использована при расчетном моделировании процессов разрушения и компактирования, в частности, в диапазоне нагрузок, характерных для аварийных ситуаций эксплуатации конструкций.

Список литературы

1. Игнатова О.Н., Раевский В.А., Целиков И.С. Кинетическая модель разрушения и компактирования поврежденности в средах с прочностью // ВАНТ, сер. Математическое моделирование физических процессов.– 2014.- Вып.1.- С.18-23.
2. Carrol M.M., Holt A.C. Static and dynamic pore-collapse relations for ductile porous materials//J.Appl.Phys.1972.Vol.43,№4.
3. Гаврилов Н.Ф., Иванова Г.Г., Селин В.И., Софронов В.Н. Программа УП-ОК для решения одномерных задач механики сплошной среды в одномерном комплексе // ВАНТ- 1982.- Вып.3(11). - С.11-14.
4. Глушак Б.Л., Гударенко Л.Ф., Стяжкин Ю.М., Жеребцов В.А. Полуэмпирическое уравнение состояния металлов с переменной электронной теплоемкостью// ВАНТ, сер. Математическое моделирование физических процессов. 1991г. Вып.1. С.32-37.
5. Глушак Б.Л., Игнатова О.Н., Надежин С.С., Раевский В.А. Релаксационная модель сдвиговой прочности пяти металлов // ВАНТ, сер. Математическое моделирование физических процессов. 2012.Вып.2. С.25-36.
6. Разоренов С.В., Зарецкий Е.В., Савиных А.С. Прочность ударно нагруженных монокристаллической и поликристаллической меди вблизи плавления // XV Харитоновские науч. чтения: Тез.докл. Саров, 18-22 марта, 2013.
7. Физические величины: Справочник / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991.
8. Seaman L., Curran D., Shockey A. Computational models for ductile and brittle frac-ture // J. Appl. Phys. -1976.-V.47. №11 - P.4814-4826.
9. Канель Г.И., Савиных А.С., Гаркушин Г.В., Разоренов С.В. Динамическая прочность расплавов олова и свинца // Письма в ЖЭТФ. 1982. Т.102, № 8. С. 615 – 619.
10. Голубев В.К., Новиков С.А., Соболев Ю.С., Юкина Н.А. Разрушение и вязкость свинца при отколе // ПМТФ. 1982. Вып. 6.
11. Богач А.А., Уткин А.В. Прочность воды при импульсном растяжении // ПМТФ. 2000. Т.41, №4.
12. Уткин А.В., Сосиков В.А., Богач А.А. Импульсное растяжение гексана и глицерина при ударно-волновом воздействии // ПМТФ. 2003. Т.44, № 2.
13. Кедринский В.К. Нелинейные проблемы кавитационного разрушения жидкости при взрывном нагружении // ПМТФ. -1993.- №3.- С.74-91.

ТЕРМОФЛУКТУАЦИОННАЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОТКОЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ

С.В. Михайлов, Б.С. Серов

РФЯЦ-ВНИИЭФ, Саров, Россия

1. Основные положения

В основу модели заложен термофлуктуационный механизм возникновения микропор под действием растягивающих напряжений. Уравнения для поврежденности материала запишем сначала следующим образом:

$$\omega(t)=\int_0^t \frac{dN(\tau)}{dt} V_n(\tau, t-\tau)d\tau \tag{1}$$

Здесь поврежденность ω есть отношение удельного объёма пор к удельному объёму поврежденного материала; $V_n(\tau,t-\tau)$ – объём развивающейся сферической поры, которая начала развиваться в момент τ. Отметим, во избежание путаницы, что $V_n(t,0)$ – начальный объём полости, возникающей в момент t, а $V_n(0,t)$ – объём полости, возникшей в момент $t = 0$ и развивавшейся с момента $t = 0$ до момента t.

