

УДК 519.63:536.24

## ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ТЕПЛОГИДРАВЛИКИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ВЛОЖЕННОЙ ГРАНИЦЫ В РАСЧЕТНОМ КОДЕ "КОРСАР/CFD"

Ю. В. Юдов, С. С. Чепилко, И. Г. Данилов

(ФГУП "НИТИ им. А. П. Александрова", г. Сосновый Бор Ленинградской области)

Представлена численная методика CFD-модуля на основе метода вложенной границы, связанного с одномерной моделью расчетного кода КОРСАР/CFD по полуявной схеме. Код КОРСАР/CFD является развитием системного теплогидравлического кода КОРСАР/ГП, используемого для расчетного обоснования безопасности ВВЭР. CFD-модуль предназначен для учета трехмерных эффектов в напорной камере реакторов при пространственном моделировании сопряженных теплогидравлических (в поканальном приближении) и нейтронно-физических процессов в активной зоне в случае несимметричной работы циркуляционных петель. Приведены результаты тестирования методики на нестационарной задаче о поперечном обтекании цилиндра однородным ламинарным потоком жидкости (вихревая дорожка Кармана).

*Ключевые слова:* CFD-модуль, метод вложенной границы, многосеточный метод, вихревая дорожка Кармана.

### Введение

При расчетном обосновании безопасности водо-водяных энергетических реакторов (ВВЭР) выделяются режимы, характеризуемые возмущениями температуры теплоносителя или концентрации борной кислоты по отдельным петлям циркуляционного контура. В качестве примеров можно привести режимы с отсечением одного из парогенераторов со стороны второго контура (повышение температуры в аварийной петле) или с разрывом паропровода (понижение температуры в аварийной петле), транспортировку пробки деборированной воды (конденсата) из гидрозатворов холодных ниток при пуске циркуляционных насосов. Существуют также режимы с несанкционированным поступлением деборированной воды из системы подпитки. Перечисленные ситуации приводят к асимметричному возмущению поля температуры или концентрации борной кислоты на входе в активную зону реактора и вследствие изменения реактивности — к асимметричному возмущению энерговыделения в активной зоне. Динамика и распределение возмущений определяются в значительной мере процессами перемешивания в опускной и нижней камерах реактора, которые должны моделироваться при реалистичной оценке безопасности в трехмерной постановке.

Одним из инструментов для расчетного обоснования безопасности ВВЭР является системный расчетный код КОРСАР/ГП, аттестованный в Ростехнадзоре в 2009 г. [1]. Основу функционального наполнения кода составляет одномерная двухжидкостная модель контурной теплогидравлики [2]. Реализована возможность пространственного моделирования сопряженных теплогидравлических (в поканальном приближении) и нейтронно-физических процессов в активной зоне.

Для учета трехмерных эффектов в опускной и нижней камерах реактора в НИТИ разработан CFD-модуль в составе новой версии расчетного кода КОРСАР/CFD. CFD-модуль объединен с одномерными моделями кода по полуявной численной схеме [3]. Модуль базируется на балансном методе вложенной границы в идеологии обрезанных декартовых ячеек (Cartesian Cut-Cell) [4]. По

сравнению с классическим методом конечного объема на неструктурированной сетке метод вложенной границы обладает рядом преимуществ: значительно упрощаются процесс генерации расчетной сетки и алгоритмы пространственной дискретизации членов уравнений сохранения, а также появляется возможность использования геометрических многосеточных методов при решении систем конечно-разностных уравнений. Единственной сложностью при использовании декартовых методов является рассмотрение граничных ячеек. В этой связи стоит отметить, что существуют два класса методов вложенной границы: балансные и небалансные. В небалансных методах значения параметров в граничных ячейках определяются посредством интерполяции по значениям на границе области и в соседних внутренних ячейках. Недостатком такого подхода является нарушение баланса массы, энергии и импульса в приграничной области. В балансных методах вложенной границы в идеологии обрезанных декартовых ячеек для граничных ячеек методом контрольного объема составляются дискретные аналоги уравнений сохранения.

В статье изложены используемые в CFD-модуле численные алгоритмы пространственной дискретизации уравнений сохранения и их интегрирования по времени, а также многосеточный метод решения системы конечно-разностных уравнений Пуассона для давления. Применимость численных алгоритмов подтверждена расчетами тестовой задачи с вихревой дорожкой Кармана при поперечном обтекании цилиндра однородным ламинарным потоком жидкости.

## 1. Расчетная сетка

В методе вложенной границы область моделирования погружается во вмещающий параллелепипед, который произвольным образом делится на равномерные декартовы ячейки. Таким образом формируется базовая сетка первого уровня дробления. Затем осуществляется последовательное дробление декартовых ячеек до заданного максимального уровня дробления исходной сетки. В CFD-модуле кода КОРСАР/CFD выбран самый простой изотропный способ измельчения, когда ячейки разбиваются на две равные части по каждому декартову направлению, образуя восемь мелких ячеек (четыре в двумерном случае). Максимальный уровень дробления исходной сетки может быть различным в разных зонах вмещающего параллелепипеда. В разработанном CFD-модуле предусмотрено дополнительное измельчение сетки вблизи границ области моделирования, где возможны большие градиенты рассчитываемых параметров (например, пограничные слои).

Декартовы ячейки, лежащие полностью в области моделирования, образуют множество внутренних ячеек, а ячейки, обрезанные границей, — множество граничных ячеек. Декартовы ячейки, лежащие целиком вне области моделирования, отбрасываются.

