k_i} (r \vec{n} \Delta \ell)_{s_k} U_{s_k}$, которая для регулярных сеток не обеспечивает выполнения условия сферической инвариантности, либо неконсервативную, но инвариантную аппроксимацию вида $\operatorname{GRAD} (U_i^{n+1}) = \frac{r_i}{\Delta V_i} \sum_{k=1}^{k_i} (\vec{n} \Delta \ell)_{s_k} U_{s_k}^{n+1}$, которая обеспечивает выполнение условия сферической инвариантности. Неконсервативная аппроксимация потокового уравнения не нарушает выполнения закона сохранения тепловой энергии, так как первое уравнение для энергии излучения аппроксимируется консервативно, а оно является определяющим при выполнении закона сохранения полной энергии.

6. Шахматный эффект

Шахматный эффект возникает на квадратных и кубических сетках в градиентных схемах и проявляется в том, что тепло распространяется неравномерно, в основном вдоль диагоналей ячеек разностной сетки. Шахматный эффект впервые описан и объяснен Ю. А. Бондаренко для уравнения теплопроводности в работе [24]. Там же показан способ устранения этого эффекта. В работе [25] для системы P_1 -уравнений показано, что шахматный эффект может проявляться не только в градиентных схемах, но и в схемах годуновского типа при аппроксимации градиента плотности излучения на грани ячейки через плотности в центрах соседних ячеек. Эффект исчезает при переходе к комбинированным схемам.

В задаче из работы [26] рассматривается распространение излучения от точечного источника. В центре области $0 \leq r \leq 3$ см, $0 \leq z \leq 3$ см задана температура $T = 1$ кэВ. По координатам r и z взята равномерная сетка в 50×50 ячеек.

На рис. 9 приведены результаты численных расчетов по градиентной схеме. Слева показано распределение температуры на конечный момент времени в плоскости (r, z) . Справа приведен профиль

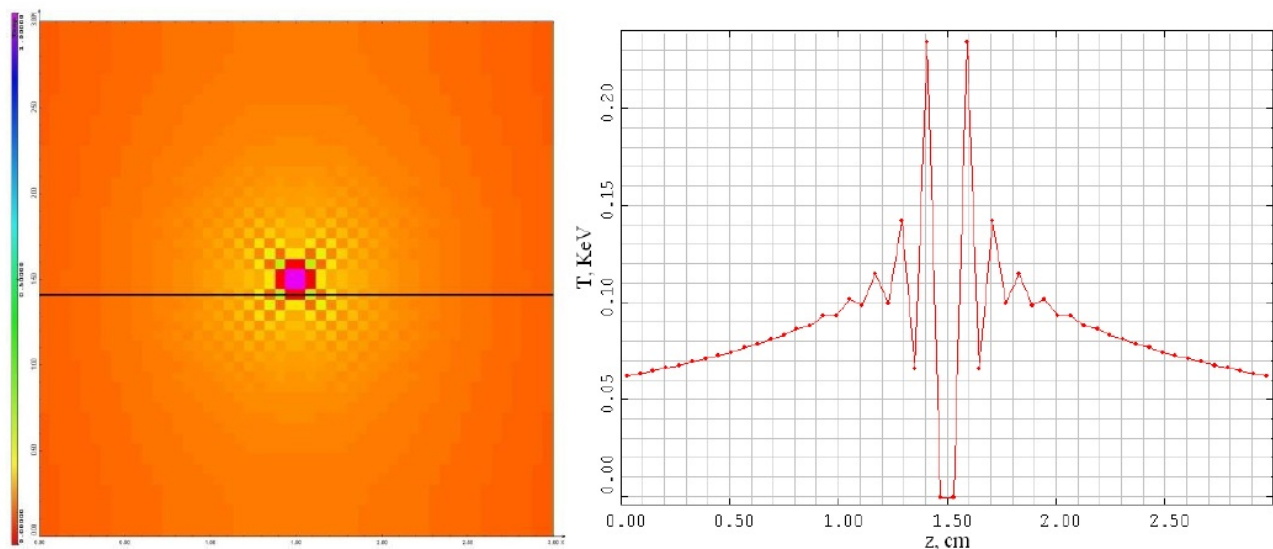


Рис. 9. Распределение температуры вещества по градиентной схеме

температуры вдоль выделенного горизонтального канала, изображенного слева. Видно, что при аппроксимации потоков по градиентной схеме возникает шахматный эффект.