Входящая в уравнение (1) величина $\frac{dN(t)}{dt}$ представляет собой число термофлуктуационных микрополостей возникающих в единице объема в единицу времени, и выражается следующим образом

$$\frac{dN(t)}{dt}=\frac{n(t)}{\tau_0}\exp\frac{-W_{\Phi л}A}{R_г T}, \tag{2}$$

где $n(t) = \rho(t)/m_a$ - объемная плотность атомов вещества, m_a - масса атома, $\rho(t)$ – текущая плотность *повреждаемого* материала, $R_г$ – газовая постоянная, A – атомный (молекулярный) вес материала, T – температура. Параметр τ_0 – период собственных колебаний атома.

Мерой вероятности малых флуктуаций в макроскопической системе является работа $W_{фл}$, которую надо совершить для перевода её в другое состояние. С другой стороны, мерой работы при изотермо-изобарическом процессе, каковым является термофлуктуация, является термодинамический потенциал Гиббса [1]. Поэтому

$$W_{фл} = F_0 + E(V_s,S_s) + PV_s - TS_s = F_0 + F(P,T) + PV_s$$

где E – удельная внутренняя энергия, P – давление в повреждаемом материале, V_s – удельный объём *сплошной компоненты* материала, S_s – энтропия *сплошной компоненты* материала, F – свободная энергия системы, а F_0 – работа на разрыв связи между атомами при нулевых давлении и температуре. Величина F_0 является эмпирическим параметром модели. Таким образом, потенциал $W_{фл}$ рассчитывается для *сплошной* компоненты материала, но при текущем давлении P в *повреждаемом* материале.

Учет влияния развития поврежденности материала на его термодинамические свойства проводится следующим образом [2]:

$$P(\rho,E,\omega)=(1-\omega)P_s(\rho_s,E_s)=(1-\omega)P_s(\frac{\rho}{1-\omega},E), \tag{3}$$

где $P_s(\rho_s,E_s)$ - уравнение состояния сплошного материала, $\rho_S=\frac{\rho}{(1-\omega)}$, и полагается $E_s=E$. Энтропия

$$S(V,T,\omega) = S_s((1-\omega)V,T) \approx$$

$$\approx \frac{R}{A}\ln[1+\frac{3\pi^4 T^3 V^{3\Gamma}(1-\omega)^{3\Gamma}}{5T_D^3 V_D^{3\Gamma}}] \quad ,$$

где Γ – коэффициент Грюнайзена (вообще говоря, зависящий от удельного объёма V),

T_D – температура Дебая (задаваемая константа материала),

V_D – удельный объём неповрежденного материала при температуре Дебая.

2. Учет ограничения на размеры возникающих микропор

Входящая в выражение (1) вероятность термофлуктуационного возникновения микрополости за одно термическое колебание $\exp\frac{-W_{фл}(t)A}{R_г T(t)}$ соответствует разрыву *одной связи* между атомами. При разрыве одной связи возникает микрополость такого малого размера, что поверхностное натяжение её тут же схлопывает. Как будет показано далее, радиус микрополости должен быть больше минимального $R_{min}(t) = 2\sigma_{пов}/P(t)$. Заметим, что для одиночной микрополости здесь под $P(t)$ понимается давление в сплошном материале. Однако, чтобы в рассматриваемой модели учесть этап взаимовлияния пор, под $P(t)$ надо подразумевать давление в поврежденном веществе. При малых растягивающих давлениях $P(t)$ и/или больших поверхностных натяжениях минимальный размер $R_{min}(t)$ может быть достаточно велик в том смысле, что он должен соответствовать достаточно большому числу порванных связей q между атомами. Тогда вероятность термофлуктуационного возникновения микрополости в единицу времени должна записываться в виде $\frac{1}{\tau_0}\exp\frac{-q(t)W_{фл}A}{R_г T}$, а минимальное число порванных связей $q_{min}(t) = 4\pi R^2_{min}(t)n_s^{2/3}(t)/2$. Например, для алюминия $q_{min}(0) > 20$. Поскольку минимальное число разорванных связей между атомами $\gg 1$, то считаем возможным пользоваться в оценках развития возникающих термофлуктуационных микрополостей гидродинамическим приближением – смотри раздел 4.

