

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАЗЕРНО-ПЛАЗМЕННОГО УСКОРЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В 3D и 2D ПОСТАНОВКЕ

*Н. А. Андреюк, А. И. Голубев, Н. П. Пятаков, Б. П. Якутов*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ» г. Саров Нижегородской обл.

## Введение

Пучки заряженных частиц с энергией порядка десятков ГэВ используются для различных научных и медицинских приложений. С целью их получения создаются ускорительные комплексы внушительных размеров. Причем для дальнейшего увеличения энергии ускоряемых частиц, приходится использовать все более масштабные установки. Например, по проекту Международного линейного коллайдера (ILC) предполагается, что для получения ускоренных лептонов с энергией 500 ГэВ, ускоритель должен быть длиной 40 км. Необходимость таких больших размеров вызвана тем, что существует ограничение сверху на поля, ускоряющие частицы в таких установках. Чтобы не допустить электрического пробоя среды, напряженность электрического поля в ускорителях обычно не превышает значений  $10^4$ – $10^5$  В/см.

Однако, существуют альтернативные методы ускорения частиц в лазерных полях и в полях разделения зарядов в плазме, лишенные ограничений, связанных с пробоем среды, например, лазерно-плазменные ускорители электронов [1]. Напряженность ускоряющего поля, создаваемого в плазменных ускорителях, достигает значений порядка  $10^9$ – $10^{10}$  В/см при длине ускорения от нескольких миллиметров до нескольких сантиметров. Рекордной, на настоящий момент, является энергия 4,2 ГэВ у электронов, ускоренных в плазме на длине 9 см лазерным излучением мощностью 300 ТВт [2]. При этом способе ускорения мощный короткий лазерный импульс, распространяясь в докритической плазме, возбуждает волну колебаний электронной плотности, идущую вслед за ним. В результате в плазме генерируются продольные электрические поля, ускоряющие электроны. Так как процесс возбуждения электронной плазменной волны лазерным импульсом в чем-то аналогичен возбуждению корабельной волн на поверхности воды, то их принято называть кильватерными.

В данной работе представлен анализ результатов 3D и 2D численного моделирования ускорения электронов в плазменной кильватерной волне. Расчеты были проведены при помощи разработанного во ВНИИЭФ трехмерного параллельного релятивистского кода PLASMA-3P (3D3V), основанного на ме-

тоде «частиц-в-ячейке». Код PLASMA-3P является дальнейшим развитием двумерного кода PLASMA-2P [3]. Численное моделирование было проведено для различных режимов генерации плазменной кильватерной волны. Моделирование проводилось в двумерной и трехмерной постановках с целью выяснить – существуют ли значимые отличия результатов 2D и 3D моделирования.

## Возбуждение кильватерной волны лазерным импульсом. Основные особенности режима кильватерного ускорения электронов

Кильватерная волна возбуждается в плазме под воздействием ультракороткого, мощного (порядка  $10^{18}$ – $10^{20}$  Вт/см<sup>2</sup>) лазерного излучения, либо пучка высокоэнергетических электронов. Она представляет собой череду сгущений и разрежений электронной плотности, следующей за «драйвером» (лазерным импульсом или электронным сгустком). В данной работе моделируется первый способ генерации кильватерной волны, который впервые был предложен в 1979 г. в работе [4]. На рис. 1 схематично изображен первый период плазменной кильватерной волны.

