

# ПАКЕТ ПРОГРАММ ЛОГОС. РЕАЛИЗАЦИЯ ПОДХОДОВ И АЛГОРИТМОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

*Е. И. Наумова, Д. Ю. Дьянов, М. В. Медведкина, Е. В. Шувалова*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров Нижегородской обл.

## Введение

В настоящее время во ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ» разрабатывается пакет программ ЛОГОС [1–2] для решения широкого круга задач, в том числе механики деформируемого твердого тела на многопроцессорных вычислительных ресурсах. Программный модуль (ПМ) пакета программ ЛОГОС для моделирования задач прочности (ЛОГОС-ПА) обеспечивает решение задач статической, динамической и вибрационной прочности.

Одним из главных условий успешного внедрения пакета программ ЛОГОС в полный цикл разработки изделий на предприятиях оборонно-промышленного комплекса и высокотехнологичных предприятий гражданской отрасли является программная реализация современных моделей поведения конструкционных материалов, в частности композиционных материалов.

Композиционные материалы [3–8] находят широкое применение в инженерной практике, так как позволяют создавать конструкции с уникальными весовыми, прочностными и диссипативными характеристиками, которых практически невозможно достичь использованием в конструкциях традиционных материалов.

Композиционные материалы, или композиты, состоят из двух и более компонент, существенно отличающихся по физико-механическим характеристикам. В их основе лежит уникальная по простоте идея армирования, когда соединяют «полярные» по свойствам материалы – податливую матрицу и жесткую и прочную арматуру. Армирующие элементы обычно обеспечивают необходимые механические характеристики материала (прочность, жесткость), а матрица (или связующее) обеспечивает совместную работу армирующих элементов и защиту их от механических повреждений [3–8].

Современные волокнистые композиты являются неоднородными анизотропными материалами. Упругость и неупругость волокнистых композитов определяются типом арматуры (стекло-, боро-, углеродных и органолокна) и матриц (полимерных, углеродных, металлических, керамических), степенью их взаимодействия в композите, а также углом нагружения относительно направлений армирования. Принято полагать, что композитные материалы об-

ладают двумя уровнями неоднородности: микро-неоднородностью, связанной с наличием двух фаз (волокон и матрицы), и макро-неоднородностью, связанной с наличием в материале различным образом ориентированных микро-неоднородных слоев. При расчете и проектировании конструкций обычно учитывают только второй уровень неоднородности материала, т. е. считается, что он состоит из совокупности квазиоднородных слоев, свойства которых известны. Анализ зависимости этих свойств от характеристик исходных компонентов и их содержания в материале является предметом микромеханики композитов, основная задача которой заключается в определении эффективных модулей упругости, т. е. коэффициентов, связывающих усредненные по объему напряжения и деформации [3–8].

В докладе представлены подходы и алгоритмы, используемые в ПМ ЛОГОС-ПА при численном моделировании процесса динамического деформирования композиционных конструкций.

Для демонстрации работоспособности и эффективности реализованного функционала в докладе представлены результаты численных расчетов ряда тестовых задач, проведенных с использованием пакета программ ЛОГОС.

## Методы моделирования волокнистых и слоистых композитов

Методы моделирования волокнистых и слоистых композитов можно разделить на несколько видов [7]:

1. прямой метод моделирования волокон и слоев посредством объемных, оболочечных и балочных элементов. Данный подход напрямую моделирует все волокна и слои композитного материала, но требует огромных вычислительных и трудозатрат;

2. метод, основанный на усредненных характеристиках;

3. метод, основанный на модели слоистого материала (*Laminate method*) на основе модели ортотропного материала. Композитный материал в данном подходе представляется пакетом однонаправленных слоев, с различными углами укладки друг относительно друга (рис. 1а). Каждый слой представляет собой ориентированный материал, армированный параллельными волокнами (рис. 1б).

