

## ЦИКЛОТРОННОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ, ОБЛАДАЮЩЕЙ АНИЗОТРОПНОЙ МАССОЙ

А. Е. Дубинов<sup>1,2</sup>, О. В. Сулова<sup>2</sup><sup>1</sup> ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.<sup>2</sup> Саровский физико-технический институт НИЯУ МИФИ, ул. Духова, 6, 607186, г. Саров Нижегородской обл.

Рассматривается классическая динамика заряженной точечной частицы, обладающей анизотропией массы, в однородном магнитном поле. Выведены новые общие формулы для циклотронной частоты для случаев недиагональных тензоров массы частицы.

*Ключевые слова:* циклотронный резонанс, магнитном поле, анизотропия массы, частота.

## 1. Введение

Метод циклотронного резонанса является одним из основных методов исследования поведения подвижных носителей заряда (электронов и дырок) в твердых телах, прежде всего в металлах и полупроводниках [1, 2], а затем и в низкоразмерных структурах. С помощью этого метода были обнаружены многие эффекты в твердых телах и открыты интересные свойства электронов и дырок в них, и в частности, что эффективная масса электрона может существенно отличаться от массы свободного электрона [3, 4]. Оказалось, что в некоторых случаях

– эффективная масса электрона и дырок может быть отрицательной [5];

– эффективная масса электрона может быть анизотропной, т. е. массе частицы приписываются свойства тензора [6, 7].

Форма пространственной анизотропии массы определяется геометрией изоэнергетической поверхности, которая может иметь весьма сложный вид [8]. Профиль изоэнергетической поверхности иногда удобно задавать математически с помощью некоторой функции в сферических координатах. Эту функцию можно разложить в ряд по сферическим функциям. Известно, что первый анизотропный член в этом разложении описывает эллипсоид массы [9].

Значения циклотронной частоты в случае эллипсоидально анизотропной электронной массы

зависят от взаимной ориентации эллипсоида массы и направления магнитного поля.

Для некоторых простых частных случаев ранее были получены точные формулы для циклотронных частот вращения частиц, обладающих эллипсоидной анизотропией массы. Так, в статье [10] выведена формула для циклотронной частоты  $\omega_c$ , анизотропия массы которой описывается эллипсоидом вращения с осями, совпадающими с осями декартовой системы координат, а магнитное поле  $B$  направлено под углом  $\theta$  к оси вращения эллипсоида.

$$\omega_c^2 = (qB)^2 \left[ \frac{\cos^2 \theta}{m_t^2} + \frac{\sin^2 \theta}{m_l m_l} \right], \quad (1)$$

где  $q$  – электрический заряд частицы,  $c$  – скорость света,  $m_t$  и  $m_l$  – поперечная и продольная компоненты эллипса массы.

Более простая формула выведена в [11] для 2D-мерного случая, когда магнитное поле перпендикулярно плоскости движения частицы:

$$\omega_c = \frac{(qB)}{\sqrt{m_x m_y}}. \quad (2)$$

Заметим, что (2) получается из (1) при  $\theta = \pi/2$ .

И еще одна формула для 3D-мерного случая получена в [12], для эллипсоида массы, оси которого ориентированы вдоль осей декартовой системы координат:

$$\omega_c = qB \sqrt{\frac{m_{xx}h_x^2 + m_{yy}h_y^2 + m_{zz}h_z^2}{m_{xx}m_{yy}m_{zz}}}, \quad (3)$$

где  $h_i$  – направляющие косинусы вектора магнитного поля.

Во всех перечисленных статьях тензор массы выбирался в виде матриц с нулевыми недиагональными элементами, что соответствует специальному случаю, когда оси координатной системы параллельны осям эллипсоида массы.

В указанной работе [12] были найдены также формы траекторий частицы, которые оказались эллипсами с осями, параллельными осям координат.

Целью данной работы являлось: получение и анализ общих формул для циклотронных частот частиц, тензоры массы которых выражены в виде произвольной матрицы с ненулевыми недиагональными элементами, что соответствует произвольной ориентации эллипсоида массы относительно осей координат.