На рис. 10 приведены результаты численных расчетов по схеме Годуновского типа. Видно, что здесь также возникают осцилляции, так как тепло распространяется преимущественно через грани ячеек.

В комбинированной схеме поток на грани определяется линейной комбинацией потоков по градиентной схеме и схеме Годунова. На рис. 11 показано распределение температуры вещества, полученное по комбинированной схеме. Видно, что комбинированная схема полностью избавляет решение задачи от шахматного эффекта.

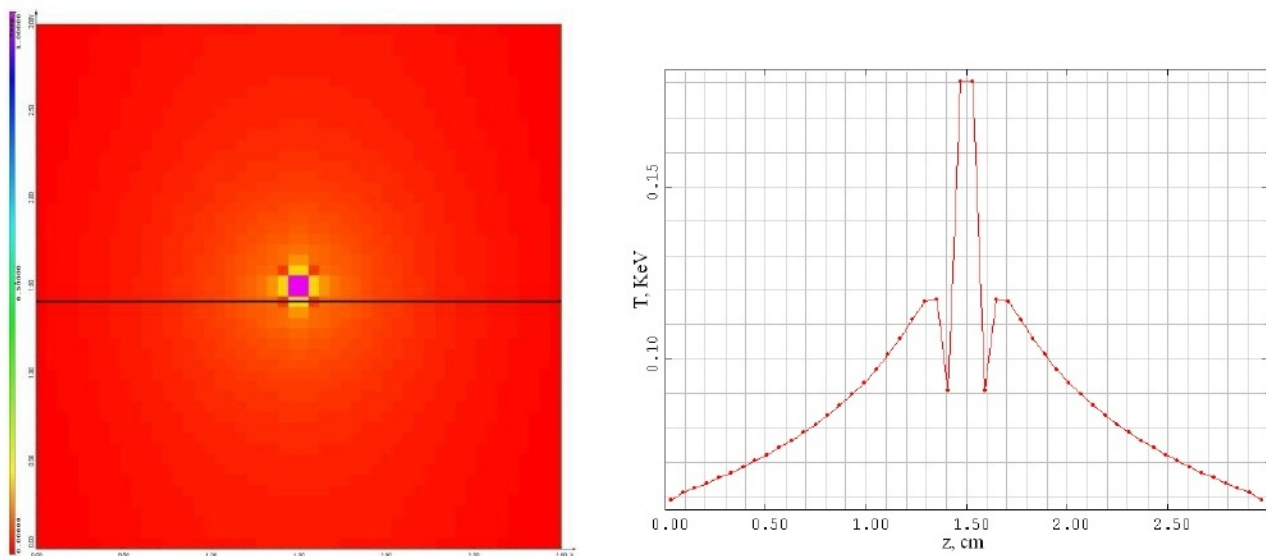


Рис. 10. Распределение температуры по схеме Годуновского типа

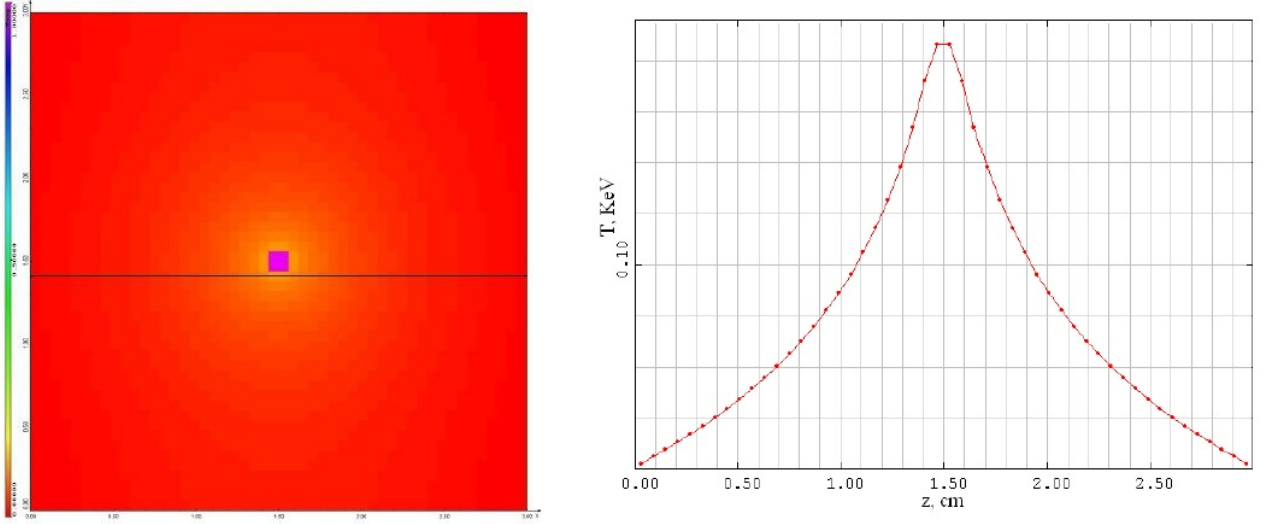


Рис. 11. Распределение температуры по комбинированной схеме

7. Осевой эффект

Осевой эффект возникает из-за ухудшения аппроксимации в осесимметричных задачах при $r \rightarrow 0$, вследствие чего появляются тепловые и газодинамические струи вдоль оси симметрии.

Двумерное уравнение переноса излучения в кинетическом приближении для осесимметричной геометрии в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\rho}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{J_g}{\rho} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\xi