Таким образом, в (2) вместо $\frac{1}{\tau_0}\exp\frac{-W_{фл}A}{R_г T}$ нужно подставить вероятность разрыва минимально допустимого числа связей

$$\frac{1}{\tau_0}\exp\frac{-q_{\min}(\tau)W_{фл}A}{R_г T} = \frac{1}{\tau_0}\exp\frac{-8\pi\sigma^2_{пов}n_s^{2/3}(\tau)W_{фл}A}{P^2(\tau)R_г T} \tag{4}$$

В эту вероятность входит следующее отношение параметров повреждаемого материала, которое, вообще говоря, зависит от уровня набранной поврежденности:

$$\frac{n_s^{2/3}(\tau)}{P^2(\tau)} = \frac{n_s^{2/3}(\tau)}{[1-\omega(\tau)]^2 P_s^2(\tau)} = \frac{n^{2/3}(\tau)}{[1-\omega(\tau)]^{2/3}P^2(\tau)}\,. \tag{5}$$

Отношение параметров сплошной компоненты повреждаемого материала $\frac{n_s^{2/3}(\tau)}{P_s^2(\tau)}$ квазистационарно [3] на фоне быстрого изменения поврежденности ω. А с учетом того [4], что поврежденность меняется в ограниченных пределах $0 \le \omega \le \omega_{кр} \le 0.3$, в (5) $1 \le \frac{1}{[1-\omega(\tau)]^2} \le \frac{1}{(1-\omega_{kp})^2} \le 2\cdot$

С другой стороны, если в процессе расчета отношения (5), используя текущие значения плотности и давления в повреждаемом веществе, пренебречь наличием в знаменателе множителя $[1-\omega(\tau)]^{2/3}$, это может привести к ошибке в показателе экспоненты (4) в 1.27 раза, что при больших величинах самого показателя может привести к большой ошибке в определении текущего значения $\omega(\tau)$ из интегрального уравнения (1). В связи с этим, заостряем внимание на том, что соотношение (1) следует рассматривать именно как интегральное уравнение для определения текущих значений поврежденности, а не как интеграл для накопления поврежденности при некоторых упрощающих предположениях относительно подынтегральных функций.

3. Учет полного спектра размеров возникающих микропор

В реальности возможно возникновение полного спектра размеров пор с $R_0 \ge R_{min}(t)$, соответствующих разрыву $q(t) = 4\pi R_0^2 n_s^{2/3}(t)/2$ связей. Только при достаточно больших показателях экспоненты $W_{фл}A/R_г T > 1$ действительно можно ограничиться лишь первым членом из этого спектра с $R_0 = R_{min}(t)$.

В более общем случае вместо уравнения (1) надо записать

$$\omega(t) = \int_0^t \sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} \frac{dN_q(\tau)}{dt}V_q(\tau,t-\tau)d\tau = \frac{1}{\tau_0}\int_0^t n(\tau)\sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} V_q(\tau,t-\tau)\exp\frac{-qW_{фл}A}{R_г T(\tau)}d\tau\,, \tag{6}$$

где $\omega_q(\tau, t-\tau) \equiv n(t-\tau)V_q(\tau, t-\tau)$, а

$$V_q(\tau,t-\tau) = \frac{4}{3}\pi[R_{0q}(\tau) + \int_\tau^t v_q(\tau,t`)dt`]^3\,, \tag{7}$$

причем $v_q(\tau, t`)$ – скорость расширения микрополости, а начальный радиус полости в момент её возникновения определяется из соотношения $q(\tau) = 4\pi R^2_{0q}(\tau)n_s^{2/3}(\tau)/2$, откуда

$$R_{0q}(\tau) = \frac{1}{n_s^{1/3}(\tau)}\sqrt{\frac{q}{2\pi}}\,. \tag{8}$$

Суммирование в (6) проводится по всем возможным числам разорванных связей q от q_0 до ∞, где $q_0(\tau) \equiv \max\{1, q_{min}(\tau)\}$.