## 2. Общие положения

### 2.1. Уравнение движения

Будем изучать движение классической нерелятивистской точечной частицы с электрическим зарядом  $q$  в однородном магнитном поле  $\mathbf{V}$  под действием силы Лоренца путем анализа предложенного в [10–12] для подобных задач уравнения движения:

$$\mathbf{M}\mathbf{a} = q[\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad (4)$$

где  $\mathbf{M}$  – тензор массы частицы,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{v}$  – векторы ускорения и скорости частицы.

### 2.2. Тензоры массы частицы

Будем считать, что тензор массы частицы представляет собой квадратную матрицу  $2 \times 2$  с действительными элементами  $m_{ij}$  в 2D геометрии или матрицу  $3 \times 3$  с действительными элементами  $m_{ij}$  – в 3D геометрии:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{xx} & m_{xy} \\ m_{yx} & m_{yy} \end{pmatrix} \text{ или } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{yx} & m_{yy} & m_{yz} \\ m_{zx} & m_{zy} & m_{zz} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Ограничимся рассмотрением случаев, когда матрица  $\mathbf{M}$  имеет действительные элементы и собственные значения, так как предпосылки рассмот-

рения комплексно-значной массы частицы пока отсутствуют. Известно, что если  $\mathbf{M}$  эрмитова, то ее собственные значения обязательно действительные [13].

Следует отметить, что недиагональные элементы тензора массы частицы есть величины, которые зависят от смешанных частных производных некоторой функции, выражающей закон дисперсии частицы. В математике существует теорема, что если функция достаточно гладкая, то величина смешанной производной не зависит от порядка дифференцирования. Из этого следует, что матрица  $\mathbf{M}$  обязательно должна быть симметричной, а симметричная матрица с действительными элементами является эрмитовой.

Итак, рассмотрим только такие  $\mathbf{M}$ , которые имеют действительные элементы и симметричны.

## 3. 2D задача

### 3.1. Геометрия движения

Рассмотрим частицу с зарядом  $q$  и массой  $\mathbf{M}$ , движущуюся в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю  $\mathbf{V}$  (рис. 1). Для этого будем считать, что начальная скорость частицы лежит в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{V}$ . Наложим ортогональную систему координат  $0xuz$  так, чтобы ось  $0z$  была параллельна  $\mathbf{V}$ . Тогда сила  $\mathbf{F}$ , действующая на движущуюся частицу, есть сила Лоренца  $\mathbf{F} = q[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ .

### 3.2. Частица со скалярной массой

В этом разделе определим циклотронную частоту, ларморовский радиус и форму траектории движения заряженной частицы, имеющей массу в виде скаляра  $m$ . С этой целью перепишем уравнение движения (4) в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = qv_y B; \\ m\dot{v}_y = -qv_x B; \\ m\dot{v}_z = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Будем искать решение системы уравнений (6) в виде:

$$\begin{cases} v_x = v_{x0} \exp(i\omega t); \\ v_y = v_{y0} \exp(i\omega t). \end{cases} \quad (7)$$

Подставим (3) в (6) и получим однородную систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} i\omega v_{x0} - \frac{qB}{m} v_{y0} = 0; \\ \frac{qB}{m} v_{x0} + i\omega v_{y0} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Из алгебры известно, что однородная система линейных уравнений имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} i\omega & -\frac{qB}{m} \\ \frac{qB}{m} & i\omega \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Соотношение (9) дает квадратное уравнение, корни которого

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{qB}{m}, \quad (10)$$

один из них дает значение циклотронной частоты для частицы со скалярной массы, а другой следует отбросить.

Мы специально привели подробно этот хорошо известный вывод формулы для циклотронной частоты, чтобы обратить внимание на появление множественности решений.

Здесь отбросить ложный корень удастся сравнительно легко, однако в более сложных ситуациях, рассмотренных далее, для селекции корней необходимо проводить специальное исследование.

Итак, для выделения ложного корня выберем для положительной циклотронной частоты направление вращения по часовой стрелке, как показано на рис. 1. Тогда

$$\omega_c = \frac{qB}{m}, \quad (11)$$

а корень (10) со знаком минус следует отбросить. Если изменить знак электрического заряда или знак массы, то направление вращения изменится на противоположное. Но одновременное изменение знака заряда и массы не изменяет направления вращения.

