

Рисунок 6. Диаграмма состояния медь-алюминий

Список литературы

1. А.А.Дерибас «Физика упрочнения и сварки взрывом» Новосибирск, Наука, СО, 1980, с.221.
2. А.В.Крупин, В.Я.Соловьев, Н.И.Шефтель и др. «Деформация металлов взрывом» Москва, Металлургия, 1975, с.415.
3. Диаграммы состояния двойных металлических систем. Справочник в 3-х томах. Москва: Машиностроение, 1996.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ АВТОМОДЕЛЬНОСТИ

В.Ф. Куропатенко ^{1,2}, Е.С. Шестаковская ²

¹ ВНИИТФ, Снежинск, Россия

² Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия

Рассматривается газовый шар с массой M_0 и начальными при $t=t_0$ параметрами газа $\rho = \text{const}$, $U_0=0$, $P_0=0$, $E_0=0$, где ρ – плотность, U – скорость, P – давление, E – удельная внутренняя энергия. Задача имеет сферическую симметрию. Лагранжевой координатой является сферическая масса M . Второй независимой переменной является время t . В точке t_0 , M_0 задана скорость $U_1 < 0$. Т. о. в этой точке задан сильный разрыв, который при $t > t_0$ распространяется к центру симметрии и в момент t_f фокусируется в точку $M = 0$. Граница шара при $t > t_0$ движется в переменных r, t , но в переменных M, t её траектория является вертикальной линией. Вообще говоря, все траектории частиц являются вертикальными линиями, вдоль которых сохраняется то значение энтропии, которое возникло на ударной волне. Параметры газа между ударной волной и границей определяются системой законов сохранения Эйлера-Гельмгольца. Уравнение состояния используются в двух формах

$$P = (\gamma - 1)\rho E, \quad P = F(s)\rho^\gamma, \quad (1)$$

где $F(s)$ – функция от энтропии.

Законы сохранения на ударной волне (УВ) при $U_0 = 0$, $P_0 = 0$, $E_0 = 0$, $F_0 = 0$ имеют вид [1]

$$\rho_w (D - U_w) - \rho_0 D = 0, \quad (2)$$

$$\rho_0 D U_w - P_w = 0, \quad (3)$$

$$\rho_0 D \left(E_w + \frac{1}{2} U_w^2 \right) - P_w U_w = 0. \quad (4)$$

Индексом “ w ” обозначены величины на ударной волне, D – скорость ударной волны. Преобразуем эти уравнения к виду, содержащему зависимости U_w , ρ_w , F_w , P_w от скорости ударной волны в лагранжевых координатах. Лагранжева координата M_w ударной волны в случае сферически симметричного течения связана с её эйлеровой координатой r_w уравнением

$$M_w = \frac{4}{3} \pi \rho_0 r_w^3. \quad (5)$$

Скорость ударной волны в лагранжевых координатах есть изменение M_w со временем

$$W = \frac{dM_w}{dt} = 4\pi \rho_0 r_w^2 D. \quad (6)$$

Заменим эйлерову координату ударной волны её лагранжевой координатой. Для этого выразим r_w из (5) и подставим в (6)

$$W = (3M_w)^{2/3} (4\pi \rho_0)^{1/3} D. \quad (7)$$

Выразив в (7) D через W и M_w и подставив в (2)–(4), получим с помощью (1) зависимости

$$\rho_w = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0. \quad (8)$$

$$U_w = \frac{2}{\gamma + 1} (4\pi \rho_0)^{-1/3} (3M_w)^{-2/3} W. \quad (9)$$

$$P_w = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0^{1/3} (4\pi)^{-2/3} (3M_w)^{-4/3} W^2. \quad (10)$$

Из (1), (8) и (10) следует выражение для F_w

$$F_w = \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^\gamma \rho_0^{-(\gamma-1/3)} (4\pi)^{-2/3} \right] (3M_w)^{-4/3} W^2. \quad (11)$$

В точке $t = t_0$ $M_w = M_0$, $U_w = U_{w0}$, $P_w = P_{w0}$, $F_w = F_{w0}$.