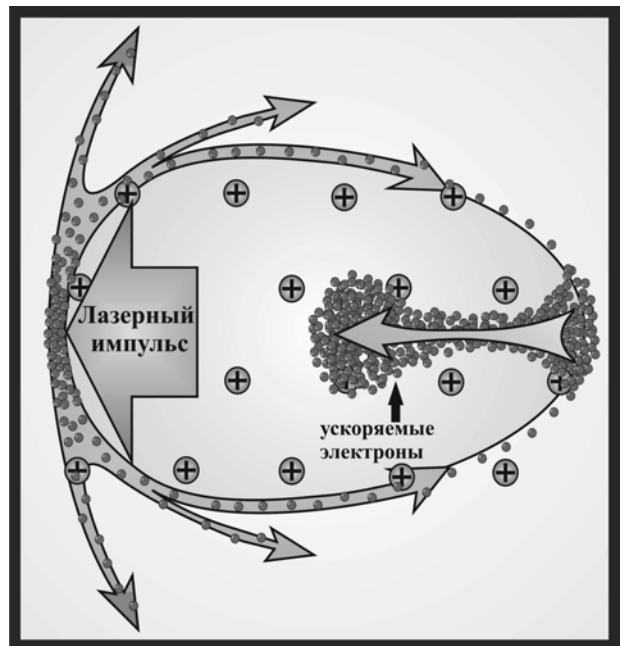


Рис. 1. Схема ускорения электронов в плазменной кильватерной волне

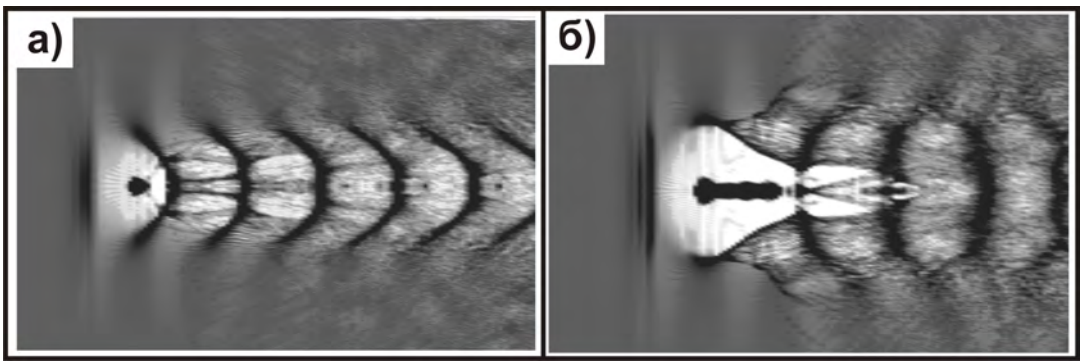


Рис. 2. Распределения плотности электронов плазменной кильватерной волне, полученные в трехмерных расчётах при разной интенсивности лазерного импульса: а – нелинейный профиль кильватерной волны, полученный в при интенсивности лазерного импульса  $1 \times 10^{19}$  Вт/см<sup>2</sup>, б – профиль волны, характерной для *bubble*-режима ускорения, интенсивность лазерного излучения в данном случае составляет  $2 \times 10^{19}$  Вт/см<sup>2</sup>

Электроны обозначены маленькими кружками, ионы – большими со знаком «плюс». Лазерный импульс распространяется справа налево и отмечен большой стрелкой. Изогнутыми стрелками показано направление разлета электронов.

На рис. 1 большой стрелкой отмечен лазерный импульс, маленькими кружками показаны электроны плазмы, большими со знаком «плюс» – ионы.

Как видно из рис. 1, распространяясь в плазме докритической плотности, лазерный импульс вытесняет электроны из области взаимодействия излучения с плазмой за счет действия пондеромоторной силы  $\vec{F}_p \sim -\nabla I$ . Положительно заряженные ионы остаются, при этом, практически неподвижны. Таким образом, позади лазерного импульса образуется зона избыточного положительного заряда, которая в свою очередь, начинает притягивать электроны обратно. Вследствие чего, в плазме возбуждаются колебания плотности электронов, следующие за лазерным импульсом. Эта плазменная волна, которую еще называют кильватерной, совершает колебания с плазменной частотой  $\omega_{pl} = (4\pi n_e e^2 / m_e)^{1/2}$ , где  $n_e$  – начальная плотность электронов плазмы,  $e$  – заряд,  $m_e$  – масса электрона и распространяется с фазовой скоростью равной групповой скорости лазерного импульса:

$$v_{ph} = v_g \approx c \sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega_0^2} \quad (1)$$

где  $c$  – скорость света,  $\omega_0$  – несущая частота лазерного импульса. В область избыточного положительного заряда, вследствие самоинжекции, могут попасть фоновые электроны плазмы и под действием продольного ускоряющего поля набрать энергию от сотен до нескольких тысяч МэВ. При этом, находясь в ускоряющей фазе, электроны постоянно набирают скорость, стремясь к скорости света  $v_e \rightarrow c$ . Скорость плазменной волны остается постоянной. В результате, электроны могут обогнать плазменную волну и перейти в область с тормозящим продоль-

ным электрическим полем. Длину участка плазмы, где происходит только ускорение электронов, принято называть длиной дефазировки –  $l_d$ . Если считать, что электрон в плазменной волне движется со скоростью света, то длина дефазировки равна [5]:

$$l_d = \frac{\lambda_{pl}}{2(c - v_{ph})} c \approx \frac{\omega_0^2}{\omega_{pl}^2} \lambda_{pl} \quad (2)$$

где  $\lambda_{pl}$  – длина одного периода плазменной волны.