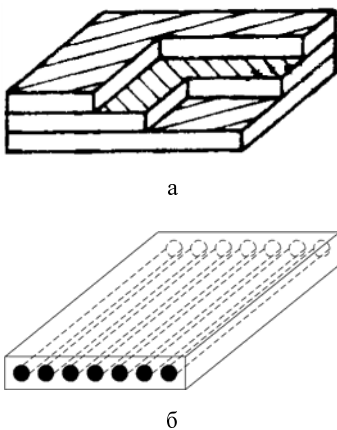


Рис. 1. Пример многослойного композита: а – пакет слоев, уложенных под различными углами, б – схема слоя, армированного непрерывными волокнами

В пакете программ ЛОГОС модель многослойного композитного материала основана на представлении композита как пакета слоев, уложенных под различными углами укладки и использовании теории оболочек при следующих предположениях [6, 9, 10]:

1. слоистый композитный материал рассматривается как неоднородный по материальным свойствам монолит;

2. материал каждого слоя считается однородным и ортотропным, с осями упругой симметрии, направленными вдоль и поперек волокон;

3. деформации по толщине пакета непрерывны.

4. напряжения по толщине слоя непрерывны и связаны с деформациями уравнениями обобщенного закона Гука для плосконапряженного состояния оболочек.

Материал слоя характеризуется [11]:

1) упругими характеристиками:

– модулями упругости  $E_1$  и  $E_2$  вдоль и поперек волокон;

– модулем сдвига  $G_{12}$  в плоскости волокон;

– коэффициентом Пуассона  $\nu_{12}$  в поперечном направлении;

2) прочностными характеристиками:

– разрушающими напряжениями  $\sigma_1^p$  и  $\sigma_1^{сж}$  при растяжении и сжатии вдоль волокон;

– разрушающими напряжениями  $\sigma_2^p$  и  $\sigma_2^{сж}$  при растяжении и сжатии поперек волокон;

– разрушающими напряжениями  $\tau_{12}$  при сдвиге в плоскости волокон.

Эти характеристики определяются экспериментально и содержатся в базе данных материалов. Диаграммы деформирования всех ориентированных композитов при растяжении и сжатии вдоль волокон в первом приближении можно считать линейными вплоть до разрушения материала [11].

В пакете программ ЛОГОС реализована также возможность моделирования композитного материала посредством объемных элементов.

В настоящее время в пакете программ ЛОГОС для моделирования композитного материала можно использовать:

– модель упругого деформирования однонаправленного слоя композитного материала с различными критериями разрушения [8, 9, 12];

– модели материалов, реализованные в пакете программ ЛОГОС [13], в том числе модели ортотропного или анизотропного материалов и различные критерии разрушения [14–15].

При использовании теории оболочек для каждого из слоев можно задать модель материала, толщину слоя и угол направления волокон.

### Модель упругого деформирования однонаправленного слоя композитного материала на полимерной основе

Рассмотрим модель упругого деформирования однонаправленного слоя композитного материала [3, 6]. Рассмотрим слой, отнесенный к координатам 1, 2, 3, связанным с направлением армирования. Введем ортогональные координаты  $\alpha, \beta, \gamma$  и предположим, что ось 1 армированного слоя составляет с осью  $\alpha$  угол  $\varphi$  (рис. 2).

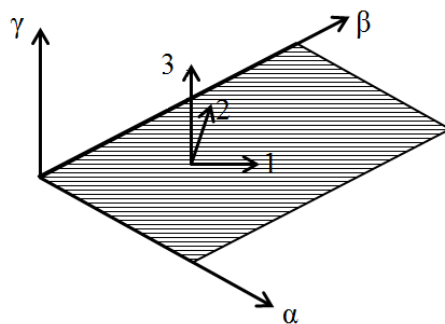


Рис. 2. Элемент однонаправленного слоя композита

Соотношения, связывающие напряжения и деформации в системах координат 1, 2, 3 и  $\alpha, \beta, \gamma$ , имеют следующий вид:

$$\sigma_L = q^T \sigma q ;$$

$$\varepsilon_L = q^T \varepsilon q .$$

Тензоры напряжений и деформаций  $\sigma$  и  $\varepsilon$  относятся к системе координат  $\alpha, \beta, \gamma$ . Тензоры напряжений и деформаций с индексом  $L$  ( $\sigma_L$  и  $\varepsilon_L$ ) относятся к системе координат 1, 2, 3, связанной с направлением волокон.