$$U_w = U_0 \left(\frac{W}{W_0} \right) \left(\frac{M_0}{M_w} \right)^{2/3}, \quad P_w = P_0 \left(\frac{W}{W_0} \right)^2 \left(\frac{M_0}{M_w} \right)^{4/3}, \quad F_w = F_0 \left(\frac{W}{W_0} \right)^2 \left(\frac{M_0}{M_w} \right)^{4/3}. \quad (12)$$

По аналогии с [2, 3] зададим траекторию ударной волны в виде

$$M_w = M_0 \varphi(t)^n, \quad (13)$$

где $\varphi = (t_f - t)/(t_f - t_0)$. Продифференцировав M_w по t , получим выражение для скорости ударной волны в лагранжевых координатах

$$W = W_0 \varphi^{n-1}, \quad (14)$$

где

$$W_0 = - \frac{M_0 n}{t_f - t_0}. \quad (15)$$

Исключив в (13) и (14) функцию от времени, получим зависимость W от M_w

$$\frac{W}{W_0} = \left(\frac{M_w}{M_0} \right)^{(n-1)/n}. \quad (16)$$

С помощью соотношения (16) исключим W в (12)

$$U_w = U_{w0} \left(\frac{M_w}{M_0} \right)^{(n-3)/3n}, \quad P_w = P_{w0} \left(\frac{M_w}{M_0} \right)^{2(n-3)/3n}, \quad F_w = F_{w0} \left(\frac{M_w}{M_0} \right)^{2(n-3)/3n}. \quad (17)$$

Величина F_w вдоль траектории частицы с координатой M_w постоянна. Следовательно, зависимость энтропии от массы между ударной волной и границей газа имеет вид

$$F = F_{w0} \left(\frac{M}{M_0} \right)^{2(n-3)/3n}. \quad (18)$$

Из (5) следует зависимость r_w от M_w

$$r_w = r_0 \left(\frac{M_w}{M_0} \right)^{1/3}. \quad (19)$$

Параметры адиабатического течения за ударной волной определяются уравнениями, траектории, сохранения массы и движения

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)_M - U = 0, \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_M + 4\pi r^2 \frac{\partial (r^2 U)}{\partial M} = 0, \quad (21)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_M + 4\pi r^2 \frac{\partial (F \rho^\gamma)}{\partial M} = 0. \quad (22)$$

Эти уравнения содержат три искомым функции r , ρ и U . Величина F определяется на ударной волне и зависит только от M (17).

Перейдём в (20)–(22) к новым искомым функциям

$$R = r^3, \quad C = r^2 U. \quad (23)$$

После перехода к функциям R и C уравнения (20)–(22) примут вид

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_M - 3C = 0, \quad (24)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_M + 4\pi r^2 \frac{\partial C}{\partial M} = 0, \quad (25)$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} \right)_M + 4\pi R^{4/3} \frac{\partial (F \rho^\gamma)}{\partial M} - 2C^2 R^{-1} = 0. \quad (26)$$

Из (17), (19) и (23) следуют зависимости R_w и C_w от M_w

$$R_w = R_0 \frac{M_w}{M_0}, \quad C_w = C_0 \left(\frac{M_w}{M_0} \right)^{(n-1)/n}. \quad (27)$$

Уравнения (24)–(26) являются основными для отыскания R , C и ρ в области интегрирования $M_w \leq M \leq M_0$, $t_0 \leq t \leq t_j$.

Перейдём от переменных t , M к переменным t , $\xi(t, M)$. Уравнения (24)–(26) примут вид

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_\xi + \left(\frac{\partial R}{\partial \xi} \right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_M - 3C = 0, \quad (28)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_\xi + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_M + 4\pi r^2 \left(\frac{\partial C}{\partial \xi} \right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial M} \right)_t = 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial C}{\partial t} \right)_\xi + \left(\frac{\partial C}{\partial \xi} \right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_M - \frac{2C^2}{R} + \\ & + 4\pi R^{4/3} \left[\rho^\gamma \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial M} \right)_t + \gamma F \rho^{\gamma-1} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial M} \right)_t \right] = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Зависимость $\xi(t, M)$ зададим так, чтобы на ударной волне было $\xi = 1$. Из (13) следует, что проще всего взять такую зависимость в виде

$$\xi = \frac{M}{M_0} \varphi^{-n}. \quad (31)$$

Для разделения переменных представим R , ρ и C в виде произведений функций от времени на функции от ξ

$$R = \alpha_R(t) T(\xi) \quad \rho = \alpha_\rho(t) \delta(\xi) \quad C = \alpha_C(t) Z(\xi). \quad (32)$$