Таким образом, максимальное приращение энергии, которое могут набрать электроны, ускоряясь в кильватерной волне равно:

$$\Delta E = qE_l l_d \approx qE_l \frac{\omega_0^2}{\omega_{pl}^2} \lambda_{pl} \quad (3)$$

где  $q$  – заряд электрона,  $E_l$  – среднее значение продольного ускоряющего поля. Выражение (3) хорошо лишь для приблизительной оценки, так как в нем не учитываются нелинейные эффекты, возникающие при кильватерном ускорении, например, самофокусировка лазерного импульса. Данные эффекты приводят к изменению амплитуды ускоряющего поля и длины дефазировки.

### Различные типы плазменной кильватерной волны. *Bubble*-режим ускорения

В зависимости от длительности, пространственного профиля и интенсивности лазерного импульса, а также плотности плазмы кильватерная волна может иметь различную форму. При воздействии на плазму докритической плотности коротким фемтосекундным лазерным импульсом возбуждается кильватерная волна с линейным и нелинейным профилем. При этом пространственная длина лазерного импульса  $L_\tau = c\tau_L$  должна быть порядка, либо меньше половины плазменной длины волны  $\lambda_p/2 = \pi c/\omega_{pl}$  ( $\tau_L$  – длительность лазерного импульса,  $c$  – скорость света). В качестве мишени традиционно используют

плазму гелия с начальной плотностью электронов порядка  $10^{17}$ – $10^{19}$   $\text{см}^{-3}$ . Обычно при интенсивности порядка  $10^{17}$ – $10^{18}$   $\text{Вт}/\text{см}^2$  и плотности электронов меньше  $10^{19}$   $\text{см}^{-3}$  в плазме возбуждается линейная кильватерная волна – продольное ускоряющее электрическое поле имеет синусоидальную форму и позади лазерного импульса образуется много периодов плазменной волны с одинаковой амплитудой. При увеличении интенсивности до значения  $10^{19}$   $\text{Вт}/\text{см}^2$  и выше наблюдается переход в режим генерации нелинейной кильватерной волны. В этом случае амплитуда ускоряющего поля возрастает по сравнению с линейным режимом, приобретает пилообразный характер, но начинает быстро затухать от периода к периоду. В пределе, при достаточной величине интенсивности импульса наблюдается так называемый режим «пузыря» или *bubble*-режим – в плазменной волне остается только одна–две области, практически полностью лишенных фоновых электронов.

На рис. 2 показаны полученные при трехмерном численном моделировании картины плотности электронов в нелинейном режиме и в *bubble*-режиме.

Лазерное излучение и кильватерная волна распространяются на рис. 2 справа налево. Черным цветом обозначены области сгущения электронной плотности, белым – разрежения.

Начальная плотность электронов плазмы во всех расчетах была равна  $2 \times 10^{19}$   $\text{см}^{-3}$ .

На рис. 2 отчетливо видна область избыточного положительного заряда (обозначена белым цветом). Видно как в эту область у ее основания втягиваются фоновые электроны плазмы. На обоих рисунках отчетливо видны сгустки ускоряемых электронов. Численное моделирование *bubble*-режима ускорения было впервые выполнено в работе [6] в 2002 году. Очень скоро независимо, тремя группами ученых, данный режим был экспериментально подтвержден [7], [8], [9]. Одной из главных особенностей этого типа генерации кильватерной волны является возможность получения моноэнергетических пучков ускоренных электронов, так как все электроны ускоряются в одном периоде плазменной волны.

### Постановка задачи и метод расчета

Наиболее распространенным инструментом моделирования процесса ускорения электронов в плазменной кильватерной волне служат PIC-коды (Particle-In-Cell) – математические программы, моделирующие взаимодействие лазерного излучения с бесстолкновительной плазмой путем решения системы уравнений Максвелла – Власова методом «частиц-в-ячейке». Подробное описание основных положений этого метода содержится в книге [10]. В настоящей работе для численного моделирования лазерно-плазменного ускорения электронов использовался разработанный во ВНИИЭФ релятивистский параллельный трехмерный PIC-код PLASMA-3P. Расчетная область, плазменная мишень и система

координат, принятая при моделировании, схематически показаны на рис. 3:

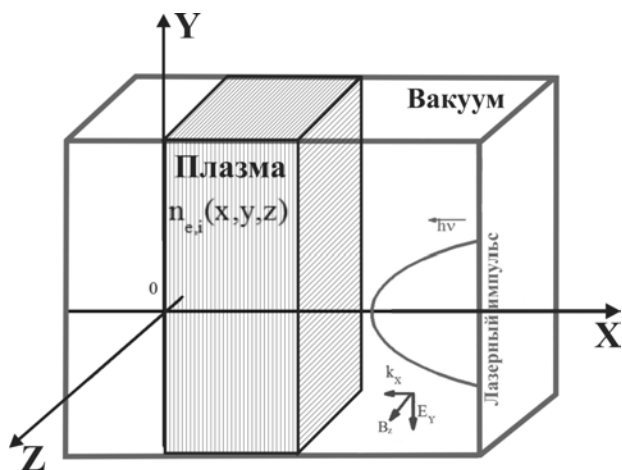


Рис. 3. Расчетная область для численного моделирования лазерно-плазменного ускорения электронов

В качестве мишени была выбрана плазма гелия с плотностью электронов  $2 \times 10^{19}$   $\text{см}^{-3}$  и длиной 0,43 мм. По ширине (вдоль осей Y и Z) размеры мишени были равны размерам расчетной области – 0,035 мм. Расчеты проводились для трех значений интенсивности линейно поляризованного лазерного импульса –  $5 \times 10^{18}$ ,  $1 \times 10^{19}$  и  $2 \times 10^{19}$   $\text{Вт}/\text{см}^2$ , длительностью 12 фс. В зависимости от интенсивности лазерного излучения в расчетах было реализовано два режима LWFA (Laser Wakefield Acceleration): нелинейный и *bubble*-режим (режим «пузыря» – при интенсивности  $2 \times 10^{19}$   $\text{Вт}/\text{см}^2$ ). Также для интенсивности  $2 \times 10^{19}$   $\text{Вт}/\text{см}^2$  (в режиме «пузыря») была проведена серия расчетов с различной длительностью лазерного излучения. Помимо  $\tau_0 = 12$  фс, были проведены расчеты для значений  $0,5\tau_0 = 6,2$  фс,  $1,5\tau_0 = 18,6$  фс и  $2\tau_0 = 24,8$  фс. Расчетная область имела размеры: 0,47 мм вдоль оси X и 0,035 мм по осям Y и Z. Мишень и расчетная область в двумерном случае имели те же размеры по осям X и Y, что и в трехмерном. Мишень моделировалась как двукратно ионизованная плазма гелия. Расчетная сетка в трехмерном расчете состояла из  $\approx 1,069$  миллиарда ячеек, а для моделирования плазмы использовалось  $\approx 974,7$  миллионов квазичастиц. В двумерном расчете та же задача моделировалась на сетке из 3,6 миллионов ячеек, с использованием 55,2 миллионов квазичастиц. Число точек расчетной сетки, приходящееся на плазменную длину волны, что является критерием точности расчета, в обоих случаях было одинаковым – 27 точек. Таким образом, трехмерный расчет требовал большего числа ячеек только за счет геометрии. Время одного расчета в трехмерном случае составляло 5,3 часа, в двумерном расчете – 0,6 часа.

## Результаты расчетов. Сравнение энергетических спектров ускоренных электронов

По итогам численного моделирования было проведено сравнение результатов двумерных расчетов с трехмерными расчетами. В качестве основных характеристик рассматривались энергетические спектры электронов, величина продольного ускоряющего поля  $E_x$ , пространственные картины распределения электронов. Было установлено, что величины продольного ускоряющего поля  $E_x$ , формирующегося при вхождении излучения в плазму, в трехмерном и двумерном случаях совпадают. Для примера на рис. 4 приведен график зависимости ускоряющего поля  $E_x$  от координаты  $X$  для интенсивности лазерного импульса  $5 \times 10^{18}$  Вт/см<sup>2</sup>.

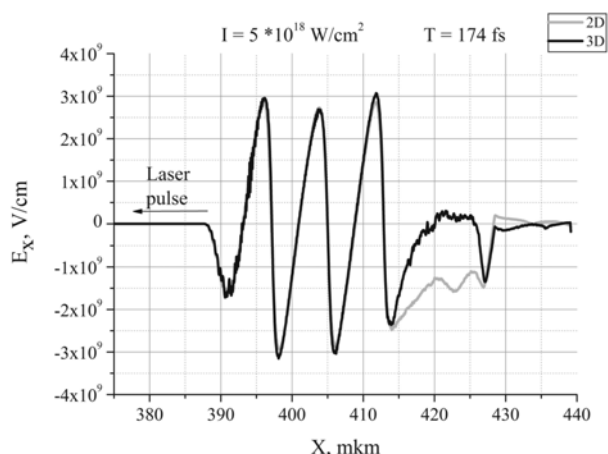


Рис. 4. График зависимости продольного ускоряющего поля  $E_x$  от координаты  $X$  для интенсивности лазерного импульса  $5 \times 10^{18}$  Вт/см<sup>2</sup>

На рис. 4 показаны графики, полученные в двумерном и трехмерном расчете на один и тот же момент времени – 174 фс от начала расчета, лазерный импульс успел пройти в плазме длину  $\approx 40$  мкм. Амплитуда поля равна  $3 \times 10^9$  В/см.