r J_g) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu J_g) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} (\eta J_g) + (\alpha_{cg} + \alpha_s) J_g = \frac{1}{4\pi} \alpha_{cg} B_g + \frac{1}{4\pi} \alpha_s U_g,$$

где r, z — цилиндрические координаты; \vec{z} — ось симметрии. Остальные обозначения взяты из работы [26].

В кинетическом приближении ухудшение аппроксимации возникает из-за возрастания погрешности вычислений при делении на маленькие числа при $r \rightarrow 0$ в членах $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\xi r J_g)$, $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} (\eta J_g)$.

На рис. 12 приведено пространственное распределение температуры фотонов в сферически-симметричной лазерной мишени из предыдущих примеров. Видно нарушение симметрии в кинетическом приближении вблизи оси из-за осевого эффекта.

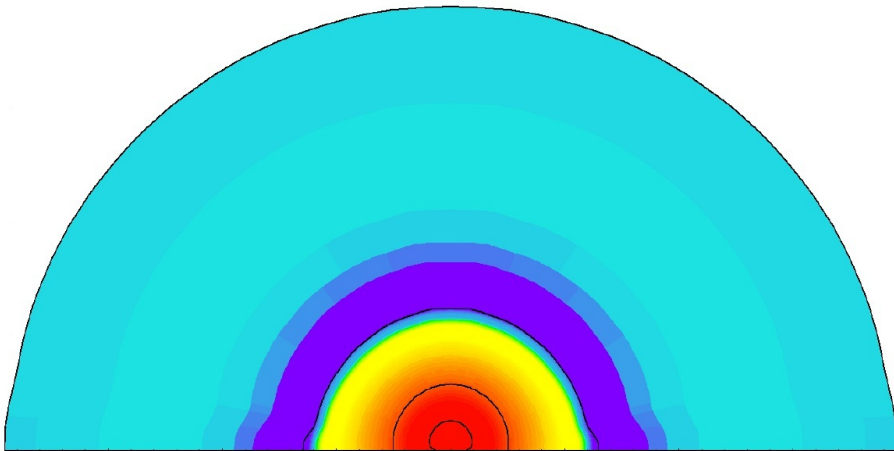


Рис. 12. Распределение температуры фотонов в кинетическом приближении

8. Эффект немонотонности потока в центрах ячеек

Эффект немонотонности потока возникает в центрах разностных ячеек при монотонном поведении интенсивности, плотности излучения и температуры вещества.