Поскольку на ударной волне $\xi = 1$, то значения $T_1 = T(1)$, $\delta_1 = \delta(1)$, $Z_1 = Z(1)$ должны быть постоянными. Из (27) и (31) следует зависимость $R_w(t)$

$$R_w = R_0 \varphi^n. \quad (33)$$

Сравнив эту зависимость с (32) на ударной волне, получим выражение для α_R

$$\alpha_R(t) = R_0 \varphi^n T_1^{-1}. \quad (34)$$

Аналогично для α_ρ и α_C получаем соотношения

$$\alpha_\rho = \rho_0 \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \delta_1^{-1}, \quad \alpha_C(t) = C_0 \varphi^{n-1} Z_1^{-1}. \quad (35)$$

Подставив (32)–(35) в (28)–(30) и воспользовавшись (15), получим три уравнения для T , δ и Z

$$\xi T' = A_1, \quad (36)$$

$$\delta_1 B_1 Z' - \xi Z_1 \delta' = 0, \quad (37)$$

$$-\frac{\xi}{Z_1} Z' + \frac{C_1 \gamma \xi}{\delta_1} \delta' = C_2, \quad (38)$$

где штрих означает дифференцирование по ξ . Коэффициенты уравнений (36)–(38) A_1, B_1, C_1, C_2 с помощью (5), (6), (12) и (21) преобразуются к виду

$$A_1 = T - \frac{2Z T_1}{(\gamma+1) Z_1}, \quad B_1 = \frac{2\delta^2}{(\gamma-1) \delta_1^2}, \quad C_1 = \frac{\delta^{\gamma-1} T^{4/3} \xi^{-(n+6)/3n}}{\delta_1^{\gamma-1} T_1^{4/3}}, \quad (39)$$

$$C_2 = \frac{4Z^2 T_1}{3(\gamma+1) Z_1^2 T} - \frac{(n-1)Z}{n Z_1} - C_1 \frac{2(n-3)\delta}{3n \delta_1}.$$

Уравнения (36)–(38) образуют относительно T' , δ' , Z' систему линейных неоднородных уравнений. Определитель системы равен

$$\Delta = B_1 C_1 \gamma \xi - \xi^2.$$

Если $\Delta \neq 0$, то решение системы (36)–(38) существует и имеет вид

$$T' = \frac{A_1}{\xi}, \quad \delta' = \frac{B_1 C_2 \delta_1}{\Delta}, \quad Z' = \frac{\xi C_2 Z_1}{\Delta}. \quad (40)$$

На ударной волне при $\xi = 1$ величины T , δ , Z , Δ и коэффициенты (39) принимают значения

$$T = T_1, \quad \delta = \delta_1, \quad Z = Z_1, \quad A_1 = \frac{(\gamma-1)T_1}{\gamma+1}, \quad B_1 = \frac{2}{(\gamma-1)},$$

$$C_1 = 1, \quad C_2 = \frac{9(\gamma+1) - n(5\gamma+1)}{3n(\gamma+1)}, \quad \Delta(1) = \frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)}.$$

Интегрирование системы уравнений (40) начинается в точке $\xi=1$ (на ударной волне). Расчёты показывают, что существует промежуток значений n таких, что определитель в ноль не обращается. При некотором значении n_* определитель обращается в ноль при $\xi = \xi_*$. В этой точке решение существует, если C_2 тоже обращается в ноль. Каждому значению γ соответствует одно значение n_* (см. таблицу 1). В этой же таблице приведены значение ξ_* , при которых одновременно $\Delta(\xi_*) = 0$, $C_2(\xi_*) = 0$. Профили давлений, плотностей и скоростей при $n = n_*$ для трех моментов времени приведены на рисунке 1.