С целью упрощения алгоритмов решателя CFD-модуля приняты дополнительные ограничения для расчетной сетки [5]:

- 1) дробления соседних по граням и ребрам ячеек не должны отличаться более чем на один уровень;
- 2) для связанных границ расчетной области каждая граничная и две соседние с ней по любому координатному направлению ячейки должны быть на одном уровне дробления.

Пример расчетной сетки вблизи границы представлен на рис. 1. Заштрихованные декартовы ячейки находятся вне области моделирования.

Информация о топологии сетки хранится в формате ФТТ (Fully Threaded Tree) [6, 7]. В иерархической структуре данных ФТТ рассматриваются два типа ячеек: раздробленные и нераздробленные. Первый тип представляет собой *родительские* ячейки (или окты) для группы

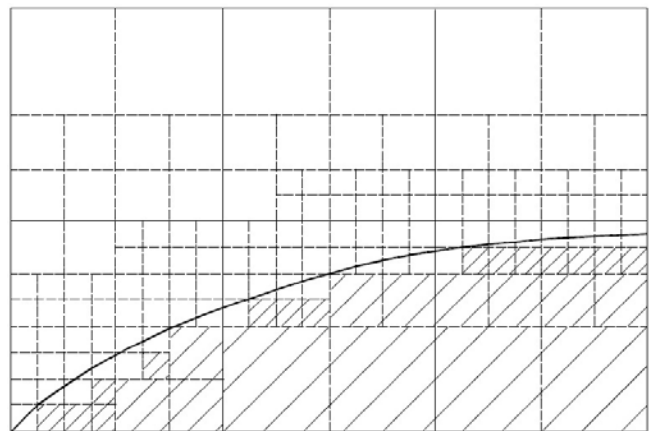


Рис. 1. Расчетная сетка вблизи границы

из восьми более мелких ячеек (из четырех в плоском случае), которые определяются как *детские* для данного типа ячеек. Ячейки второго типа называются *листовыми*. Таким образом, каждая ячейка является либо родительской для мелких ячеек, либо листовой. Одновременно каждая ячейка включается как детская в крупную родительскую ячейку.

## 2. Пространственная дискретизация уравнений сохранения

При записи дискретных аналогов уравнений сохранения используется метод контрольного объема на смещенной сетке. При этом предполагается, что узлы нодализации ячеек (включая граничные ячейки) совпадают с геометрическими центрами образующих их декартовых ячеек. Для граней ячеек требуется получить аппроксимацию конвективных и диффузионных потоков. Грани ячеек являются либо внутренними (между расчетными ячейками), либо граничными (границы области моделирования). Каждой грани соответствуют приписанные ей ячейки, которые формируются данной гранью. Для граничной грани существует одна приписанная ячейка, для внутренней — две (по входу и выходу потока через грань в соответствии с координатным направлением).

Рассмотрим сначала аппроксимацию для внутренних граней вдали от границы области моделирования, которые определим как стандартные грани. При дискретизации конвективных членов для вычисления величины  $\Phi_f$  на стандартной грани применяется непрерывно дифференцируемая ограниченная схема SDPUS-C1 третьего порядка точности [8]. В схеме SDPUS-C1 используются значения переменной  $\Phi$  в трех узлах: в дальнем от грани вверх по потоку  $\Phi_u$ , в ближайшем к грани вверх по потоку  $\Phi_c$  и в узле вниз по потоку  $\Phi_d$ . Схема легко реализуется на равномерной сетке. Когда примыкающие к грани ячейки находятся на разных уровнях дробления, какое-либо из значений  $\Phi_u$ ,  $\Phi_c$ ,  $\Phi_d$  требуется определить с третьим порядком точности посредством интерполяции. В этом случае можно выделить две ситуации, изображенные на рис. 2: когда по направлению потока ячейки укрупняются (рис. 2, а) и когда измельчаются (рис. 2, б).

В первой ситуации сложность для вычисления представляет значение  $\Phi_d$  в точке пересечения нормали к грани  $f$  с сечением  $A$ , проходящим через узел крупной ячейки  $D$  параллельно грани. Для расчета  $\Phi_d$  используется трехточечная одномерная интерполяция вдоль диагональной линии, соединяющей точку  $d$  и узел нодализации  $D$ , по значениям  $\Phi_D$ ,  $\Phi_{close}$ ,  $\Phi_{far}$  ( $\Phi_{close}$ ,  $\Phi_{far}$  — значения переменной  $\Phi$  в точках, соответственно ближней и дальней от  $d$ ). На рис. 3 показаны три возможных варианта расположения точки  $d$  (согласно первому ограничению расчетной сетки из разд. 1): а) когда три ячейки по диагонали находятся на одном уровне дробления; б) ближняя по диагонали к точке  $d$  ячейка раздроблена; в) ближняя по диагонали к точке  $d$  ячейка — крупная, а дальняя по диагонали к точке  $d$  ячейка раздроблена.  $\Phi_{close}$  и  $\Phi_{far}$  либо являются значениями переменной  $\Phi$  в