Заменим суммирование по q в (6) на интегрирование и применим метод перевала для приближенного вычисления суммы по q:

$$\sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} \frac{dN_q(\tau)}{dt} V_q(\tau, t-\tau) = \frac{n(\tau)}{\tau_0} \cdot \sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} V_q(\tau, t-\tau) \exp \frac{-qW_{фл}A}{R_г T(\tau)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n(\tau)}{\tau_0} \cdot \int_{q_0(\tau)}^{\infty} V_q(\tau, t-\tau) \exp \frac{-qW_{фл}A}{R_г T(\tau)} dq == \frac{n(\tau)}{\tau_0} \cdot \int_{q_0(\tau)}^{\infty} \exp[\ln V_q(\tau, t-\tau) - \frac{qW_{фл}A}{R_г T(\tau)}]dq$$

Первая производная от показателя экспоненты в точке экстремума даёт

$$\frac{dV_{q_m}}{dq} = V_{q_m} \cdot \frac{W_{фл}A}{R_г T} , \tag{9}$$

откуда и получаем величину $q_m(\tau)$ в точке экстремума. Вторая производная в точке экстремума равна

$$\frac{d^2V_{q_m}}{dq^2} / V_{q_m} - (\frac{W_{фл}A}{R_г T})^2 \cdot$$

При этом в точке максимума она должна быть меньше нуля. Тогда

$$\int_{q_0(\tau)}^{\infty} \exp[\ln V_q(\tau, t-\tau) - \frac{qW_{фл}A}{R_г T(\tau)}]dq \approx$$

$$\approx V_{q_m}(\tau, t-\tau) \exp \frac{-q_m W_{фл}A}{R_г T(\tau)} \cdot \int_{q_0(\tau)}^{\infty} \exp\{-[(\frac{W_{фл}A}{R_г T})^2 - \frac{\frac{d^2V_{q_m}}{dq^2}}{V_{q_m}}] \cdot \frac{(q-q_m)^2}{2}\}dq \approx$$

$$\approx V_{q_m}(\tau, t-\tau) \exp \frac{-q_m W_{фл}A}{R_г T(\tau)} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\frac{W_{фл}A}{R_г T})^2 - \frac{\frac{d^2V_{q_m}}{dq^2}}{V_{q_m}}}} \cdot \int_{\sigma_0(\tau)}^{\infty} \exp\{-\frac{\sigma^2}{2}\}d\sigma$$

где

$$\sigma(\tau) \equiv \sqrt{z_m(\tau)}[q - q_m(\tau)]$$

$$\sigma_0(\tau) \equiv \sqrt{z_m(\tau)}[q_0(\tau) - q_m(\tau)] \tag{10}$$

$$z_m(\tau) \equiv [(\frac{W_{фл}A}{R_г T})^2 - \frac{\frac{d^2V_{q_m}}{dq^2}}{V_{q_m}}]$$

Поэтому

$$\sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty} \frac{dN_q(\tau)}{dt} V_q(\tau, t-\tau) \approx \frac{n(\tau)}{\tau_0} V_{q_m}(\tau, t-\tau) \exp(\frac{-q_m W_{фл}A}{R_г T}) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2z_m}}[1 + erf(\frac{\sigma_0(\tau)}{\sqrt{2}})]$$

где $erf(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$ - интеграл ошибок.

Значит, интегральное уравнение (6) для $\omega(t)$ приближенно перепишется в виде

$$\omega(t) \approx \frac{1}{\tau_0} \int_0^t n(\tau) V_{q_m}(\tau, t-\tau) \exp(\frac{-q_m W_{фл}A}{R_г T(\tau)}) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2z_m(\tau)}}[1 + erf(\frac{\sigma_0}{\sqrt{2}})]d\tau , \tag{11}$$

где $q_m(\tau)$ берется из (9), а $\sigma_0(\tau)$ – из (10).