Данный эффект впервые описан в работе [27] для схем WDD и DDAD и может приводить, в частности, к немонотонности импульса излучения $\vec{I} = \frac{1}{c\rho_0} \int_0^\infty \alpha_\nu \vec{S}_\nu d\nu$. Через импульс излучения численные осцилляции в потоке создают осцилляции в уравнении движения, которые при решении уравнений газовой динамики могут усиливаться. В данной работе численно и аналитически показано, что пользоваться потоками, вычисленными через интенсивности в серединах разностных ячеек при счете по St-, DD-, WDD- и DDAD-схемам, некорректно, так как в стационарном случае не выполняется условие $r^\eta S = \text{const}$, из-за чего возможно возникновение осцилляций при счете задач радиационной газовой динамики с импульсом излучения. Одним из выходов в данной ситуации может быть использование при вычислении импульса излучения не потоков в центре ячейки, а средних арифметических от потоков на гранях разностной ячейки. В работе также предложены способы выбора соотношений, связывающих значения искомой функции и радиуса в центре ячейки со значениями этих величин в узлах разностной сетки. Эти соотношения гарантируют выполнение условий $(r^\eta S)_i = (r^\eta S)_{i+1/2}$ для WDD- и DDAD-схем. Часто, когда в схемах DD и DDAD нарушается условие положительности интенсивности, используют гибридные схемы DD/St, DDAD/St, в которых при отрицательности интенсивностей переходят на положительную St-схему. К сожалению, в положительных схемах DD/St, DDAD/St не удается получить условие, при котором выполняется $(r^\eta S)_i = (r^\eta S)_{i+1/2}$, поэтому рекомендовано ими не пользоваться.

В качестве примера рассмотрим поведение потока в стационарной сферически-симметричной задаче переноса излучения при $\alpha = 0,5$. В области $2 \leq r \leq 4$ на нижней сфере задано излучение планковского источника от единичной температуры, на верхней — условие свободной поверхности. На рис. 13 приведены рассчитанные по St-схеме профили $r^2 S(r)$ для узлов и центров разностных ячеек. Видно, что для потоков в узлах выполняется условие $r^2 S_i = \text{const}$, для потоков в центрах — нет.

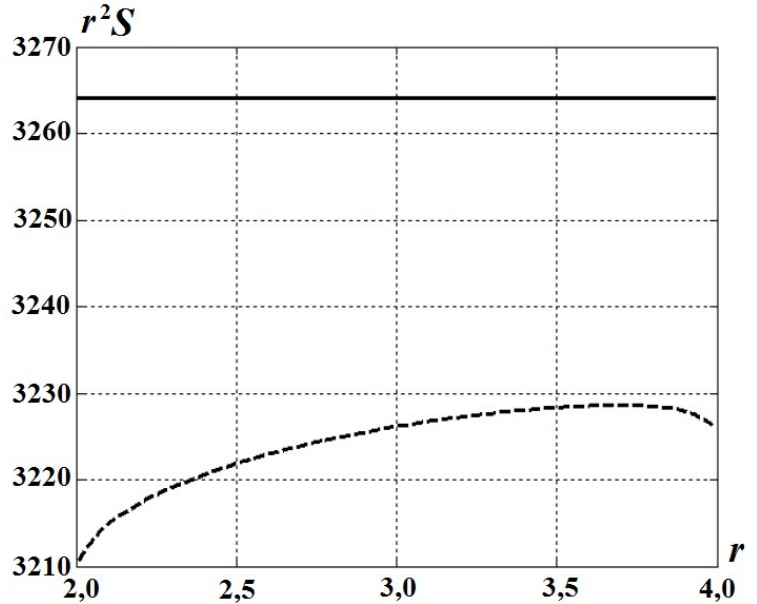


Рис. 13. Профили $r^2 S(r)$ разностной сетки, рассчитанные по St-схеме, для узлов (—) и центров ячеек (---)

9. Шаговый эффект

Шаговый эффект возникает при использовании явной аппроксимации коэффициентов поглощения и теплопроводности в неявных схемах. Это приводит к появлению условия ограничения на шаг по времени, при нарушении которого появляются осцилляции. Эффект описан Ю. А. Бондаренко для уравнения теплопроводности в работе [28]. Эффект исчезает при уменьшении шага по времени. В диффузионном приближении, где уравнение энергии имеет вид: $\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{div} \vec{S} = 0$, $\vec{S} = \frac{1}{3\alpha} \nabla U$,

$\varepsilon = E + \frac{U}{c\rho}$, несложно получить аналогичные оценки. В P_1 , $P_{1/3}$ и кинетическом приближениях подобные оценки пока не получены.