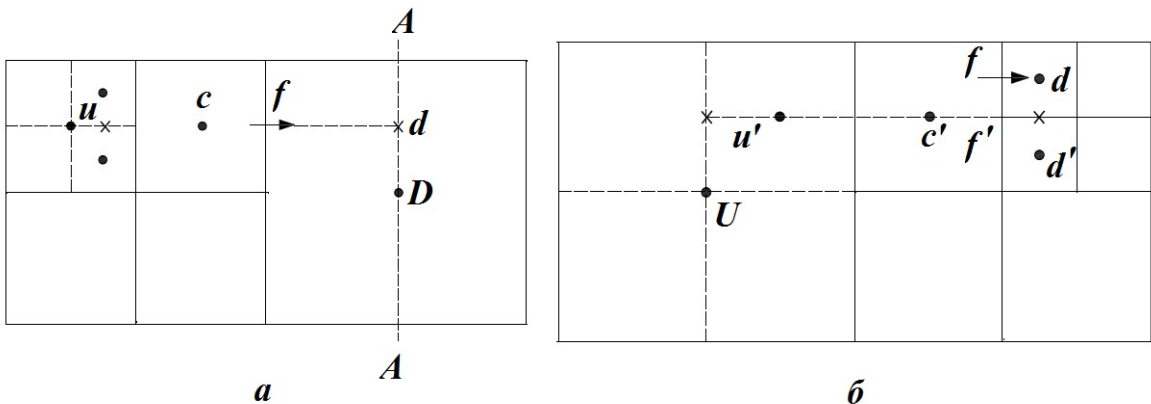


Рис. 2. Ситуации при расчете  $\Phi_f$  на стандартных гранях: а — укрупнение ячеек по направлению потока; б — измельчение ячеек по направлению потока

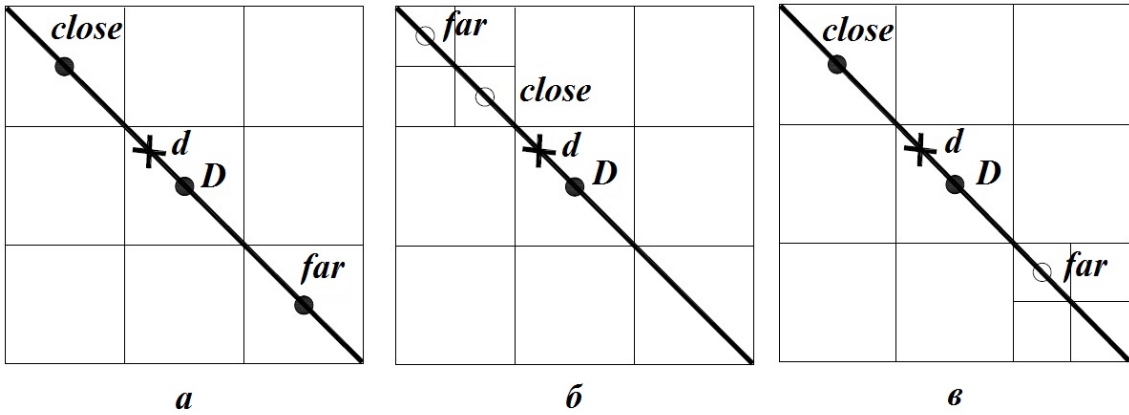


Рис. 3. Варианты расположения точки  $d$  в сечении  $A$ :  $a$  — три ячейки на одном уровне дробления;  $б$  — раздроблена ближайшая ячейка;  $в$  — раздроблена дальняя ячейка

узлах (черные кружки на рис. 3), либо рассчитываются как полусумма значений в двух соседних мелких ячейках по обе стороны от сечения  $A$  (белые кружки на рис. 3).

Если ячейка  $u$  раздроблена (см. рис. 2,  $a$ ), то  $\Phi_u$  вычисляется как среднее по четырем окружающим точку  $u$  мелким ячейкам.

Во второй ситуации (см. рис. 2,  $б$ ) по описанной выше методике вычисляется значение переменной  $\Phi_{f'}$  в центре грани крупной ячейки  $c'$  с использованием значений  $\Phi_{u'}$ ,  $\Phi_{c'}$ ,  $\Phi_{d'}$ . Затем искомое значение  $\Phi_f$  определяется со вторым порядком точности по соотношению

$$\Phi_f = \Phi_{f'} + \frac{\Phi_d - \Phi_{d'}}{|dd'|} |dd'| = \Phi_{f'} + \Phi_d - \Phi_{d'}.$$

Диффузионные потоки на стандартных гранях со вторым порядком точности также вычисляются с использованием значений  $\Phi$  в трех точках  $u$ ,  $c$ ,  $d$  по центрально-разностной схеме.

Следует отметить, что совпадение внутренних граней с декартовыми координатными плоскостями существенно упрощает процедуру дискретизации потоков.

Для граничных ячеек удобно ввести понятие объемной доли жидкости  $\varphi$  как отношение объема жидкости к объему декартовой ячейки. При  $\varphi \rightarrow 0$  малый размер граничных ячеек оказывает негативное влияние на устойчивость численного решения: во-первых, требуется существенное уменьшение шага по времени для удовлетворения условиям Куранта; во-вторых, увеличивается жесткость системы конечно-разностных уравнений вследствие разброса размера ячеек. Поэтому в методах обрезанных ячеек используется технология объединения (слияния) мелких граничных ячеек ( $\varphi < 0,5$ ) с соседними по координатным направлениям крупными ячейками ( $\varphi > 0,5$ ) [9, 10]. Первые ячейки относятся к типу *раб* (*slave*), вторые — к типу *хозяин* (*master*). Алгоритм объединения ячеек, используемый в разработанном CFD-модуле, обеспечивает компактность объединенной ячейки и позволяет каждой ячейке типа *хозяин* приписать несколько ячеек типа *раб*. В дальнейшем балансные уравнения сохранения составляются для объединенной ячейки *хозяин–рабы* (*united*), а потоки через включенные в объединенную ячейку внутренние грани не учитываются. При этом все параметры объединенной ячейки приписываются ячейке *хозяин*.