Полученное приближенное интегральное уравнение (11) применимо как при $q_m(\tau) > q_0(\tau)$, так и при $q_m(\tau) < q_0(\tau)$ – до тех пор, пока

$$\frac{dV_{q_m}}{V_{q_m}dq}-\frac{W_{фл}A}{R_гT}<[\frac{d^2V_{q_0}}{V_{q_0}dq^2}-(\frac{W_{фл}A}{R_гT})^2][q_0(\tau)-q_m(\tau)]+\frac{W_{фл}A}{R_гT}\frac{q_0}{q_0-q_m}$$

- т.е. при достаточно малой относительной разнице $q_m(\tau)$ и $q_0(\tau)$. При обратном знаке этого неравенства и $q_m(\tau) < q_0(\tau)$ сумму по q приближенно можно записать так:

$$\sum_{q=q_0(\tau)}^{\infty}\frac{dN_q(\tau)}{dt}V_q(\tau,t-\tau)\Rightarrow\frac{n(\tau)}{\tau_0}\cdot\int_{q_0(\tau)}^{\infty}\exp[\ln V_q(\tau,t-\tau)-\frac{qW_{фл}A}{R_гT(\tau)}]dq\approx$$

$$\approx\frac{n(\tau)}{\tau_0}\cdot V_{q_0}(\tau,t-\tau)\exp\frac{-q_0W_{фл}A}{R_гT(\tau)}\cdot\int_{q_0(\tau)}^{\infty}\exp[-(\frac{W_{фл}A}{R_гT}-\frac{\frac{dV_{q_0}}{dq}}{V_{q_0}})(q-q_0)]dq\approx$$

$$\approx\frac{n(\tau)}{\tau_0}\cdot V_{q_0}(\tau,t-\tau)\exp\frac{-q_0W_{фл}A}{R_гT(\tau)}\cdot\frac{1}{\frac{W_{фл}A}{R_гT}-\frac{\frac{dV_{q_0}}{dq}}{V_{q_0}}}\cdot\int_0^{\infty}e^{-x}dx=\frac{n(\tau)}{\tau_0}\cdot\frac{V_{q_0}^2(\tau,t-\tau)}{\frac{V_{q_0}W_{фл}A}{R_гT}-\frac{dV_{q_0}}{dq}}\exp\frac{-q_0W_{фл}A}{R_гT(\tau)}$$

4. Объём развивающейся микропоры

В приближенное интегральное уравнение (11) входит объём развивающейся микропоры (7), который зависит от скорости расширения микрополости $v_q(\tau, t`)$ и начального радиуса (8). Рассмотрим уравнение развития сферической поры в вязкой сплошной среде с поверхностным натяжением [5]:

$$R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2+\frac{4\eta}{\rho_sR}\dot{R}+\frac{2\sigma_{пов}}{\rho_sR}=\frac{P}{\rho_s}=[1-\omega(t)]\frac{P_s}{\rho_s}=[1-\omega(t)]\frac{P}{\rho} \quad (12)$$

Здесь R – радиус микрополости, $\dot{R}\equiv\frac{dR}{dt}\equiv v(t)$ - скорость расширения полости, η – коэффициент вязкости материала, ρ - текущая плотность *повреждаемого* материала, ρ_s - плотность *сплошной компоненты* повреждаемого материала, $\sigma_{пов}$ – коэффициент поверхностного натяжения, P – модуль текущего растягивающего давления в *повреждаемом* материале, P_s – модуль растягивающего давления, получаемого из уравнения состояния сплошного материала в соответствии с (3). Заметим, что, даже с учетом квазистационарности величин P_s и ρ_s в растягиваемом материале [3], справа в (12) стоит *быстроменяющаяся* функция!

Таким образом, задачу определения хода накопления поврежденности $\omega(t)$ растягиваемого материала можно свести к решению системы двух уравнений: интегрального (11) и дифференциального (12). При этом в уравнении (12) для радиуса расширяющейся полости под $R(t)$ следует понимать входящие в (11) радиусы

$$R_{q_m(\tau)}(\tau,t-\tau)=R_{0q_m(\tau)}(\tau)+\int_{\tau}^{t}v_{q_m(\tau)}(\tau,t`)dt`.$$

Попытки пренебречь в правой части интегрального уравнения (11) зависимостями от ω нежелательны, т.к. текущие значения поврежденности входят, в том числе, в экспоненциальные подынтегральные члены правой части и, в силу этого, могут сильно влиять на величины этих членов. С другой стороны, множитель $(1-\omega)$ в правой части уравнения (12), как отмечено выше, меняется в ограниченных пределах $0.7 \le (1-\omega) \le 1$, и здесь с целью упрощения можно бы его изменчивостью и пренебречь.