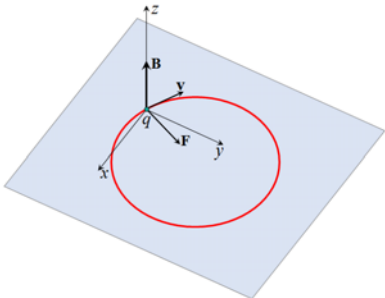


Рис. 1. 2D геометрия движения частицы в магнитном поле

Соответственно, для отрицательного корня направление будет против часовой стрелки, но в данном случае мы не рассматриваем этот корень. Решив систему уравнений (6) при начальных условиях

$$x(0) = x_0; \quad y(0) = y_0; \quad v_x(0) = v_{x0}; \quad v_y(0) = v_{y0}, \quad (12)$$

получим:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{v_{x0}}{\omega_c} \sin \omega_c t + \frac{v_{y0}}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t); \\ y(t) = y_0 + \frac{v_{y0}}{\omega_c} \sin \omega_c t + \frac{v_{x0}}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1), \end{cases} \quad (13)$$

где  $\omega_c$  – циклотронная частота из (11). Перенесем в левые части уравнений (13) слагаемые  $x_0$  и  $y_0$ , возведем в квадрат эти уравнения и сложим друг с другом. В итоге получим уравнение траектории частицы

$$\left( x - x_0 - \frac{v_{y0}}{\omega_c} \right)^2 + \left( y - y_0 - \frac{v_{x0}}{\omega_c} \right)^2 = \frac{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}{\omega_c^2}. \quad (14)$$

Уравнение (14) представляет собой уравнение окружности с центром в точке

$$\left( \left[ x_0 + \frac{v_{y0}}{\omega_c} \right], \left[ y_0 + \frac{v_{x0}}{\omega_c} \right] \right) \quad (15)$$

и радиусом Лармора

$$r_L = \frac{\sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}}{\omega_c}. \quad (16)$$

Таким образом, скалярная частица в однородном магнитном поле вращается по окружности радиусом (16) с частотой (11) (рис. 2).

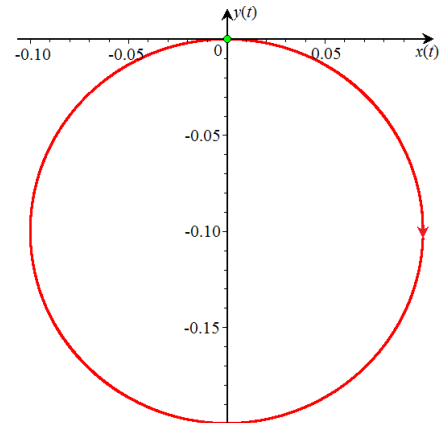


Рис. 2. Пример круговой траектории частицы со скалярной массой в магнитном поле (здесь и далее зеленой точкой помечено положение частицы в начале движения)

### 3.3. Частица с тензорной массой (случай диагональной матрицы $\mathbf{M}$ )

Пусть тензор массы точечной частицы описывается диагональной матрицей

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{xx} & 0 \\ 0 & m_{yy} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

В этом случае уравнение движения в координатных проекциях будет иметь вид

$$\begin{cases} m_{xx} \dot{v}_x = qBv_y; \\ m_{yy} \dot{v}_y = -qBv_x. \end{cases} \quad (18)$$

Будем искать решение системы (18) в виде (7). Тогда приходим к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} i\omega v_{x0} - \frac{qB}{m_{xx}} v_{y0} = 0; \\ \frac{qB}{m_{yy}} v_{x0} + i\omega v_{y0} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Система уравнений (19) имеет нетривиальные решения, когда определитель, составленный из ее коэффициентов, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} i\omega & -\frac{qB}{m_{xx}} \\ \frac{qB}{m_{yy}} & i\omega \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) сводится к квадратному уравнению. Один из его корней можно отбросить так же, как и при рассмотрении скалярного случая (п. 3.2). В итоге получим выражение для циклотронной частоты

$$\omega_c = \frac{qB}{\sqrt{m_{xx}m_{yy}}} = \frac{qB}{\sqrt{\det \mathbf{M}}}, \quad (21)$$

совпадающее с (2) из [11].