Пример объединения ячеек типов *хозяин* и *раб* изображен на рис. 4. Жирными линиями выделены объединенные ячейки, светлыми стрелками показаны внутренние грани, которые не учитываются при суммировании потоков для ячеек *хозяин–рабы*, черными стрелками помечены грани, через которые осуществляется обмен с соседними ячейками.

Обрезанные ячейки образуют нестандартные внутренние грани. Внутренняя грань является нестандартной, если она либо пересекается границей, либо хотя бы одна из приписанных ей ячеек относится к типу *раб*. Далее для каждой нестандартной грани приписанная ячейка типа *раб* заме-

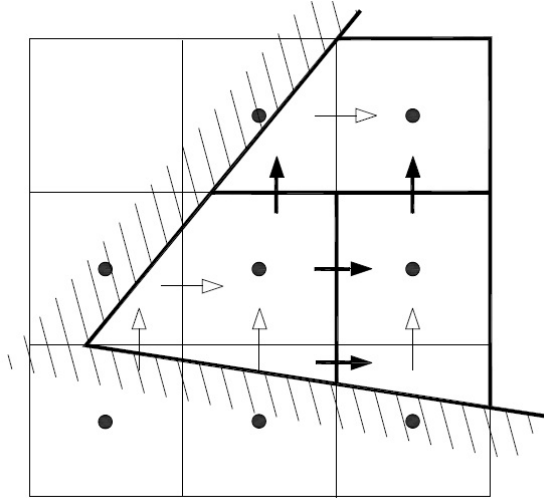


Рис. 4. Объединение ячеек типов *хозьяин* и *раб*

Расчеты градиентов в центрах нестандартных граней осуществляются со вторым порядком точности посредством линейной интерполяции по трехточечному шаблону, образованному геометрическими центрами соседних граней, лежащих в плоскости рассматриваемой грани  $f$ :

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)_f = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)_{f,j},$$

где  $j$  — индекс суммирования граней шаблона;  $\alpha_j$  — коэффициенты интерполяции;  $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)_{f,j}$  — градиенты в геометрических центрах граней шаблона.

При пространственной дискретизации вязких напряжений и тепловых потоков на стенке, а также градиентов давления на границе с заданным давлением используется единый шаблон. Градиент скалярной величины  $\Phi$  в центре граничной грани  $b$  вдоль внешней нормали  $\mathbf{n}$  со вторым порядком точности записывается следующим образом:

$$\left((\text{grad } \Phi) \cdot \mathbf{n}\right)_b = \sum_{i=1}^3 \left[ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)_c + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j}\right)_c (x_{b,j} - x_{c,j}) \right] n_i.$$

Здесь  $i, j$  — индексы декартовых координат; индекс  $c$  обозначает приписанную к граничной грани расчетную ячейку. Чтобы сохранить второй порядок точности, достаточно аппроксимировать  $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)_c$  со вторым порядком точности, а  $\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j}\right)_c$  — с первым порядком.

### 3. Интегрирование уравнений сохранения по времени

При интегрировании уравнений сохранения по времени используется неявная схема второго порядка точности Кима—Чоя [11]. Зависимости коэффициентов динамической вязкости  $\mu$  и числа Прандтля  $\text{Pr}$  теплоносителя от давления и удельной энтальпии рассчитываются по явной схеме. Изменение плотности теплоносителя  $\rho$  за шаг интегрирования  $\Delta t$  учитывается итерационно. Теплофизические свойства воды определяются с использованием функций кода КОРСАР/ГПП.

На каждом итерационном цикле сначала из уравнения сохранения количества движения, записанного по схеме Кранка—Николсона, для каждой ячейки рассчитывается поле вектора предварительной скорости  $\hat{\mathbf{u}}$  ( $\hat{u}_i$  — компоненты вектора) по известным полям давления с предыдущего временного

няется соответствующей ей ячейкой *хозьяин*. Аналогичная процедура осуществляется для каждой граничной грани.

При вычислении конвективно переносимой величины  $\Phi_f$  на нестандартной грани со вторым порядком точности используется разложение в ряд Тейлора:

$$\Phi_f = \Phi_c + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)_c (x_{f,i} - x_{c,i}),$$

где  $c$  — приписанная грани ячейка, определяемая по схеме против потока;  $i$  — индексы декартовых координат;  $x_{f,i}, x_{c,i}$  — координаты центров грани и приписанной ячейки соответственно. Производные  $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)_c$  достаточно рассчитать с первым порядком точности.

слоя и плотности с предыдущей итерации:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\rho \hat{u}_i - \rho^n u_i^n}{\Delta t} dV + \frac{1}{2} \int_S (\hat{u}_i \hat{U} + u_i^n U^n) dS + \\ + \int_V (\text{grad } P)_i^n dV - \frac{1}{2} \int_S \mu^n (\text{grad } \hat{u}_i + \text{grad } u_i^n) \mathbf{n} dS - \int_V \rho g_i dV = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В уравнении (1)  $V$ ,  $S$  — объем и поверхность контрольного объема;  $\mathbf{n}$  — вектор внешней к контрольному объему нормали;  $U$  — нормальная массовая скорость в центрах граней ячеек;  $g_i$  — компоненты вектора ускорения свободного падения; верхний индекс  $n$  относится к предыдущему временному слою. Следует отметить, что  $U^n$  — поле массовой скорости, удовлетворяющее уравнению сохранения массы, а  $\hat{U} = \rho \hat{\mathbf{u}} \mathbf{n}$ . Здесь и далее запись  $\rho \hat{\mathbf{u}} \mathbf{n}$  обозначает вычисление нормальной массовой скорости на гранях с помощью линейной интерполяции по значениям компонент вектора скорости  $\mathbf{u}$  и плотности  $\rho$  в узлах ячеек.