Из рис. 4 видно, что в начале расчета для двумерного и трехмерного случаев ускоряющее поле кильватерной волны полностью совпадает.

Согласно формуле (3) поле  $E_x$  является определяющей характеристикой, влияющей на процесс ускорения электронов, при неизменной плотности плазмы и интенсивности лазерного импульса. Следовательно, можно ожидать, что максимальная энергия электронов и их энергетические спектры в двумерных и трехмерных расчетах также будут совпадать, однако этого не происходит и различия весьма существенны. Расчеты показали, что несмотря на то, что в начале в плазме в двумерном и трехмерном случаях формируются идентичные профили кильватерной волны, их эволюция идет по-разному и в итоге, по прошествии 430 мкм, сгустки ускоренных электронов имеют различные энергии, заряд. Это происходит из-за того, что области разрежения и сгущения плазмы из которых состоит кильватерная волна являются существенно трехмерными структурами, двумерное описание ускорения электронов становится недостаточным. Наиболее хорошо это заметно в случае с максимальной интенсивностью –  $2 \times 10^{19}$  Вт/см<sup>2</sup>, когда реализуется bubble-режим ускорения. На рис. 5 показаны картины плотности электронов данного режима для двумерного и трехмерного расчета в моменты времени, когда лазерный импульс прошел в плазме 60 и 380 мкм.

Из рис. 5 хорошо видно, что в обоих случаях в плазме формируется одинаковая волна.

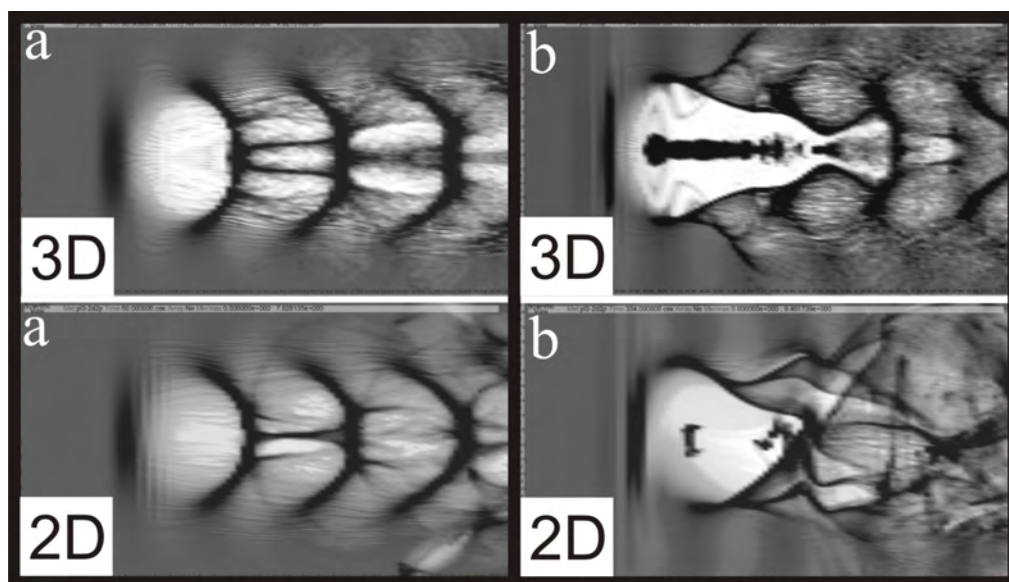


Рис. 5. Распределения плотности электронов в плазменной кильватерной волне, полученные в двумерном (2D) и трехмерном (3D) расчётах в *bubble*-режиме (интенсивность лазерного импульса –  $2 \times 10^{19}$  Вт/см<sup>2</sup>): а – момент времени, соответствующий началу расчета – лазерный импульс прошел в плазме гелия  $\approx 60$  мкм, б – момент времени, соответствующий концу расчета, лазерный импульс прошел в плазме 380 мкм (общая длина – 420 мкм)

Однако в конце расчета, в двумерном случае, пузырь имеет в 1,5 раза меньшую длину, чем в трехмерном, и его структура начинает распадаться. Также в трехмерном случае пучок электронов имеет форму «стержня», характерного для *bubble*-режима, в отличие от двумерного случая. Электроны, формирующие данный «стержень», при достаточной длине ускорения группируются, формируя моноэнергетический пучок. В двумерном расчете хорошо видны два пучка электронов – один, который ускорился с начала инжекции электронов в пузырь и теперь находящийся в области дефазировки, и второй – в основании пузыря, только вступающий в процесс ускорения.