Как следует из уравнения (12), вблизи минимума скорости – при малых dv/dt

$$v(t)\approx-\frac{4\eta}{3\rho_sR(t)}+\sqrt{(\frac{4\eta}{3\rho_sR(t)})^2-\frac{4\sigma_{пов}}{3\rho_sR(t)}+\frac{2P}{3\rho_s}}$$

При больших коэффициентах вязкости это переходит в

$$v(t) \approx \frac{PR(t) - 2\sigma_{пов}}{4\eta}. \tag{13}$$

Отсюда видно, что расширяться могут только полости с радиусами $R(t) > 2\sigma_{пов}/P(t)$.
На больших радиусах, если пренебречь в (12) изменчивостью множителя 1-$\omega(t)$, расширение полости приближается к гидродинамическому закону

$$v \equiv v_{гд} \approx \sqrt{\frac{2P}{3\rho_s}} \tag{14}$$

Но с учетом переменности 1-$\omega(t)$, возможна остановка расширения полости при таком ω^*, при котором оказывается, что

$$\frac{2\sigma_{пов}}{\rho_s R} = [1-\omega^*]\frac{P_s}{\rho_s} = [1-\omega^*]\frac{P}{\rho}$$

Для простоты численной реализации модели можно ограничиться рассмотрением двух вариантов предельных законов: "гидродинамического" (14) и "вязкого" закона расширения полости вблизи минимума скорости (13). Решение приближенного уравнения (13) записывается в виде

$$R(t,t') = \exp[\int_{t'}^{t} \frac{P(t'')}{4\eta(t'')} dt''] \cdot [R_0(t') - \int_{t'}^{t} \frac{\sigma_{пов}(t'')}{2\eta(t'')} \exp(-\int_{t'}^{t''} \frac{P(t''')}{4\eta} dt''') dt''] =$$

$$= R_0(t') \exp[\int_{t'}^{t} \frac{P(t'')}{4\eta(t'')} dt''] - \int_{t'}^{t} \frac{\sigma_{пов}(t'')}{2\eta(t'')} \exp(\int_{t''}^{t} \frac{P(t''')}{4\eta} dt''') dt''$$

Здесь $P(t)$ – давление в повреждаемом материале. Вязкость и поверхностное натяжение оказываются зависящими от времени через зависимость от температуры вещества.

Выводы

В данной работе продемонстрирован высокий уровень сложности задачи математического описания кинетики накопления поврежденности в растягиваемом материале и высокая чувствительность этой кинетики к возможным упрощениям рассмотрения. Наивная надежда исследователей, что тем или иным изначально приближенным образом построенная модель кинетики "хоть что-то" опишет, конечно, сбывается: обычно у кинетических моделей для этого достаточно "параметров модели" – т.е., фактически, подгоночных параметров. Однако, рассчитывать на "широкодиапазонность" таких моделей не ст**о**ит.

Список литературы

1. В.Г. Левич. Курс теоретической физики. Том I // М.: Физматгиз, 1962, 696 с.
2. С.В.Михайлов, А.С.Тяпин, Б.С.Серов, В.В.Руденко. Кинетическая модель откольного разрушения материалов в условиях высокоинтенсивного ударноволнового воздействия // Сборник докладов «Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны» международной конференции «XV Харитоновские тематические научные чтения». - Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013, с. 420-425.
3. Н.А.Златин, Б.С.Иоффе. О временной зависимости сопротивления отрыву при отколе // ЖТФ, 1972, т. XLII, вып. 8, с. 1740-1744.
4. В.А.Огородников, А.А.Садовой, В.Н.Софронов, Т.А.Козлова, С.В.Ерунов, С.В.Михайлов. Кинетическая модель пластического разрушения с учетом диссипативных процессов // Хим. физика, 2002, т. 21, № 9, с. 104-109.
5. H.Poritsky. The collapse or growth of a spherical bubble or cavity in a viscous fluids // Proc 1st US Nat. Cong. Appl. Mech. (ASME), Chicago, IL, 1950, p. 813-821.