Конвективный член  $\hat{u}_i \hat{U}$  линеаризуется со вторым порядком точности:

$$\begin{aligned} \hat{u}_i \hat{U} &= \left[ u_i^n + (\hat{u}_i - u_i^n) \right] \left[ U^n + (\hat{U} - U^n) \right] = \\ &= u_i^n U^n + u_i^n (\hat{U} - U^n) + (\hat{u}_i - u_i^n) U^n + (\hat{u}_i - u_i^n) (\hat{U} - U^n) = \\ &= \hat{u}_i U^n + u_i^n \hat{U} - u_i^n U^n + O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

Тогда уравнение (1) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\rho \hat{u}_i - \rho^n u_i^n}{\Delta t} dV + \frac{1}{2} \int_S (\hat{u}_i U^n + u_i^n \delta \hat{U} + u_i^n U^n) dS + \\ + \int_V (\text{grad } P)_i^n dV - \frac{1}{2} \int_S \mu^n (\text{grad } \hat{u}_i + \text{grad } u_i^n) \mathbf{n} dS - \int_V \rho g_i dV = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

в котором  $\delta \hat{U} = \hat{U} - \rho^n \mathbf{u}^n \mathbf{n}$ .

Далее предварительные значения компонент скорости модифицируются:

$$u_i^* = \hat{u}_i + \frac{\Delta t}{\rho} (\text{grad } P)_i^n.$$

Затем поле массовой скорости корректируется из условия неразрывности потока:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S U dS = 0, \quad (3)$$

где

$$U = \hat{U} - \Delta t (\text{grad } P) \mathbf{n} = \hat{U} - \Delta t \frac{\partial P}{\partial n}, \quad (4)$$

значения  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  берутся с предыдущей итерации,  $\hat{U} = \rho \hat{\mathbf{u}} \mathbf{n}$ .

Из соотношений (3), (4) получается интегральная форма уравнения Пуассона для давления:

$$\int_S \frac{\partial P}{\partial n} dS = \frac{1}{\Delta t} \left( \int_S \hat{U} dS + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \right). \quad (5)$$

После решения уравнения (5) определяется поле  $U$  по соотношению (4).

На последнем этапе итерационного цикла находятся поля удельной энтальпии и плотности в узлах ячеек из совместного решения уравнения сохранения энергии

$$\int_V \frac{\rho h - \rho^n h^n}{\Delta t} dV + \frac{1}{2} \int_S U (h + h^n) dS - \frac{1}{2} \int_S \frac{\mu^n}{\text{Pr}^n} (\text{grad } h + \text{grad } h^n) \mathbf{n} dS = 0 \quad (6)$$

и уравнения состояния теплоносителя

$$\rho = \rho(P, h).$$

Если для всех контрольных объемов выполняется условие  $\frac{1}{\rho} \left| \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^{new} - \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^{old} \right| < \varepsilon$ , в котором  $\varepsilon$  — заданная погрешность, итерации заканчиваются и полагается  $U^{n+1} = U$ ,  $P^{n+1} = P$ ,  $h^{n+1} = h$ , где индекс  $n + 1$  обозначает новый временной слой, а также вычисляется поле скорости на новом временном слое:

$$u_i^{n+1} = u_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} (\text{grad } P^{n+1})_i.$$

В противном случае выполняется новый итерационный цикл. Очевидно, что при постоянной плотности теплоносителя достаточно провести один итерационный цикл.

Уравнения сохранения количества движения (2), энергии (6) являются линейными. Однако использование нелинейной схемы SDPUS-C1 при аппроксимации конвективных членов превращает их в нелинейные дискретные аналоги. То есть для нахождения распределения какой-либо величины  $\Phi$  по расчетным ячейкам необходимо решить нелинейную систему конечно-разностных уравнений. При решении системы применяется итерационный метод Якоби в сочетании с методом линеаризации Ньютона. Диагональные элементы матрицы содержат коэффициенты, характеризующие вклад нестационарного члена, а также диффузионных и конвективных потоков на гранях расчетной ячейки. Для усиления диагонального преобладания в элементы включаются только положительные коэффициенты.

#### 4. Многосеточный метод

Для ускорения сходимости при итерационном решении системы конечно-разностных уравнений Пуассона для давления используется многосеточный метод. Эффективность реализации многосеточного метода во многом определяется:

- алгоритмом построения иерархии сеток;
- выбором операторов перехода с мелкой сетки на грубую (оператор ограничения) и с грубой сетки на мелкую (оператор пролонгации);
- выбором релаксационной процедуры для погашения высокочастотных составляющих невязки решения.

Реализован наиболее простой и распространенный алгоритм построения сеток различного уровня дробления для многосеточного метода в формате хранения данных FTT [5, 7, 9]. Уровню дробления сетки  $ng$  соответствуют ячейки, удовлетворяющие одному из двух условий:

- уровень дробления ячейки равен  $ng$ ;
- ячейка является листовой с уровнем дробления меньше  $ng$ .

Пример такой иерархии сеток приведен на рис. 5.