Матрица преобразований  $q$  имеет следующий вид:

$$q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Компоненты тензора напряжений в системе координат, связанной с направлением волокон (1, 2, 3), определяются как  $\sigma_L^{n+1} = \sigma_L^n + \Delta\sigma_L$ , приращение компонент тензора напряжений в системе координат, связанной с направлением волокон (1, 2, 3), определяется согласно закону Гука:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \bar{E}_1(\varepsilon_1 + \nu_{21}\varepsilon_2); \\ \sigma_2 &= \bar{E}_2(\varepsilon_2 + \nu_{12}\varepsilon_1); \\ \tau_{12} &= G_{12}\gamma_{12}. \\ \bar{E}_1 &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad \bar{E}_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},\end{aligned}$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$  – компоненты тензора деформаций в направлениях 1, 2 и плоскости 12 соответственно,  $E_1, E_2$  – модули упругости в направлениях 1, 2,  $G_{12}$  – модуль сдвига в плоскости слоя,  $\nu_{12}, \nu_{21}$  – коэффициенты Пуассона.

Здесь имеет место условие симметрии упругих постоянных:

$$E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12}$$

Для перехода между системами координат 1, 2, 3 и  $\alpha, \beta, \gamma$  понадобятся также соотношения закона Гука в плоскостях, ортогональных плоскости армирования.

$$\tau_{13} = G_{13}\gamma_{13}, \quad \tau_{23} = G_{23}\gamma_{23}$$

где  $G_{13}$  и  $G_{23}$ ,  $\tau_{13}$  и  $\tau_{23}$ ,  $\gamma_{13}$  и  $\gamma_{23}$  – модули сдвига и компоненты тензора напряжений и деформаций в плоскостях 13 и 23 соответственно.

После вычисления новых значений компонент напряжений в системе координат, связанной с направлением волокон (1, 2, 3) они пересчитываются в систему координат элемента  $\alpha, \beta, \gamma$ :  $\sigma = q\sigma_L q^T$ .

### Модель разрушения композитного материала с критерием Чанга

Модель композитного материала с критерием разрушения Чанга позволяет моделировать композитный материал с необязательным хрупким разрушением.

Данная модель включает следующие критерии [8, 9]:

- Критерий растяжения матрицы  $\sigma_2 > 0$ :

$$F_2^P = \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_2^P} \right)^2 + \bar{\tau}.$$

Если  $F_2^P > 1$ , то константы материала  $E_2, G_{12}, \nu_{21}$  и  $\nu_{12}$  полагаются равными нулю.

- Критерий сжатия матрицы  $\sigma_2 < 0$ :

$$F_2^{сж} = \left( \frac{\sigma_2}{2\sigma_{12}^*} \right)^2 + \left[ \left( \frac{\sigma_2^{сж}}{2\sigma_{12}^*} \right)^2 - 1 \right] + \frac{\sigma_2}{\sigma_2^{сж}} + \bar{\tau}.$$

Если  $F_2^{сж} > 1$ , то константы материала  $E_2, \nu_{21}$  и  $\nu_{12}$  полагаются равными нулю.

- Критерий растяжения вдоль волокон  $\sigma_1 > 0$ :

$$F_1^P = \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_1^P} \right)^2 + \bar{\tau}.$$

Если  $F_1^P > 1$ , то константы материала  $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$  и  $\nu_{21}$  полагаются равными нулю.

$$\text{Здесь } \bar{\tau} \text{ – сдвиговый член, } \bar{\tau} = \frac{\frac{\tau_{12}^2}{2G_{12}} + \frac{3}{4}\alpha\tau_{12}^4}{\frac{S_c^2}{2G_{12}} + \frac{3}{4}\alpha S_c^4};$$

$\sigma_1^P$  – предел прочности при растяжении вдоль волокон,  $\sigma_2^P$  – предел прочности при растяжении поперек волокон,  $\sigma_{12}^*$  – предел сдвиговой прочности в плоскости 12,  $\sigma_2^{сж}$  – предел прочности при сжатии поперек волокон,  $\alpha$  – параметр сдвигового напряжения для нелинейного члена.