Наибольшие различия в спектрах ускоренных электронов наблюдаются при интенсивностях  $5 \times 10^{18}$  и  $2 \times 10^{19}$  Вт/см<sup>2</sup>. Сравнения этих спектров для двумерного и трехмерного расчетов приведены, соответственно на рис. 6 и рис.7:

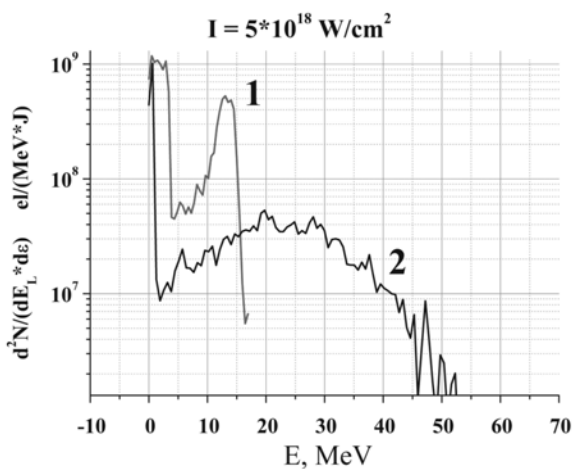


Рис. 6. Спектр всех электронов, ускоренных в расчете с интенсивностью лазерного импульса  $5 \times 10^{18}$  Вт/см<sup>2</sup> и вылетевших в угол  $10^\circ$ : 1 – двумерный расчет (2D), 2 – трехмерный расчет (3D)

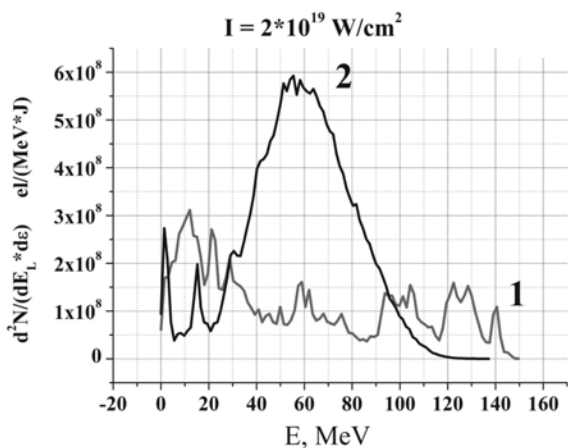


Рис. 7. Спектр всех электронов, ускоренных в расчете с интенсивностью лазерного импульса  $2 \times 10^{19}$  Вт/см<sup>2</sup> (*bubble*-режим) и вылетевших в угол  $10^\circ$ : 1 – двумерный расчет (2D), 2 – трехмерный расчет (3D)

Из рис. 6 и рис. 7 видно, что в случае с интенсивностью  $5 \times 10^{18}$  Вт/см<sup>2</sup>, в трехмерном расчете спектр электронов вытянут, с отсечкой на энергии 50 МэВ и имеет много пиков, что соответствует последовательности ускоренных пучков электронов так как в этом случае кильватерная волна имеет много периодов, ускоряющих электроны. При интенсивности  $2 \times 10^{19}$  Вт/см<sup>2</sup>, в *bubble*-режиме, спектр трехмерного расчета хорошо показывает особенности этого типа кильватерной волны – спектр имеет максимум при энергии 60 МэВ и ширину около 80 МэВ по основанию, что соответствует пучку электронов, имеющему форму «стержня», ускоряющемуся в одном периоде. Двумерные спектры в обоих случаях полностью отличаются от трехмерного расчета, что показывает недостаточность двумерного описания.

Серия расчетов, в которой менялась длительность лазерного импульса, подтвердила недостаточность двумерного описания *bubble*-режима. Также она показала, что для более эффективной генерации электронов при данных плотности плазмы, интенсивности лазерного импульса целесообразно вместо принятой изначально длительности  $\tau_0 = 0,5\lambda_p/c \approx 12$  фс, взять длительность в 1,5 раза большую  $\tau = 1,5\tau_0 = 0,75\lambda_p/c \approx 18,6$  фс, что отображено на рис. 8:

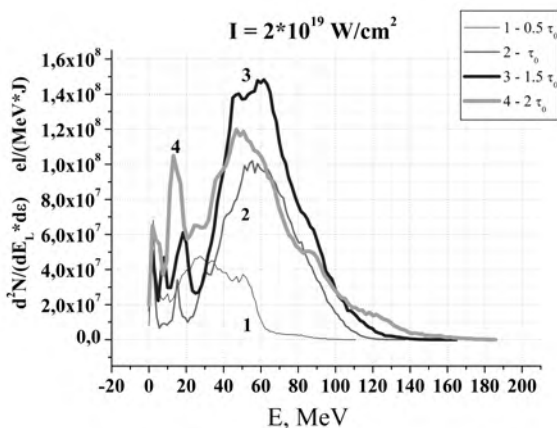


Рис. 8. Спектры всех электронов, ускоренных в трехмерных расчетах с интенсивностью лазерного импульса  $2 \times 10^{19}$  Вт/см<sup>2</sup> (*bubble*-режим) и различной длительностью лазерного излучения: 1 – расчет с  $\tau = 0,5\tau_0 = 6,2$  фс, 2 – расчет с  $\tau_0 = 12$  фс, 3 – расчет с  $\tau = 1,5\tau_0 = 18,6$  фс, 4 – расчет с  $\tau = 2\tau_0 = 24,8$  фс

На рис. 8 показаны только спектры трехмерных расчетов, спектр 2 с «базовой» длительностью лазерного излучения  $\tau_0 = 0,5\lambda_p/c \approx 12$  фс, показан также на рис. 7. Видно, что наиболее эффективно электроны в *bubble*-режиме при данных параметрах лазерного импульса, плазмы ускоряются при длительности в 1,5 раза большей  $\tau = 1,5\tau_0 \approx 18,6$  фс, что, по-видимому, связано с увеличением размеров «пузыря». Дальнейшее увеличение длительности импульса не приводит к последующему росту энергии электронов, что показывает спектр 4, где  $\tau = 2\tau_0 \approx 24,8$  фс. Соот-

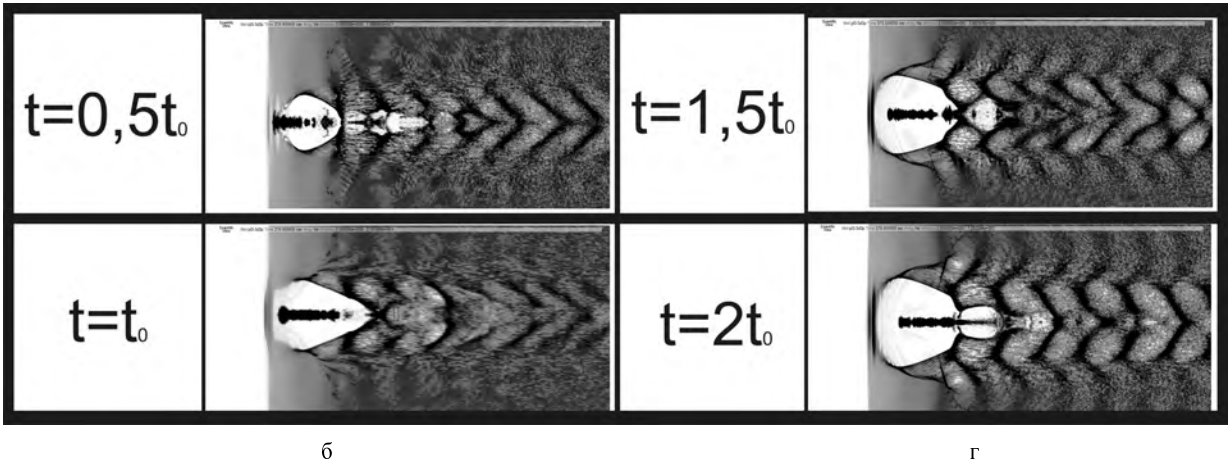


Рис. 9. Распределения плотности электронов в плазменной кильватерной волне на момент вылета сгустка ускоренных электронов из плазмы, полученные трёхмерных расчётах в *bubble*-режиме (интенсивность лазерного импульса –  $2 \times 10^{19}$  Вт/см<sup>2</sup>) при различной длительности лазерного излучения: а – расчёт с  $\tau = 0,5\tau_0 = 6,2$  фс; б – расчёт с  $\tau_0 = 12$  фс; в – расчёт с  $\tau = 1,5\tau_0 = 18,6$  фс; г – расчёт с  $\tau = 2\tau_0 = 24,8$  фс

ветствующие данным спектрам картины плотности электронов, показаны на рис. 9.