Для примера приведем задачу переноса излучения в сером приближении из разд. 4 для сферически-симметричной геометрии при явной аппроксимации коэффициента поглощения. Расчет по монотонной St-схеме в кинетическом приближении дает осцилляции по температуре вещества на равномерной сетке в 2000 ячеек ($h = 0,002$).

На рис. 14 приведены графики распределения температур фотонов и вещества, полученные с $\tau = 10^{-5}$ и $\tau = 10^{-6}$. Видно, что при $\tau = 10^{-5}$ возникают осцилляции по температуре вещества даже в монотонной St-схеме, хотя положительность решения остается. При этом происходит задержка в распространении тепловой волны. Осцилляции по температуре фотонов не возникают, но также происходит задержка фронта волны. При $\tau = 10^{-6}$ профили всех температур монотонны.

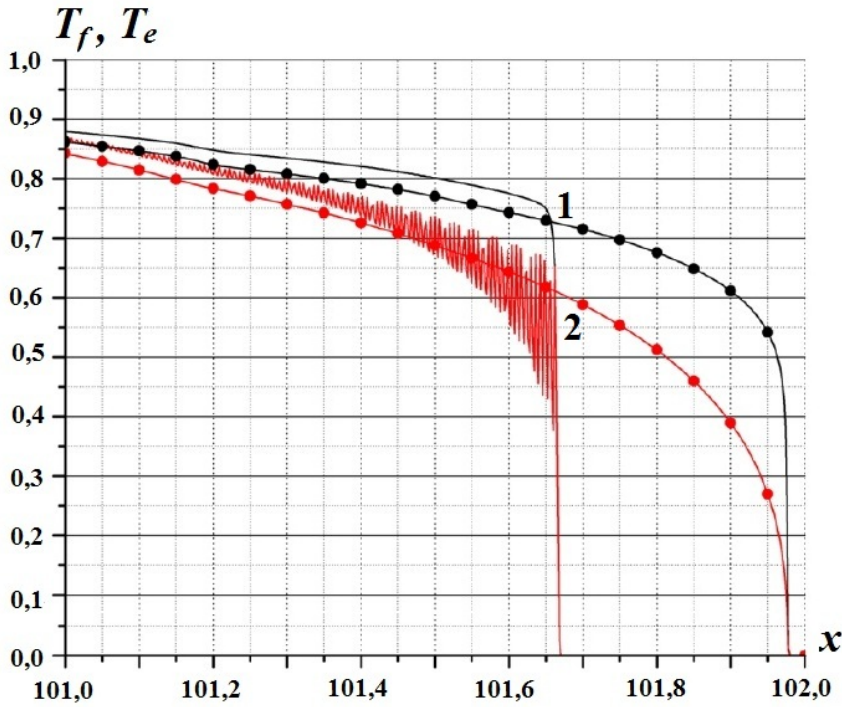


Рис. 14. Профили температур фотонов (1) и температуры вещества (2), полученные по St-схеме: —, —•— — $\tau = 10^{-5}$; —●—, —●— — $\tau = 10^{-6}$

10. Аспектный эффект

Идеальными сетками для хорошей аппроксимации в одномерном случае являются равномерные сетки, в двумерном случае — квадратные с аспектным числом*, равным единице, в трехмерном случае — кубические. При использовании в одномерном случае неравномерных сеток порядок аппроксимации большинства разностных схем снижается. Этот же эффект проявляется в двумерном случае. При этом возникает неустойчивость при увеличении аспектного числа, в частности, в задачах на сходимость по сетке. Наиболее наглядно она проявляется в сферических задачах при увеличении числа интервалов по углу и называется аспектным эффектом.

Для проверки влияния аспектного числа на симметрию расчета возьмем задачу из работы [29]. В данной задаче рассматривается пульсирующая сфера, выходящая со временем на стационарный

* Аспектным числом в численных методах называется отношение длин смежных сторон ячейки разностной сетки.