Если для элемента в одном из слоев выполняется один из вышеперечисленных критериев разрушения, то напряжения в этом слое рассчитываются с учетом новых значений констант. Элемент считается разрушенным, если критерии разрушения выполнены во всех слоях, либо если выполнен критерий растяжения волокон хотя бы в одном из слоев.

### Усовершенствованная модель разрушения

Усовершенствованная модель разрушения композитного материала дает возможность задавать критерии разрушения Чанга, а также дополнительные критерии разрушения:

- Критерий растяжения матрицы  $\sigma_2 > 0$ :

$$F_2^P = \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_2^P} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^*} \right)^2;$$

- Критерий сжатия матрицы  $\sigma_2 < 0$ :

$$F_2^{сж} = \left( \frac{\sigma_2}{2\sigma_{12}^*} \right)^2 + \left[ \left( \frac{\sigma_2^{сж}}{2\sigma_{12}^*} \right)^2 - 1 \right] \frac{\sigma_2}{\sigma_2^{сж}} + \left( \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^*} \right)^2;$$

- Критерий растяжения вдоль волокон  $\sigma_1 > 0$ :

$$F_1^P = \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_1^P} \right)^2 + \beta \left( \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^*} \right)^2;$$

- Критерий разрушения при сжатии вдоль волокон  $\sigma_1 < 0$ :

$$F_1^{сж} = \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_1^{сж}} \right)^2.$$

Здесь  $\sigma_1^{сж}$  – предел прочности при сжатии вдоль волокон,  $\beta$  – весовой множитель сдвига при растяжении волокон.

Если  $F_1^{сж} > 1$ , то константы материала  $E_1$ ,  $\nu_{12}$  и  $\nu_{21}$  полагаются равными нулю. Для остальных критериев разрушения описание представлено выше.

- В усовершенствованной модели разрушения композитного материала есть возможность задать различные критерии разрушения по деформациям. Может быть задана максимальная деформация при растяжении или сжатии матрицы и максимальная деформация при сдвиге. При достижении этого значения элемент удаляется.

- В усовершенствованной модели разрушения композитного материала существует возможность использовать дополнительно:

- коэффициент разупрочнения для предела прочности волокна при растяжении ( $f_{brt}$ ): если

$$F_2^{сж} > 1, \text{ то } \sigma_1^p = \sigma_1^p * f_{brt} .$$

- коэффициент уменьшения прочности волокна при сжатии ( $Y_{fac}$ ): если  $F_2^{сж} > 1$  то

$$\sigma_1^{сж} = \sigma_2^{сж} * Y_{fac} .$$

Элемент считается разрушенным, если:

- критерии разрушения выполнены во всех слоях;
- выполнен критерий растяжения вдоль волокон хотя бы в одном из слоев;
- достигнута величина максимальной деформации при растяжении или сжатии матрицы или достигнута величина максимальной деформации при сдвиге.

### Тестовые расчеты

#### Нагружение многослойной пластины

Цель данного теста – проверить работоспособность реализованного алгоритма расчета напряжений. Результаты расчета сравниваются с результатами расчета с моделью упругого материала.

Постановка задачи приведена на сайте <https://www.dynasupport.com/howtos/material/composite-models>. Рассматривается задача о нагружении многослойной пластины. На рис. 3 схематично изображено расположение слоев задачи.

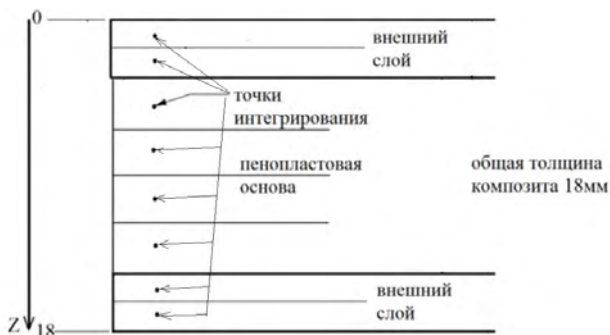


Рис. 3. Схематическая геометрия задачи

Задача представляет собой прямоугольную область  $150 \times 5$  мм, толщина оболочки 18 мм. Счетная область разбивалась следующим образом: задавалось 30 элементов по оси  $X$  и 1 элемент по оси  $Y$ . В расчете использовался оболочечный элемент с 8-ю точками интегрирования по толщине и сдвиговым множителем равным 1. Толщина каждого из слоев 2,25 мм.