Видно, что уменьшение длительности импульса до  $0,5\tau_0 = 0,25\lambda_p/c = 6,2$  фс приводит к уменьшению размеров ускоряющей области («пузыря»), а увеличение свыше  $1,5\tau_0$  (до  $2\tau_0$ ), заметных изменений в процесс ускорения электронов не вносит.

### Заключение

При помощи разработанного во ВНИИЭФ параллельного полностью релятивистского кода PLASMA-3P (3D3V), основанного на методе «частиц-в-ячейке», проведено трёхмерное и двумерное численное моделирование ускорения электронов в нелинейном и в *bubble*-режиме возбуждения плазменной кильватерной волны.

Цель – выяснить: существуют ли значимые отличия результатов 2D и 3D моделирования. Расчеты проводились для интенсивностей лазерного излучения  $5 \times 10^{18}$ ,  $1 \times 10^{19}$  и  $2 \times 10^{19}$  Вт/см<sup>2</sup> и начальной плотности электронов плазмы  $2 \times 10^{19}$  см<sup>-3</sup>, длина плазмы была равна 430 мкм.

Расчеты показали, что в двумерном и трёхмерном моделировании, несмотря на формирование в плазме идентичных профилей кильватерной волны в начальной стадии, в дальнейшем их эволюция идет по-разному. В итоге, через 430 мкм, сгустки ускоренных электронов имеют различную энергию, заряд. Это происходит из-за того, что области разрежения и сгущения плазмы, из которых состоит кильватерная волна, являются существенно трёхмерными структурами, и двумерное описание ускорения электронов становится недостаточным. Наиболее хорошо это заметно в случае с максимальной интенсивностью –  $2 \times 10^{19}$  Вт/см<sup>2</sup>, когда реализуется *bubble*-режим ускорения. В этом случае в трёхмерном расчёте спектр электронов имеет максимум при энергии

60 МэВ и ширину около 80 МэВ по основанию, что соответствует пучку электронов, имеющему форму «стержня», ускоряющемуся в одном периоде. В двумерном расчёте плазменная структура «пузыря» разрушается в конце расчёта, и спектры вылетевших частиц полностью отличаются от трёхмерного расчёта. В целом, спектры, полученные в двумерных расчётах, плохо отражают особенности соответствующих режимов генерации плазменной волны и можно сделать вывод, что двумерное описание процесса ускорения электронов в кильватерной волне является недостаточным.

Серия расчетов, в которой менялась длительность лазерного импульса, показала, что в *bubble*-режиме ускорения целесообразно увеличение пространственной длины лазерного импульса, как минимум в 1,5 раза по сравнению с  $\tau_0 = 0,5\lambda_p/c$ , до величины  $L_\tau = c\tau_L = 0,75\lambda_p$ , что приводит к более эффективной генерации ускоренных электронов.

### Литература

1. Костюков И. Ю., Пухов А. М. // Плазменные методы ускорения электронов: современное состояние и перспективы // УФН, 2015. Т. 185, № 1. С. 89–96.
2. Leemans W P et al. // Multi-GeV Electron Beams from Capillary-Guided Subpetawatt Laser Pulses in the Self-Trapping Regime // Phys. Rev. Lett. 2014. **113** 245002.
3. Голубев А. И., Сысоева Т. Г., Якутов Б. П. // Генерация ионов в тонких мишенях лазерными импульсами круговой поляризации / Проблемы физики высоких плотностей энергии. Труды международной конференции XII Харитоновские тематические научные чтения // Россия, Саров, 19–23 апреля 2010 г. С. 369–374.
4. T. Tajima, J. M. Dawson. Laser Electron Accelerator // Phys. Rev. Lett. V. 43, N. 4. 1979. P. 267–270.

5. Андреев Н. Е., Горбунов Л.М. // Лазерно-плазменное ускорение электронов // УФН, 1999. Т. 169, № 1. С. 53–58.

6. Pukhov A., Meyer-ter-Vehn J. // Laser wake field acceleration: the highly non-linear broken-wave regime // Appl. Phys. 2002. Vol. 74, P. 355.

7. Faure J., Glinec Y., Pukhov A. et. al. // A laser-plasma accelerator producing monoenergetic electron beams. // Nature. 2004. Vol. 431. P. 541.

8. Geddes C. G. R. et. al. // High quality electron beams from a laser wakefield accelerator using plasma-channel guiding. // Nature. 2004. Vol.431. P. 538.

9. Mangles S.P.D., Murphy C. D. // Monoenergetic beams of relativistic electrons from intense laser plasma interactions // Nature 2004. Vol. 431. P. 535.

10. Березин Ю. А., Вшивков В. А. // Метод частиц в динамике разреженной плазмы. // Новосибирск: Наука, 1980. С. 96.