Оператор ограничения  $R$  для нелистовых ячеек грубой сетки имеет следующий вид (для листовой ячейки оператор ограничения является тривиальным:  $R(\Phi) = \Phi$ ):

$$R(\Phi) = \frac{\sum \varphi_j \Phi_j}{\sum \varphi_j}. \quad (7)$$

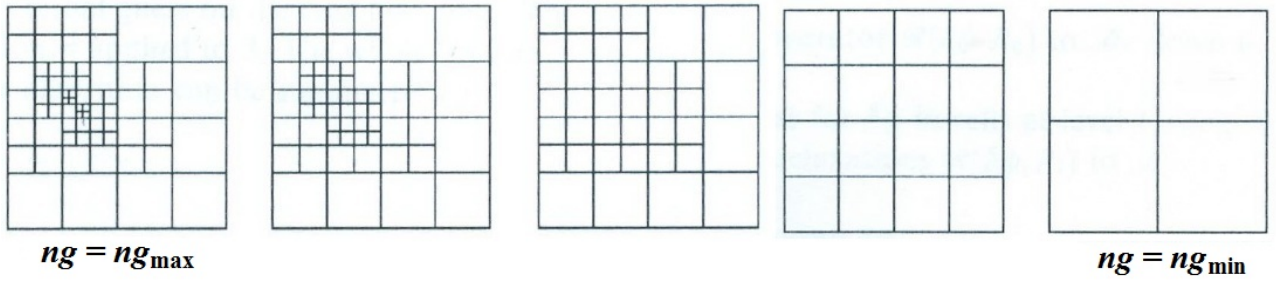


Рис. 5. Иерархия сеток для многосеточного метода

В соотношении (7) суммирование производится по восьми детским ячейкам мелкой сетки;  $\varphi_j$  — объемная доля жидкости в детских ячейках. Если ячейка внутренняя, то  $\varphi_j = 1$ ; если ячейка расположена за границей области моделирования, то  $\varphi_j = 0$ . В ситуации, когда детская ячейка  $j$  принадлежит типу *раб*, значение  $\Phi_j$  берется из приписанной ей ячейки типа *хозяин*.

Значения операторов ограничения для граничных ячеек грубой сетки типа *раб* используются для модификации операторов ограничения применительно к ячейкам типа *хозяин*, объединенных с данными ячейками типа *раб*:

$$R_{united}(\Phi) = \frac{\varphi_{master} R_{master}(\Phi) + \sum \varphi_{slave} R_{slave}(\Phi)}{\varphi_{master} + \sum \varphi_{slave}},$$

где  $\varphi$  — объемная доля жидкости в ячейках грубой сетки.

Простейшим выбором для оператора пролонгации является инжекция, когда величинам на мелкой сетке приписываются значения из соответствующих родительских ячеек. Если родительская ячейка относится к типу *раб*, то при инжекции берется значение из приписанной ей ячейки типа *хозяин*. Несмотря на первый порядок точности, такой вид оператора пролонгации успешно применяется, например, в коде GERRIS [5]. Однако для ускорения сходимости следует использовать билинейную интерполяцию второго порядка точности [9]. Билинейная интерполяция осуществляется по значениям в восьми ячейках грубой сетки окта, которому принадлежит родительская ячейка ячейки мелкой сетки. В CFD-модуле кода КОРСАР/CFD оператор пролонгации базируется на билинейной интерполяции. Инжекция применяется только в ситуациях, когда какая-либо из восьми ячеек шаблона находится за границей расчетной области либо относится к типу *раб*.

В качестве релаксационной процедуры используется метод Якоби. Причем релаксационная процедура производится в  $V$ -цикле только при переходе с грубых сеток на мелкие. В этом случае отсутствует необходимость хранения в листовых ячейках нескольких приближенных решений, относящихся к разным уровням дробления.

В целом  $V$ -цикл для решения линейного дифференциального уравнения  $L\Phi = \mathbf{f}$ , где  $L$  — дифференциальный оператор;  $\Phi$  — вектор неизвестных;  $\mathbf{f}$  — вектор правой части, состоит из следующих действий [5]. Вычисляется невязка решения на исходной мелкой сетке  $ng_{max}$ :

$$\mathbf{r}_{ng_{max}} = (\mathbf{f} - L\Phi)_{ng_{max}}.$$

Если  $\|\mathbf{r}_{ng_{max}}\| > \varepsilon$  ( $\varepsilon$  — заданная погрешность), то выполняется  $V$ -цикл. Последовательным использованием операторов ограничения невязка переводится на самый грубый уровень  $ng = ng_{min}$ , на котором решается уравнение

$$L_{ng_{min}}(\delta\Phi_{ng_{min}}) = \mathbf{r}_{ng_{min}},$$

где  $\delta\Phi_{ng_{min}}$  — коррекция решения на уровне  $ng = ng_{min}$ .

Далее выполняется последовательный переход на более высокий уровень сеток. При этом на каждом уровне  $ng$  принимается начальное приближение коррекции  $\delta\Phi_{ng}$ , полученное по значению  $\delta\Phi_{ng-1}$  с помощью оператора пролонгации. После этого применяется несколько релаксационных итераций. На исходном уровне сеток вычисляется новое значение переменной

$$\Phi_{ng_{max}} = \Phi_{ng_{max}} + \delta\Phi_{ng_{max}},$$



а по нему — новое значение невязки  $\mathbf{r}_{ng_{\max}}$ .

Следует отметить, что в иерархической структуре данных ФТТ хранится вся необходимая информация о сетках на всех уровнях дробления многосеточного метода.

## 5. Моделирование ламинарной дорожки Кармана

Рассматриваемая задача является классической для тестирования численных алгоритмов CFD-модулей как дискретизации уравнений сохранения по пространству, так и их интегрирования по времени.