Для моделирования свойств материалов использовалась модель композитного материала. Физико-механические характеристики материалов следующие.

Внешний слой: начальная плотность  $\rho_0 = 2,7e-06$  кг/мм<sup>3</sup>, модули Юнга  $E_1 = E_2 = 73,4$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu_{21} = 0,32$ , модули сдвига  $G_{12} = G_{23} = G_{31} = 27,8$  ГПа.

Внутренний слой: начальная плотность  $\rho_0 = 6,3e-07$  кг/мм<sup>3</sup>, модули Юнга  $E_1 = E_2 = 0,286$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu_{21} = 0,3$ , модули сдвига  $G_{12} = G_{23} = G_{31} = 0,11$  ГПа.

Левый конец оболочки жестко закреплен. Верхняя и нижняя границы – жесткие стенки.

К поверхности оболочки приложено давление, возрастающее от 0 в начальный момент времени, до 0,015 ГПа к моменту окончания расчета  $t = 5$  мс.

На рис. 4 приведена зависимость смещения по оси  $Z$  правой границы от времени. Как видно из результатов до разрушения материал ведет себя как упругий.

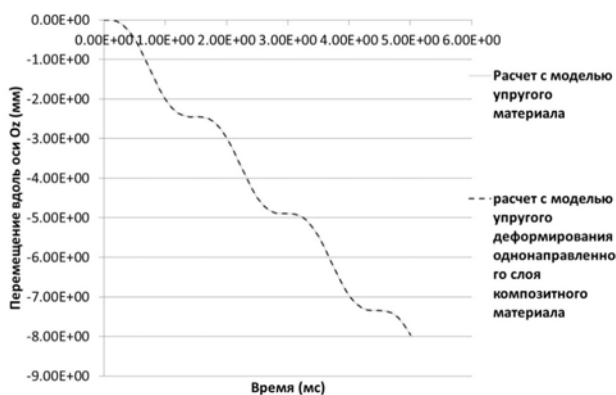


Рис. 4. Зависимость смещения по оси  $Z$  правой границы от времени

#### Растяжение вдоль волокон

Цель следующих тестов – проверить работоспособность реализованных критериев разрушения и принципов моделирования поведения поврежденного материала.

Постановка задачи взята из работы [12]. На рис. 5 показана геометрия тестовой задачи, представляющая собой квадратный элемент  $0,01 \times 0,01$  мм. В расчете использовался оболочечный элемент с одной точкой интегрирования по толщине и сдвиговым множителем равным 1.

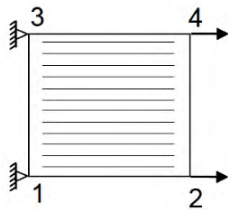


Рис. 5. Начальная геометрия задачи, закрепленные узлы и приложенная нагрузка

Для моделирования свойств материала использовалась усовершенствованная модель разрушения композитного материала [9–10]. Физико-механические характеристики материала следующие: начальная плотность  $\rho_0 = 1,65 \text{ г/см}^3$ , модули Юнга  $E_1 = 80 \text{ ГПа}$ ,  $E_2 = 15 \text{ ГПа}$ , коэффициент Пуассона  $\nu_{21} = 0,3$ , модуль сдвига  $G_{12} = G_{31} = G_{23} = 11,5 \text{ ГПа}$ . Параметры разрушения:  $\sigma_1^p = 0,8 \text{ ГПа}$ ,  $\sigma_{12}^* = 0,1 \text{ ГПа}$ , максимальная деформация при растяжении  $\varepsilon_f^p = 0,02$ .

Задавались следующие граничные условия (рис. 5): один конец элемента жестко закреплен. На другом конце задана постоянная скорость вдоль оси  $Ox$   $0,01 \text{ км/с}$ .

На рис. 6 приведены результаты, полученные по ПМ ЛОГОС ПА, в сравнении с результатами из работы [12]. Элемент растягивается в направлении волокон, пока напряжение в направлении волокон не достигнет максимального значения  $\sigma_1^p = 0,8 \text{ ГПа}$ . После этого напряжение остается постоянным до тех пор, пока деформация не достигнет максимального значения при растяжении  $\varepsilon_f^p = 0,02$ . После этого элемент разрушается.