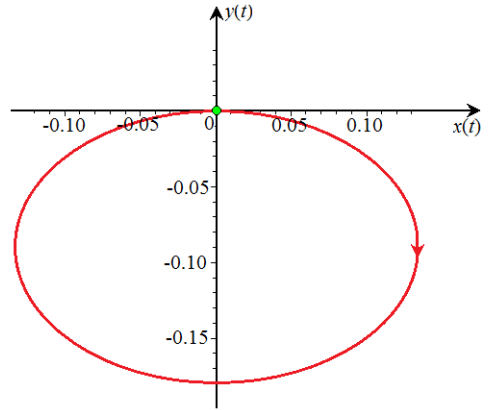
Решение системы уравнений (18) с начальными условиями (12) имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{v_{x0}}{\omega_c} \sin \omega_c t + \eta \frac{v_{y0}}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t); \\ y(t) = y_0 + \frac{v_{y0}}{\omega_c} \sin \omega_c t + \frac{1}{\eta} \frac{v_{x0}}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1), \end{cases} \quad (22)$$

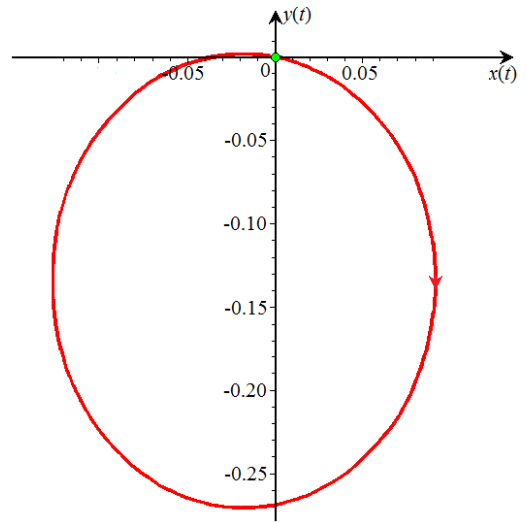
где обозначено  $\eta = \sqrt{m_{yy}/m_{xx}}$ .

Анализ (22) дает, что когда диагональные элементы матрицы  $\mathbf{M}$  имеют одинаковые знаки, уравнения (22) параметрически описывают эллипс

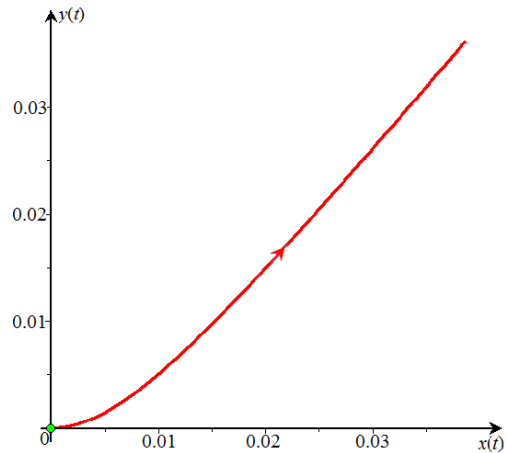
с полуосями, параллельными координатным осям  $0x$  и  $0y$  (рис. 3, а, б).



а



б



в

Рис. 3. Примеры траекторий частицы с тензорной массой диагонального типа в магнитном поле: эллиптическая траектория частицы, у которой оба диагональных элемента тензора масс положительные (а) и отрицательные (б); в – гиперболическая траектория частицы, у которой диагональные элементы тензора масс имеют разные знаки

Легко найти длины полуосей этого эллипса

$$r_x = \frac{\sqrt{v_{x0}^2 + \eta^2 v_{y0}^2}}{\omega_c} \quad \text{и} \quad r_y = \frac{\sqrt{v_{x0}^2 + \eta^2 v_{y0}^2}}{\eta \omega_c}, \quad (23)$$

которые являются обобщениями ларморовского радиуса (16).