Моделируется двумерное ламинарное обтекание круглого цилиндра диаметром  $d$  поперечным однородным потоком несжимаемой жидкости со скоростью  $U_\infty$  при  $Re = U_\infty d/\nu = 100$ . При  $Re > 50$  реализуется нестационарное обтекание цилиндра, когда в верхней и нижней частях кормовой области происходит в противофазе формирование и отрыв вихрей (дорожка Кармана). Для  $Re = 100$  получено достаточное количество расчетных и экспериментальных данных [9, 12, 13].

Задача решалась в трехмерной постановке в безразмерном виде. Ось  $x$  декартовой системы координат направлена вдоль потока,  $y$  — вдоль цилиндра,  $z$  — поперек цилиндра. Начало координат расположено в центре оси цилиндра. Цилиндр помещен в параллелепипед размером  $30 \times 2,5 \times 20$ . Ось цилиндра расположена в центральном сечении  $xy$  на расстоянии 10 и 20 соответственно от входной и выходной границ по оси  $x$ . На входной границе задавалось равномерное поле набегающего потока, на выходной границе — давление. По направлению оси  $y$  использовались периодические граничные условия, а границы по оси  $z$  принимались свободными.

Генерация расчетной сетки осуществлялась на основе базовой сетки  $36 \times 2 \times 24$  с максимальным и минимальным уровнями дробления, равными 7 и 3 соответственно. Сетка измельчалась в прилегающей к цилиндру области течения (размер минимальных ячеек  $0,0130 \times 0,0195 \times 0,0130$ ). Общее количество листовых ячеек составляло около 1 млн.

Для ускорения процесса выхода на устойчивый колебательный режим задавалось асимметричное по координате  $z$  начальное поле компоненты скорости жидкости по координате  $x$ :  $u = 1 + 0,02z$ .

Интегральными характеристиками силового взаимодействия потока с цилиндром являются коэффициент давления  $C_P$ , коэффициент трения  $C_F$ , коэффициент подъемной силы  $C_L$ . Динамика процесса формирования и отрыва вихрей характеризуется числом Струхала  $St = 1/T$ , где  $T$  — безразмерный период колебаний коэффициента подъемной силы  $C_L$ .

На рис. 6 показана эволюция коэффициентов сопротивления  $C_D = C_P + C_F$  и подъемной силы  $C_L$ , рассчитанных по CFD-модулю кода КОРСАР при шаге интегрирования по времени 0,02. Из

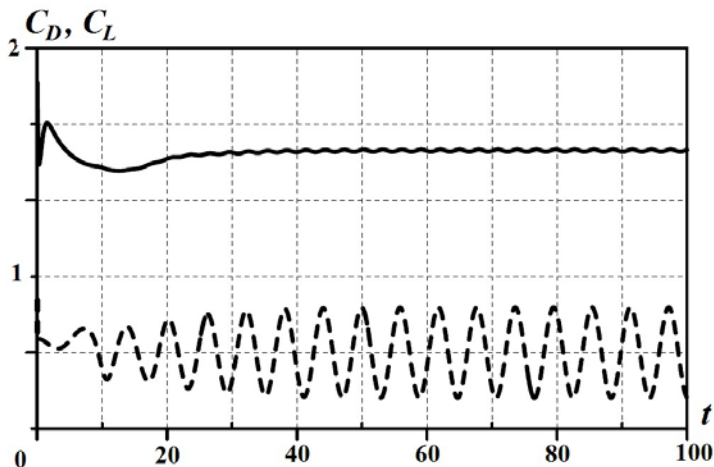


Рис. 6. Расчетные зависимости коэффициентов сопротивления (—) и подъемной силы (---) от времени ( $Re = 100$ )

рисунка видно, что устойчивый колебательный режим реализуется после достижения безразмерным временем значения 30.

В таблице приведено сопоставление результатов расчета с имеющимися данными по интегральным параметрам. Получено хорошее согласование по всем параметрам с экспериментальными данными [13]. Расчет с уменьшенными в два раза шагами интегрирования по времени и пространству показал те же результаты.

Разброс расчетных данных обусловлен, вероятно, различием размеров области моделирования. Так, дополнительный расчет по CFD-модулю при расположении входной границы на рас-

Сопоставление результатов расчета с данными [9, 12, 13]

Источник	$C_D$	$C_P$	$C_F$	$\max C_L$	St
КОРСАР/CFD	1,33	1,03	0,30	0,30	0,169
Lai and Peskin [12]	1,447	—	—	—	0,165
Tseng and Ferziger [12]	1,42	—	—	—	0,164
Dias and Majumdar [12]	1,395	—	—	—	0,171
Chung [9]	1,392	—	—	—	0,172
Hartmann et al. [9]	1,358	—	—	0,334	0,164
Kim et al. [9]	1,33	—	—	0,32	0,165
De Palma et al. [9]	1,32	—	—	0,331	0,163
Kravchenko et al. [13]	1,31	0,97	0,34	0,314	0,164
Эксперимент [13]	1,3	1,0	0,3	—	0,165
Verstappen and Dröge [13]	1,24	0,93	0,31	0,30	0,165

стоянии 5 от оси цилиндра показал следующие результаты:  $C_D = 1,42$ ;  $C_P = 1,11$ ;  $C_F = 0,31$ ;  $\max C_L = 0,30$ ;  $St = 0,177$ . Отличия от исходного расчета по  $C_D$  составляют 7%, по  $C_P$  — 8%, по  $St$  — 5%.