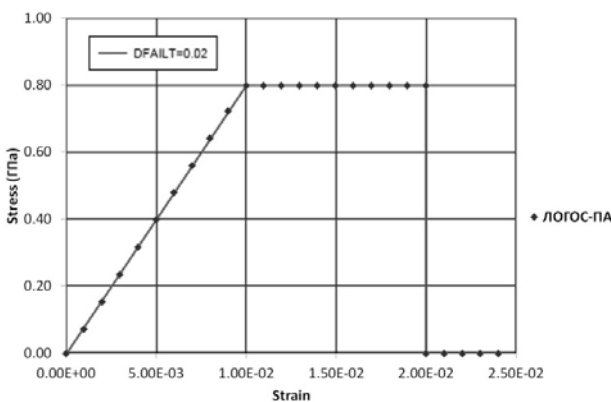


Рис. 6. Зависимость напряжений от деформаций в случае растяжения вдоль волокон

### Растяжение вдоль волокон и сжатие матрицы

Постановка задачи взята из работы [12]. На рис. 7 показана геометрия тестовой задачи, пред-

ставляющая собой квадратный элемент  $0,01 \times 0,01 \text{ мм}$ . В расчете использовался оболочечный элемент с одной точкой интегрирования по толщине и сдвиговым множителем равным 1.

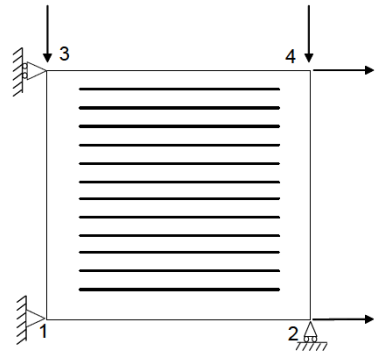


Рис. 7. Начальная геометрия задачи, закрепленные узлы и приложенная нагрузка

Для моделирования свойств материала использовалась усовершенствованная модель разрушения композитного материала. Физико-механические характеристики материала следующие: начальная плотность  $\rho_0 = 1,65 \text{ г/см}^3$ , модули Юнга  $E_1 = 80 \text{ ГПа}$ ,  $E_2 = 15 \text{ ГПа}$ , коэффициент Пуассона  $\nu_{21} = 0,3$ , модули сдвига  $G_{12} = G_{31} = G_{23} = 11,5 \text{ ГПа}$ . Параметры разрушения:  $\sigma_1^p = 0,8 \text{ ГПа}$ ,  $\sigma_1^{сж} = 0,5 \text{ ГПа}$ ,  $\sigma_2^p = 0,045 \text{ ГПа}$ ,  $\sigma_2^{сж} = 0,08 \text{ ГПа}$ ,  $\sigma_{12}^* = 0,1 \text{ ГПа}$ ,  $f_{brt} = 0,5$ .

Элемент растягивался вдоль направления волокон с постоянной скоростью  $0,01 \text{ км/с}$  и сжимался поперек направления волокон с постоянной скоростью  $0,03 \text{ км/с}$ .

На рис. 8 приведены результаты, полученные по ПМ ЛОГОС ПА, в сравнении с результатами из работы [12]. Сначала выполняется критерий сжатия матрицы на момент времени  $t = 0,002$ . Далее, т. к. задан

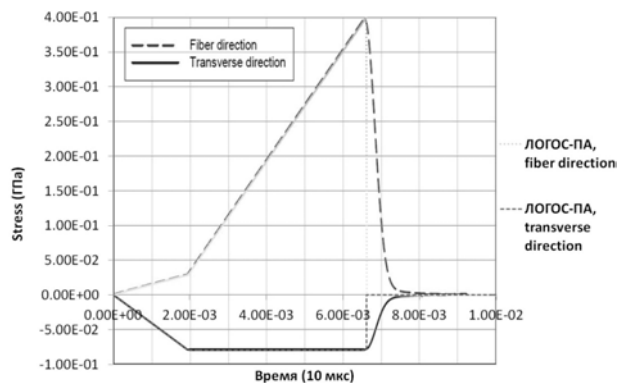


Рис. 8. Зависимость напряжений от времени

коэффициент разупрочнения для предела прочности волокна при растяжении  $f_{brt}$ , пересчитывается величина  $\sigma_1^p = \sigma_1^p * f_{brt} = 0,4 \text{ ГПа}$ . Элемент растягивается в направлении волокон, пока напряжение в на-