Если же диагональные элементы матрицы  $\mathbf{M}$  имеют разные знаки, то траектория частицы гиперболически инфинитна (рис. 3,в). Это означает, что частица, если она окажется в среде, в которой ее эффективная масса описывается диагональной матрицей с элементами разных знаков, сразу же покидает эту среду. Следовательно, подобная среда, помещенная в магнитное поле, не должна стационарно содержать свободных заряженных частиц.

### 3.3. Частица с тензорной массой (случай недиагональной эрмитовой матрицы $\mathbf{M}$ )

Рассмотрим частицу, имеющую тензор массы в виде матрицы с равными ненулевыми диагональными элементами:  $m_{xy} = m_{yx} \neq 0$ . Уравнение ее движения в проекциях на оси координат можно записать в виде:

$$\begin{cases} m_{xx} \dot{v}_x + m_{xy} \dot{v}_y = qBv_y; \\ m_{yx} \dot{v}_x + m_{yy} \dot{v}_y = -qBv_x. \end{cases} \quad (24)$$

После подстановки в него (7) опять приходим к системе линейных алгебраических уравнений. Условие ее разрешимости есть уравнение

$$\begin{vmatrix} i\omega m_{xx} & i\omega m_{xy} - qB \\ i\omega m_{yx} + qB & i\omega m_{yy} \end{vmatrix} = 0. \quad (25)$$

Формула для циклотронной частоты есть корень уравнения (25). Она совпадает с (21):

$$\omega_c = \frac{qB}{\sqrt{\det \mathbf{M}}}, \quad (26)$$

но здесь  $\det \mathbf{M} = m_{xx}m_{yy} - m_{xy}m_{yx}$ .

В случае, когда собственные значения матрицы  $\mathbf{M}$  имеют одинаковые знаки, траектория частицы – эллипс, повернутый относительно осей координат на некоторый угол (рис. 4). Если же знаки собственных значений  $\mathbf{M}$  различны, то циклотронная частота становится мнимой, а траектория частицы инфинитна.

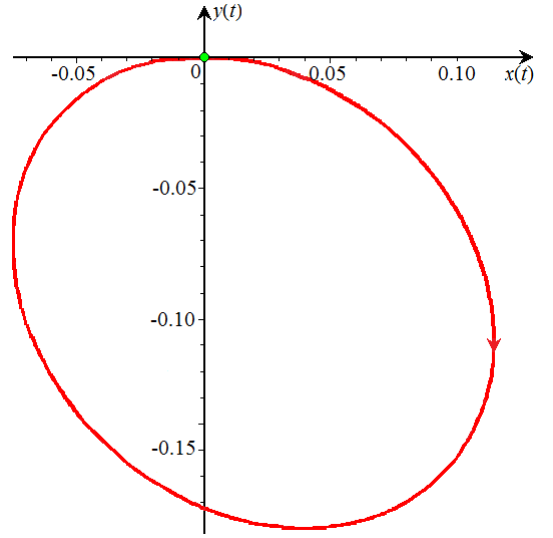


Рис. 4. Пример эллиптической траектории частицы с тензорной массой эрмитового типа в магнитном поле

## 4. 3D задача

### 4.1. Геометрия движения

Рассмотрим частицу с зарядом  $q$  и массой  $\mathbf{M}$ , движущуюся в трехмерной декартовой системе координат и в однородном магнитном поле  $\mathbf{B}$ , вектор