**Заключение**

Представлена численная реализация балансного метода вложенной границы на декартовых сетках трехмерной модели системного теплогидравлического кода КОРСАР/CFD, предназначенного для расчетного обоснования безопасности ВВЭР. При численной реализации применяется ряд предлагаемых в литературе современных алгоритмов. Информация о топологии расчетной сетки хранится в формате FTT (Fully Threaded Tree). Иерархическая структура данных FTT экономична по памяти и обеспечивает для каждой декартовой ячейки быстрый поиск соседних по граням ячеек. Дополнительно хранится вся необходимая информация о сетках на всех уровнях дробления многосеточного метода.

Интегрирование уравнений сохранения по времени производится по неявной схеме второго порядка точности Кима—Чоя. Дискретизация конвективных членов уравнений сохранения осуществляется по ограниченной непрерывно дифференцируемой схеме второго порядка точности SDPUS-C1, что значительно улучшает сходимость при итерационном решении. С целью повышения устойчивости вычислительной схемы используется алгоритм объединения граничных обрезанных ячеек малого объема с соседними крупными ячейками. Алгоритм обеспечивает гарантированное присоединение всех мелких ячеек с одновременной оптимизацией формы получающихся объединенных ячеек.

Используются также оригинальные алгоритмы. Для аппроксимации конвективных и диффузионных потоков на гранях декартовых ячеек, когда примыкающие к граням ячейки находятся на разных уровнях дробления, разработаны алгоритмы второго порядка точности с компактными шаблонами. В многосеточном методе для граничных ячеек при переводе невязки решения с мелкой сетки на грубую предложен оператор ограничения, учитывающий наличие объединенных ячеек *хозяин—рабы*.

Применимость численной реализации трехмерной модели подтверждена расчетами нестационарной тестовой задачи с поперечным обтеканием цилиндра однородным ламинарным потоком жидкости при числе Рейнольдса 100.

**Список литературы**

1. Программный комплекс КОРСАР/ГП. Аттестационный паспорт программного средства № 263 от 23.09.2009. Федеральная служба по экологическому, технологическому и атомному надзору.
2. Юдов Ю. В. Двухжидкостная модель нестационарной контурной теплогидравлики и ее численная реализация в расчетном коде КОРСАР // Теплоэнергетика. 2002. № 11. С. 17—21.

3. *Yudov Yu. V., Danilov I. G., Chepilko S. S.* Implementation of CFD module in the KORSAR thermal-hydraulic system code // Proc. 24th Symposium of Atomic Energy Research (AER). Russia, Sochi, 2014. P. 633–648.
4. *Mittal R., Iaccarino G.* Immersed boundary methods // Annu. Rev. Fluid Mech. 2005. Vol. 37. P. 239–261.
5. *Popinet S.* Gerris: a tree-based adaptive solver for incompressible Euler equations in complex geometries // J. Comp. Phys. 2003. Vol. 190. P. 572–600.
6. *Ji H., Lien F.-S., Yee E.* Numerical simulation of detonation using an adaptive Cartesian cut-cell method combined with a cell-merging technique // Computers & Fluids. 2010. Vol. 39. P. 1041–1057.
7. *Ji H., Lien F.-S., Yee E.* A robust and efficient cut-cell / ghost-cell method with adaptive mesh refinement for moving boundaries on irregular domains // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2008. Vol. 198. P. 432–448.
8. *Lima G. A. B., Ferreira V. G., Cirilo E. R., Castelo A., Candezano M. A. C., Tasso L. V. M., Sano D. M. C., Scalvi L. V. A.* A continuously differentiable upwinding scheme for the simulation of fluid flow problems // Appl. Math. and Comput. 2012. Vol. 218. P. 8614–8633.
9. *Hartmann D., Meinke M., Schröder W.* An adaptive multilevel multigrid formulation for Cartesian hierarchical grid methods // Computers & Fluids. 2008. Vol. 37. P. 1103–1125.
10. *Ye T., Mittal R., Udaykumar H., Shyy W.* An accurate Cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries // J. Comp. Phys. 1999. Vol. 156. P. 209–240.
11. *Kim D., Choi H.* A second-order time-accurate finite volume method for unsteady incompressible flow on hybrid unstructured grids // Ibid. 2000. Vol. 162. P. 411–428.
12. *Tseng Y-H., Ferziger J.* A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry // Ibid. 2003. Vol. 192. P. 593–623.
13. *Verstappen R., Dröge M.* A symmetry-preserving Cartesian grid method for computing a viscous flow past a circular cylinder // Comptes Rendus Mecanique. 2005. Vol. 333. P. 51–57.

Статья поступила в редакцию 18.04.18.

NUMERICAL IMPLEMENTATION OF A 3D THERMAL-HYDRAULIC MODEL USING THE IMMERSED BOUNDARY METHOD IN THE "KORSAR/CFD" COMPUTER CODE / Yu. V. Yudov, S. S. Chepilko, I. G. Danilov (FSUE FSUE "Alexandrov NITI", Sosnovy Bor, Leningrad region).

A numerical implementation of a CFD-module based on the immersed boundary method included in the KORSAR/CFD code using the semi-implicit scheme is described. The KORSAR/CFD code has been developed from the KORSAR/GP thermal-hydraulic system code used for the numerical safety analysis of VVER reactors. The CFD-module is intended for representing three-dimensional effects in the reactor lower plenum and used in spatial simulations of coupled thermal-hydraulic (in the sub-channel analysis approach) and neutronic processes in the reactor core during asymmetrical loop operation. Results of testing the method on the Karman vortex street problem, where a uniform laminar stream flows over a circular cylinder, are presented.

*Keywords:* CFD-module, immersed boundary method, multigrid method, Karman vortex street.

---