правления волокон не достигнет значения  $\sigma_1^p = 0,4$  ГПа. После этого элемент разрушается. Как видно из результатов, представленных в работе [12], элемент разрушается не сразу. Происходит постепенное повреждение элемента, с последующим его удалением. Алгоритм данного процесса не представлен в изученных авторами работах. В настоящее время данный алгоритм разрабатывается.

### Сжатие вдоль волокон и сжатие матрицы

Постановка задачи взята из работы [12] и аналогична постановке предыдущей задачи. Отличие только в том, что элемент в направлении волокон сжимается и задан коэффициент уменьшения прочности волокна при сжатии  $Y_{cfac} = 3$ .

На рис. 9 приведены результаты, полученные по ПМ ЛОГОС ПА, в сравнении с результатами из работы [12]. Сначала выполняется критерий сжатия матрицы. Далее, т.к. задан коэффициент уменьшения прочности волокна при сжатии  $Y_{cfac}$ , пересчитывается величина  $\sigma_1^{сж} = \sigma_2^{сж} * Y_{cfac} = 0,24$  ГПа. Элемент сжимается вдоль волокон, пока напряжение в направлении волокон не достигнет значения  $0,24$  ГПа. После этого напряжение остается постоянным.

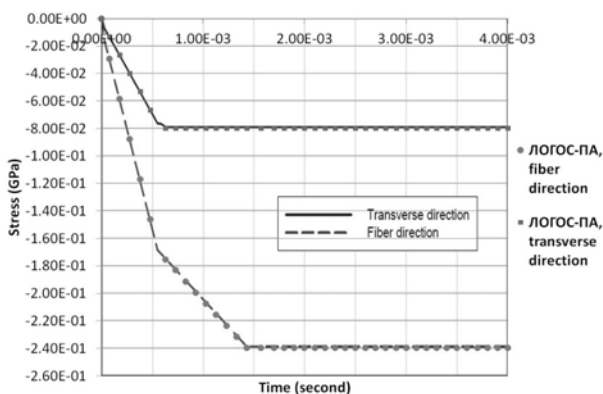


Рис. 9. Зависимость напряжений от времени

### Нагружение пластины с перекрестно-направленными слоями

Цель данного теста – проверить работоспособность реализованного алгоритма расчета напряжений в случае разнонаправленных слоев.

Постановка задачи взята из работы [17]. Геометрия представляет собой квадратную пластину длиной 1 мм. В расчете использовался оболочечный элемент с тремя точками интегрирования по толщине ( $0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$  – направление волокон в слоях) и сдвиговым множителем равным 0,83. Толщина оболочки 0,1 мм. Для моделирования свойств материала использовалась модель разрушения композитного материала. Физико-механические характеристики ма-

териала следующие:  $E_1 = 25$  МПа,  $E_2 = 1$  МПа,  $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,25$ ,  $G_{12} = G_{31} = 12,5$  МПа,  $G_{23} = 5$  МПа.

Края оболочки жестко закреплены. К поверхности оболочки приложено давление 0,001 МПа. В таблице приведены результаты, полученные по ПМ ЛОГОС ПА, в сравнении с результатами из работы [17].