Таблица 1. Значения n_* и ξ_* , соответствующие различным значениям показателя адиабаты γ

γ	1,1	1,2	4/3	1,4	5/3
n_*	2.387916	2.271434	2.183068	2.151532	2.065135
ξ_*	7.959997	5.717071	4.559431	4.227062	3.481885

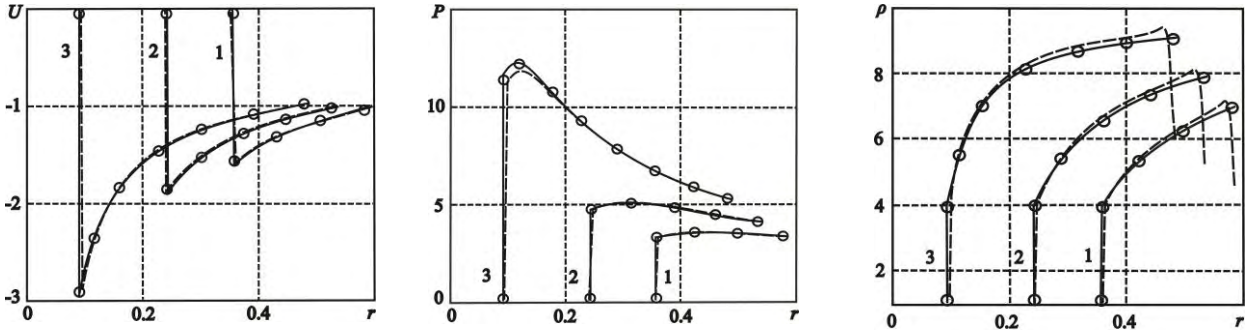


Рисунок 1. Зависимости скорости, давления и плотности от эйлеровой координаты r для $\gamma=5/3$, $n = n_* = 2,065135$ и трех моментов времени 1 – $t=0,4$; 2 – $t=0,45$; 3 – $t= 0,5$. Сплошная линия – аналитическое решение данной работы, \circ – расчёты по программе ВОЛНА [4] с выделением разрывов, $-----$ – расчёты по программе ВОЛНА без выделения разрывов

При $0 < n < n_*$ определитель системы уравнений (40) положителен во всём промежутке изменения ξ $1 \leq \xi < \infty$. В этом случае происходит коллапс газового шара – его объём стремится к нулю. Структура течения газа между фронтом ударной волны и границей шара показана на рисунке 2.

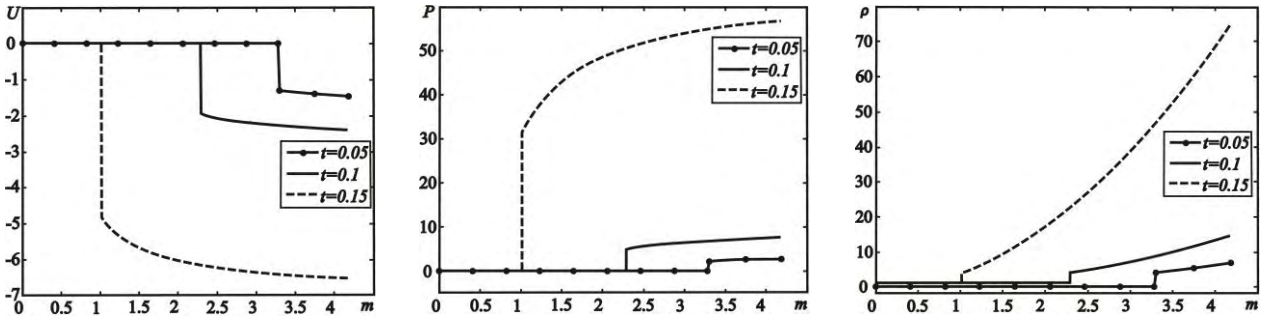


Рисунок 2. Зависимости скорости, давления и плотности от лагранжевой координаты для $\gamma=5/3$, $n=0,68$ меньше $n_* = 2,065135$ и трех моментов времени $t=0,05; 0,1; 0,15$

В области $n > n_*$ определитель обращается в ноль при некотором значении ξ_n , которое зависит от n . Но в этой точке $C_2(\xi_n)$ в ноль не обращается. Т. о. решение существует в области $1 \leq \xi < \xi_n$. На границе газового шара при $M = M_0$ значение ξ_n достигается в момент

$$t_n = t_f - (t_f - t_0) \xi_n^{-1/n}.$$

Из точки M_0, t_n выходит линия, на которой $\xi = \xi_n$

$$M_n = M_0 \xi_n \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^n. \tag{41}$$

Это характеристика. Она фокусируется одновременно с ударной волной, т. к. при $t = t_f$, $M_n = 0$. В области между линией (41) и ударной волной (13) для каждого $n > n_*$ существует единственное решение. Структура течения газа показана на рисунке 3.