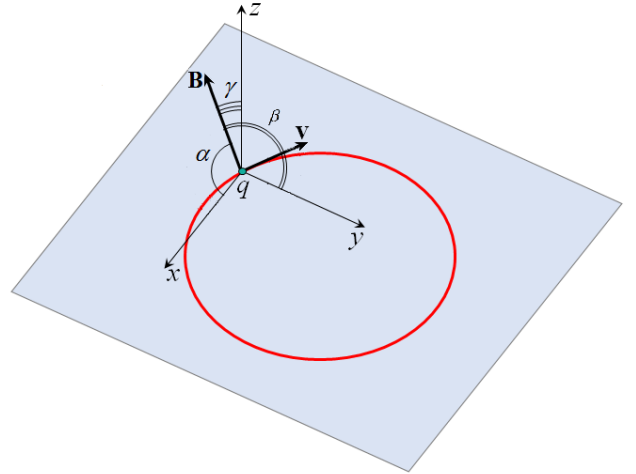


Рис. 5. 3D геометрия движения частицы в магнитном поле

индукции которого имеет направляющие косинусы  $h_{x,y,z}$  с углами  $\alpha, \beta, \gamma$  (рис. 5):

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \cos \alpha \\ B \cos \beta \\ B \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (27)$$

#### 4.2. Частица с тензорной массой (случай недиагональной эрмитовой матрицы $\mathbf{M}$ )

Уравнение движения (4) можно переписать в проекциях на оси координат

$$\begin{cases} m_{xx}\dot{v}_x + m_{xy}\dot{v}_y + m_{xz}\dot{v}_z = q(-B_y v_z + B_z v_y); \\ m_{yx}\dot{v}_x + m_{yy}\dot{v}_y + m_{yz}\dot{v}_z = q(B_x v_z - B_z v_x); \\ m_{zx}\dot{v}_x + m_{zy}\dot{v}_y + m_{zz}\dot{v}_z = q(B_x v_y - B_y v_x). \end{cases} \quad (28)$$

Будем искать решение системы уравнений (28) в виде:

$$\begin{cases} v_x = v_{x0} \exp(i\omega t); \\ v_y = v_{y0} \exp(i\omega t); \\ v_z = v_{z0} \exp(i\omega t). \end{cases} \quad (29)$$

После подстановки (29) в (28) получим систему линейных алгебраических уравнений, аналогичную (8). Условие ее разрешимости

$$\begin{vmatrix} i\omega m_{xx} & i\omega m_{xy} - qB_z & i\omega m_{xz} + qB_y \\ i\omega m_{yx} + qB_z & i\omega m_{yy} & i\omega m_{yz} - qB_x \\ i\omega m_{zx} - qB_y & i\omega m_{zy} + qB_x & i\omega m_{zz} \end{vmatrix} = 0. \quad (30)$$

Это уравнение является кубическим

$$a_0\omega^3 + a_1\omega^2 + a_2\omega + a_3 = 0 \quad (31)$$

с коэффициентами

$$a_0 = -i(m_{xx}m_{yy}m_{zz} - m_{xx}m_{yz}m_{zy} - m_{xy}m_{yx}m_{zz} - m_{xz}m_{zx}m_{yy} + m_{xy}m_{yz}m_{xz} + m_{yz}m_{zy}m_{zx}); \quad (32)$$

$$a_1 = qB \left[ (m_{xx}m_{yz} - m_{xx}m_{zy} + m_{xy}m_{zx} - m_{xz}m_{yx})h_x + (m_{yy}m_{zx} - m_{yy}m_{xz} + m_{xy}m_{yz} - m_{yx}m_{zy})h_y + (m_{zz}m_{xy} - m_{zz}m_{yx} + m_{yz}m_{zx} - m_{xz}m_{zy})h_z \right]; \quad (33)$$

$$a_2 = iq^2 B^2 \left[ (m_{xx}h_x^2 + m_{yy}h_y^2 + m_{zz}h_z^2) + (m_{xy} + m_{yx})h_x h_y + (m_{yz} + m_{zy})h_y h_z + (m_{zx} + m_{xz})h_x h_z \right]; \quad (34)$$

$$a_3 = 0. \quad (35)$$

Наличие нулевого свободного члена (35) в кубическом уравнении (31) упрощает задачу тем, что сразу дает один тривиальный корень  $\omega_1 = 0$  и сво-

дит уравнение к квадратному. Два других корня имеют вид:

$$\omega_{2,3} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}. \quad (36)$$

Приведем точные значения для случая эрмитовой матрицы  $\mathbf{M}$  ( $m_{xy} = m_{yx}$ ,  $m_{xz} = m_{zx}$ ,  $m_{yz} = m_{zy}$ ):

$$\omega_{2,3} = \pm qB \sqrt{\frac{(h_x^2 m_{xx} + h_y^2 m_{yy} + h_z^2 m_{zz}) + 2(h_x h_y m_{yx} + h_y h_z m_{zy} + h_z h_x m_{zx})}{\det(\mathbf{M})}}. \quad (37)$$

Анализ показал, что для циклотронной частоты необходимо выбирать в (37) выражение с плюсом. Легко видеть, что для диагональной матрицы  $\mathbf{M}$  выражение (37) переходит в (3) из [12].