### Смещение центральной точки

Точное решение [17]	Расчет ЛОГОС-ПА	Расчет [17]
0,6697	0,656	0,6773

### Литература

1. Цибереv К. В., Авдеев П. А., Артамонов М. В., Борляев В. В., Величко С. В., Волков А. Ю., Володина Н. А., Дьянов Д. Ю., Корсакова Е. И., Косарим С. С., Кульгина О. Н., Мышкина И. Ю., Наумов А. О., Присташ М. М., Резвова Т. В., Резяпов А. А., Родионов А. В., Симонов Г. П., Спиридонов В. Ф., Стародубов С. В., Тарадай И. Ю., Филимонкин Е. А., Челлаков А. А., Шувалова Е. В., Рябов А. А., Романов В. И., Куканов С. С., Речкин В. Н., Вяткин Ю. А., Корнев А. В., Ермакова Ю. В., Митрофанов О. В., Чупин П. В., Иевлев Д. Г., Душко А. Н., Крундаева А. Н., Новоселов А. В., Габов Д. Пакет программ ЛОГОС. Функциональные возможности для решения задач прочности // Труды XIII международного семинара «Супервычисления и математическое моделирование» – Саров, 2011.
2. Дьянов Д. Ю., Спиридонов В. Ф., Цибереv К. В., Наумова Е. И., Борляев В. В., Стародубов С. В., Шувалова Е. В., Медведкина М. В., Артемова Е. О., Челлаков А. А., Казанцев А. В., Рябов А. А., Романов В. И., Куканов С. С. Пакет программ ЛОГОС. Модуль решения динамических задач прочности // Журнал ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов, 2018. Вып. 1. С. 3–13.
3. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988.
4. Протасов В. Д. Механика в машиноведении композитных конструкций. – Механика композитных материалов, 1987. С. 490–493.
5. Работнов Ю. Н. Механика твердых тел и композиционных материалов – Вестник АН СССР, № 3, 1965, с. 33–38; Механика композитов, Вестник АН СССР, 1979. № 5. С. 50–58.
6. Абросимов Н. А. Методика построения решающей системы уравнений динамического деформирования композитных элементов конструкций. Учебно-методическое пособие. Н. Новгород: 2010. С. 40.
7. Скворцов Ю. В. Механика композиционных материалов. Конспект лекций по дисциплине. Самара: 2013.

8. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. – М.: Машиностроение, 1988. С. 288.

9. Hallquist J. O. LS-DYNA theoretical manual. Livermore Software Technology Corporation, 2006.

10. Hallquist J. O. LS-DYNA keyword user's manual. Volume 1. Livermore Software Technology Corporation, 2009.

11. Композиционные материалы: справочник / под ред. В. В. Васильева и Ю. М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990.

12. Xiahua Zheng. Nonlinear strain rate dependent composite model for explicit finite element analysis. A dissertation presented to the graduate faculty of the University of Akron. 2006.

13. Дьянов Д. Ю., Корсакова Е. И., Симонов Г. П., Циберев К. В., Шувалова Е. В. Результаты верификации моделей упругопластического деформирования и разрушения, реализованных в пакете программ ЛЭГАК-ДК. // Супервычисления и математическое моделирование: Труды XII международного семинара. Саров, 11–15 октября, 2010.

14. Ромащенко В. А. Оценка прочности композитных и металлокомпозитных цилиндров при импульсном нагружении. Сообщение 1. Правила выбора и сравнительный анализ различных критериев

прочности анизотропного материала // Проблемы прочности 2012. № 4. С. 42–57.

15. Радченко П. А., Радченко А. В. Влияние применения различных критериев прочности на поведение анизотропных материалов при динамическом нагружении. Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика [Электронный ресурс] / Международная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко, Новосибирск, Россия, 30 мая – 4 июня 2011 г., Новосибирск, ИВТ СО РАН, 2011, № гос. регистрации – 0321101160, режим доступа: <http://conf.nsc.ru/niknik-90/reportview/40002>, свободный. Загл. с экрана (дата обращения: 17.09.2015).

16. Радченко П. А., Балохонов Р. Р., Радченко А. В. Влияние высокопрочного покрытия, нанесенного газоплазменным напылением, на разрушение стальной подложки при ударе // Современные проблемы науки и образования. – 2012. № 6; URL: [www.science-education.ru/106-7871](http://www.science-education.ru/106-7871) (дата обращения: 17.09.2015).

17. Nguyen-Van H., Mai-Duy N. Tran-Cong T. Analysis of laminated composite plate/shell structures using a stabilized nodal-integrated quadrilateral element // 1<sup>st</sup> International Conference on Modern Design, Construction and Maintenance of Structures. Hanoi, Vietnam, 10-11 December, 2007.