режим. Перенос излучения рассматривается в приближении лучистой теплопроводности на сетках с разным числом интервалов по углу. В первом случае берется 50 интервалов по радиусу и 10 по углу, во втором — 50 по радиусу и 100 по углу (аспектное число меняется в 10 раз). Симметрия задачи не должна меняться при симметричном увеличении числа точек по углу, однако с некоторого момента времени на более подробных сетках начинают развиваться возмущения, которые в конечном счете дают несимметричное решение. На рис. 15 (см. также цветную вкладку) приведено распределение плотности вещества для двух вариантов сетки на один и тот же момент времени.

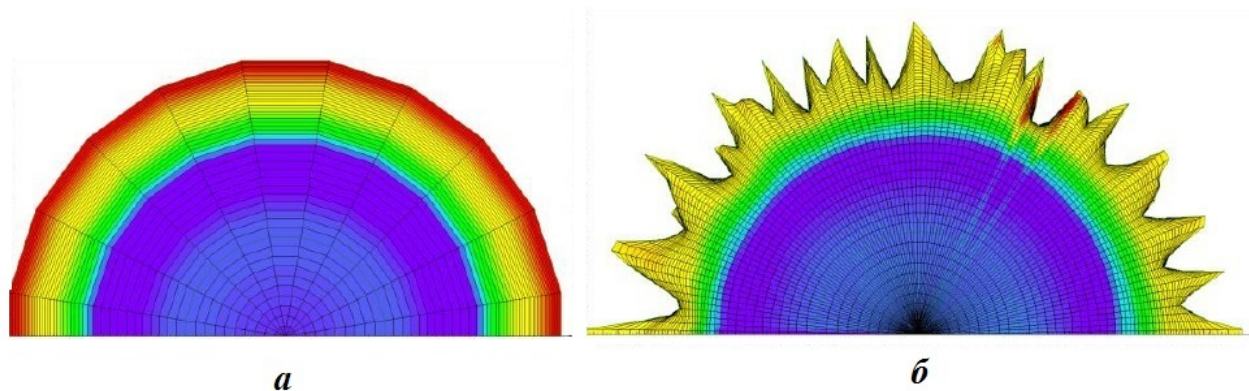


Рис. 15. Распределение плотности на сетке 10×50 (а) и на сетке 100×50 (б)

Заключение

В данной работе описаны десять сеточных эффектов, возникающих при численном решении задач переноса теплового излучения разностными методами. Эти эффекты опасны тем, что вносят погрешности при моделировании физических процессов и мешают их правильному описанию. Конечно, перечень сеточных эффектов не ограничивается приведенными в данной работе примерами, он намного шире, поэтому автор надеется на помощь в нахождении новых эффектов и модельных задач, в которых они наиболее наглядно проявляются.

Список литературы

1. Карлсон Б. Численное решение задачи кинетической теории нейтронов // Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1963. С. 243—258.
2. Lathrop K. D. Ray effects in discrete ordinates equations // Nuclear Science and Engineering. 1968. Vol. 32. P. 357—369.
3. Соболев С. Л. О формулах механических квадратур на поверхности сферы // Сиб. мат. журнал. 1962. Т. 3, № 5. С. 486—496.
4. Лебедев В. И. О квадратурах на сфере // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1976. Т. 16, № 2. С. 293—306.
5. Carlson B. G. The numerical theory of neutron transport // Methods of Computational Physics. 1963. Vol. 1, No 9. P. 408—425.
6. Jeans J. H. The equations of radiative transfer of energy // Astron. Soc. 1917. Vol. 78. P. 28—36.
7. Гольдин В. Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1964. Т. 4, № 6. С. 1078—1087.