Траектория частицы в случае, когда подкоренное выражение в (37) положительное, – винтовая линия, намотанная на эллиптический цилиндр (рис. 6).

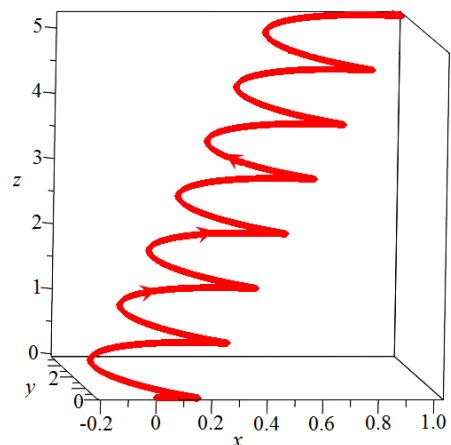


Рис. 6. Пример траектории частицы в форме винтовой линии, намотанной на эллиптический цилиндр

## 5. Выводы

Таким образом, в работе рассмотрена классическая динамика заряженных точечных частиц, обладающих анизотропией массы, в однородном магнитном поле. В результате анализа выведены новые общие формулы для циклотронной частоты для случая недиагонального тензора массы частицы. Новые формулы могут быть полезны для анализа экспериментальных данных по измерению компонентов тензора массы носителей в полупроводниковых структурах.

### Список литературы

1. Lax B., Mavroides J. G. Cyclotron resonance // *Solid State Phys.* 1960. Vol. 11. P. 261–400.
2. Kip A. F. Cyclotron resonance in solids // *Contemp. Phys.* 1960. Vol. 1. P. 355–369.
3. Dresselhaus G., Kip A. F., Kittel C. Cyclotron resonance of electrons and holes in silicon and germanium crystals // *Phys. Rev.* 1955. Vol. 98. P. 368–384.
4. Nag B. R., Mukhopadhyay S. Cyclotron resonance effective mass in narrow quantum wells // *Phys. Lett.* 1992. Vol. A 166. P. 395–398.
5. Krömer H. Proposed negative-mass microwave amplifier // *Phys. Rev.* 1958. Vol. 109. P. 1856.
6. Herrmann R., Edelman V. S. Cyclotron resonance in tungsten // *Sov. Phys. JETP.* 1968. Vol. 26. P. 901–905.
7. Yakushev M. V., Luckert F., Rodina A. V., Faugeras C., Karotki A. V., Mudryi A. V., Martin R. W. Anisotropy of effective masses in  $\text{CuInSe}_2$  // *Appl. Phys. Lett.* 2012. Vol. 101. P. 262101-1–5.
8. Shoenberg D. *Magnetic oscillations in metals.* Cambridge Univ. Press, 1984.
9. Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г. *Физика полупроводников.* М.: Наука, 1977.
10. Dresselhaus G., Kip A. F., Kittel C. Cyclotron resonance of electrons and holes in silicon and germanium crystals // *Phys. Rev.* 1955. Vol. 98. P. 368–383.
11. Ciftja O., Livingston V., Thomas E. Cyclotron motion of a charged particle with anisotropic mass // *Amer. J. Phys.* 2017. Vol. 85. P. 359–363.
12. Меркулов И. А., Иванов М. Г. Динамика частицы с анизотропной массой // *Окно в микромир.* 2002. Вып. 1. С. 12–16.
13. Horn R. A., Johnson C. R. *Matrix Analysis.* Cambridge Univ. Press, 1985.

Статья поступила в редакцию 11.12.2018