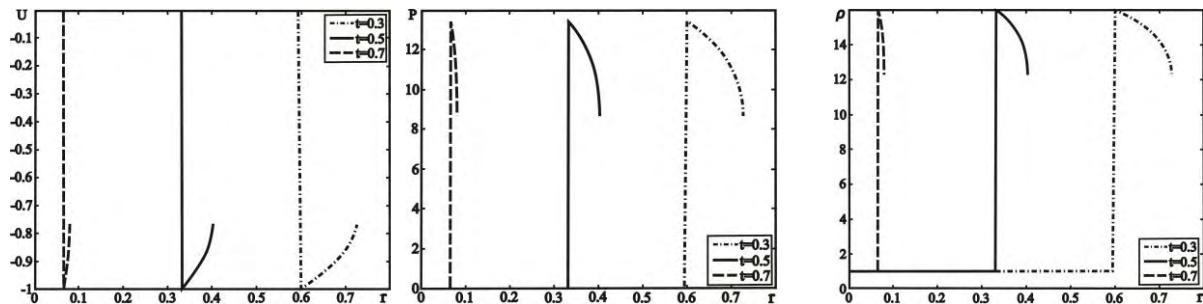


Рисунок 3. Зависимости скорости, давления и плотности от эйлеровой координаты r между ударной волной и характеристикой для $\gamma=5/3$, $n=3$ больше $n_* = 2,065135$ и трех моментов времени $t=0,3; 0,5; 0,7$

В лагранжевых координатах построено аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне для произвольных показателей n , которые определяют схождение ударной волны.

Список литературы

1. В.Ф. Куропатенко. Модели механики сплошных сред // Ч.: Изд-во ЧелГУ, 2007, 302с.
2. V.F.Kuropatenko, E.S.Shestakovskaya, M.N.Yakimova, Dynamic Compression of a Cold Gas Sphere // Doklady Physics, 2015, vol. 461, no.5, pp. 530–532.
3. В.Ф. Куропатенко, Е.С. Шестаковская, М.Н. Якимова, Ударная волна в газовом шаре // Вестник ЮУрГУ. Серия Математическое моделирование и программирование, 2015, Т. 9, № 1, с. 5–19.
4. В.Ф. Куропатенко, В.И. Кузнецова, Г.В. Коваленко, Г.И. Михайлова, Г.Н. Сапожникова, Комплекс программ ВОЛНА и неоднородный разностный метод расчёта неустановившихся движений сжимаемых сплошных сред // Вопросы атомной науки и техники. Серия Математическое моделирование физических процессов, 1989, Вып. 2, с. 9–25.

THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF A CONVERGENT SHOCK WAVE FOR ARBITRARY COEFFICIENTS OF SELF-SIMILARITY

V.F. Kuropatenko ^{1,2}, E.S. Shestakovskaya ²

¹ Russian Federal Nuclear Center--Zababakhin All--Russia Research Institute of Technical Physics
Snezhinsk, Russian Federation

² South Ural State University (National Research University)
Chelyabinsk, Russian Federation

Is being considered the gas sphere with the mass M_0 and initial parameters for the gas $\rho_0 = \text{const}$, $U_0 = 0$, $P_0 = 0$, $E_0 = 0$, where ρ – density, U – velocity, P – pressure, E – specific internal energy at $t = t_0$. The problem has spherical symmetry. The Lagrangian coordinate is a spherical mass M . The second independent variable is the time t . At the point t_0 , M_0 the velocity is set $U_1 < 0$. When $t > t_0$ the shock wave spreads from this point into the center of symmetry and it focuses to the point $M = 0$ at the moment t_j . At $t > t_0$ the sphere boundary moves in the variables r, t , but it is a vertical line in variables M, t . Generally speaking, all the trajectories of the particles are vertical lines. The value of entropy which appeared on the shock wave retained along each of the trajectories. Parameters of the gas between the