8. Карлыханов Н. Г., Козманов М. Ю. Учет кинетических эффектов в диффузионном приближении для расчета переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2010. Вып. 4. С. 3–9.
9. Кошутин Д. А., Шестаков А. А. Решение двумерного уравнения переноса теплового излучения в приближении многогруппового квазипереноса // Там же. 2017. Вып. 3. С. 39-50.
10. Reed W. H. Spherical harmonic solutions of the neutron transport equation from discrete ordinate codes // Nuclear Science and Engineering. 1972. Vol. 49. P. 10–19.
11. Lathrop K. D. Elimination of ray effects by converting discrete ordinate equation to spherical-harmonic-like equations // Proc. Conf. "New Developments in Reactor Mathematics and Applications". Idaho Falls, March 29 – April 3, 1971.
12. Jung J., Chijiwa H., Kobayashi H., Nishihara H. Discrete ordinate neutron transport equation to PL approximation // Nuclear Science and Engineering. 1972. Vol. 49. P. 1–9.
13. Бочков А. И., Сучкова В. В., Трубицын А. П. DS_n -метод решения двумерного кинетического уравнения переноса, записанного в сферической системе координат // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2011. Вып. 2. С. 44–55.
14. Marinak M. M., Kerbel G.D., Koning J.M. et al. Advances in HYDRA and its applications to simulations of inertial confinement fusion targets // 7th Conf. on ICF and Applications. Bordeaux, France. September 12–16, 2011.
15. McClarren R., Holloway J. P., Brunner T. On solution to the P_n -equations for thermal radiative transfer // J. Comp. Phys. 2008. Vol. 227. P. 2864–2885.
16. Вершинская А. С., Гаджиев А. Д., Грабовенская С. А., Шестаков А. А. Применение TVD реконструкции для построения монотонной и второго порядка схемы РОМБ решения уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 21–36.
17. Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Шестаков А. А. Применение TVD-подхода к DS_n -методу решения уравнения переноса теплового излучения в осесимметричной RZ -геометрии // Там же. 2010. Вып. 2. С. 30–39.
18. Басс Л. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А. Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. М.: ИПМ АН СССР, 1968.
19. Гаджиев А. Д., Кондаков И. А., Писарев В. Н., Стародумов О. И., Шестаков А. А. Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) для численного решения уравнения переноса нейтронов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 4. С. 13–24.
20. Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Шестаков А. А. Применение TVD-подхода к DS_n -методу решения уравнения переноса теплового излучения // Там же. 2009. Вып. 2. С. 37–48.
21. Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Шестаков А. А. Применение TVD-подхода к DS_n -методу решения уравнения переноса теплового излучения в осесимметричной RZ -геометрии // Тез. VIII Межд. конф. по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2010). Алушта, 2010. С. 454–455.
22. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Метод РОМБ для решения многогруппового уравнения переноса излучения в P_1 -приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 66–70.
23. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Двумерная методика РОМБ для численного решения уравнений переноса излучения в многогрупповом P_1 -приближении // Там же. 1990. Вып. 1. С. 41–47.

24. Бондаренко Ю. А., Голубев А. А., Горбунов А. А., Наумов А. О., Панов А. И. О "шахматном эффекте" в некоторых разностных схемах для двумерной и трехмерной теплопроводности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2011. Вып. 1. С. 49–53.
25. Гаджиев А. Д., Чубарешко И. С., Шестаков А. А. Неявный конечно-объемный TVD-метод для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении // Там же. 2017. Вып. 2. С. 18–29.
26. Кондаков И. А., Селезнёв В. Н., Стародумов О. И., Шестаков А. А. Аналитические тесты для решения задач переноса частиц численными методами // Там же. 2003. Вып. 2. С. 28–43.
27. Завьялов В. В., Шестаков А. А. О поведении потока для некоторых разностных схем решения задач теплового излучения в кинетическом приближении // Там же. 2008. Вып. 2. С. 21–30.
28. Бондаренко Ю. А., Горбунов А. А. Практические условия устойчивости для счета тепловых волн в неявных разностных схемах // Там же. Вып. 4. С. 3–12.
29. Шестаков А. А. Об одной тестовой задаче сжатия слоистой системы с учетом переноса излучения в различных приближениях // Там же. 2017. Вып. 4. С. 25–31.

Статья поступила в редакцию 19.12.17.

THE GRID EFFECTS IN THE NUMERICAL SIMULATION OF THERMAL RADIATION / A. A. Shestakov (FSUE "Acad. E. I. Zababakhin RFNC-VNIITF", Snezhinsk, Chelyabinsk region).

One of the most difficult problems to solve in the transport theory is the radiation transport equation. The difficulty of solving this equation is mainly due to a significant nonlinearity of all quantities of interest and large dimensions of space under consideration. Effects not associated with the physics of simulated process occur in the numerical simulation of the heat flux transport equations and makes it difficult to achieve a proper understanding of these phenomena. The description of the grid effects and examples of model problems, which simulation clearly demonstrate these effects, are given.

Keywords: radiation transport, numerical simulation.
