

ГИДРОЛОГИЧЕСКИЙ МОДУЛЬ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ «НИМФА»

А. В. Баранов, О. И. Бутнев, М. Л. Сидоров, В. А. Пронин

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров Нижегородская обл.

Модуль расчета поверхностного стока в программном комплексе «НИМФА»

Расчетный модуль поверхностного стока в составе программного комплекса (ПК) «НИМФА» [1] разрабатывается в рамках контракта с ГК «РОСАТОМ».

На данный момент этот модуль состоит из двух частей:

- модуль расчета уравнений мелкой воды в диффузионном приближении (2D течение по поверхности);
- гидрологический модуль расчета одномерных уравнений Сен-Венана [2] для открытых водотоков (1D течение в реках).

2D модель движения воды по поверхности позволяет описывать: процесс переноса загрязнений по поверхности в результате выпадения осадков, снеготаяния, паводкового наводнения, создавать карты риска при наводнениях, определять возможные меры по предотвращению наводнений, процесс образования новых водоемов в результате запруживания рек и т. д.

При разработке гидрологического модуля перед авторами была поставлена задача выбора оптимально подходящей модели. В результате проведенного исследования выяснилось, что для моделирования требуемых процессов используют: уравнения мелкой воды (или уравнения Сен-Венана) – описывает такие явления, как образование волн, приливов и отливов и другие, кинетическое приближение уравнений мелкой воды применяется в случае, когда уклон русла каналов, стоковой поверхности постоянен, диффузионное приближение уравнений мелкой воды позволяет учитывать изменение рельефа, но при этом пренебрегает так же как и кинетическое всеми инерционными и турбулентными членами из уравнений мелкой воды, а так же состоит всего из одного уравнения, упрощая реализацию. Поэтому для моделирования поверхностного стока в рамках ПК «НИМФА» было решено использовать именно диффузионное приближение.

Для моделирования поверхностного стока используется неявная схема, решаемая методом простой итерации.

С целью охвата класса задач, моделирующих течение по открытым каналам и рекам основываясь на опыте создания модуля поверхностного стока,

было решено применить 1D диффузионное приближение уравнений мелкой воды (Сен-Венана) для каналов с прямоугольным сечением, решаемое неявной схемой. Данный элемент предназначен для описания процесса переноса загрязнений по рекам, ручьям и техногенным каналам. Такой подход в будущем позволит выполнить сопряжения 2D модели поверхностного стока и 1D модели течения в открытых каналах.

Модель поверхностного стока. Формулировка. Аппроксимация

Уравнения мелкой воды (уравнения Сен-Венана) без учета турбулентных составляющих выглядят следующим образом.

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = q \\ \frac{\partial uh}{\partial t} + \frac{\partial u^2 h}{\partial x} + \frac{\partial uvh}{\partial y} = \tau_x - u \frac{\eta^2 g \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} - gh \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial vh}{\partial t} + \frac{\partial uvh}{\partial x} + \frac{\partial v^2 h}{\partial y} = \tau_y - v \frac{\eta^2 g \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} - gh \frac{\partial H}{\partial y} \end{cases}$$

h – глубина воды [м]; H – уровень воды ($H = h + z$) [м];
 z – высота земной поверхности [м];
 u – компонента вектора скорости по оси ox [м/сек];
 v – компонента вектора скорости по оси oy [м/сек];
 τ – вектор касательных напряжений [м²/сек];
 g – ускорение свободного падения [м/сек²];
 η – коэффициент шероховатости (Маннинга) [сек/м^{1/3}].

Уравнения мелкой воды требуют дополнительных усилий для преодоления проблемы (повторного) смачивания/осушения зон в области. Также данные уравнения чувствительны к ошибкам в цифровой модели рельефа (ЦМР).

Для описания процесса поверхностного стока в ПК НИМФА используется модель неинерциальной (диффузионной) аппроксимации уравнений мелкой воды уравнений Сен-Венана. Диффузионное приближение данной системы получается, если пренеб-

речь инерционными слагаемыми, $\frac{\partial uh}{\partial t} + \frac{\partial u^2 h}{\partial x} + \frac{\partial uvh}{\partial y}$,

$\frac{\partial vh}{\partial t} + \frac{\partial uvh}{\partial x} + \frac{\partial v^2 h}{\partial y}$ и вектором касательных напряже-

ний (τ_x, τ_y) . Разделим второе и третье уравнение на gh :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = q \\ u \frac{\eta^2 \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} + \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ v \frac{\eta^2 \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} + \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Данную систему можно свести к одному уравнению, для этого выразим компоненты градиента уровня во втором и третьем уравнении системы, и возведем их в квадрат

$$\begin{cases} -u \frac{\eta^2 \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} = \frac{\partial H}{\partial x} \\ -v \frac{\eta^2 \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} = \frac{\partial H}{\partial y} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u^2 \frac{\eta^4 (u^2 + v^2)}{h^{8/3}} = (\nabla_x H)^2 \\ v^2 \frac{\eta^4 (u^2 + v^2)}{h^{8/3}} = (\nabla_y H)^2 \end{cases}$$

Сложим два уравнения и выразим модуль вектора скорости через модуль градиента уровня

$$\begin{aligned} \frac{\eta^4 (u^2 + v^2)^2}{h^{8/3}} &= (\nabla_x H)^2 + (\nabla_y H)^2 \\ (u^2 + v^2) &= \frac{h^{4/3}}{\eta^2} |\nabla H| \\ \sqrt{(u^2 + v^2)} &= \frac{h^{2/3}}{\eta} \sqrt{|\nabla H|} \end{aligned}$$

Подставим выражение для модуля вектора скорости во второе и третье уравнения системы:

$$\begin{cases} -u \frac{\eta}{h^{2/3}} \sqrt{|\Delta H|} = \frac{\partial H}{\partial x} \\ -v \frac{\eta}{h^{2/3}} \sqrt{|\Delta H|} = \frac{\partial H}{\partial y} \end{cases}$$

Из этой системы выразим компоненты вектора скорости

$$\begin{cases} u = -\frac{h^{2/3}}{\eta \sqrt{|\Delta H|}} \frac{\partial H}{\partial x} \\ v = -\frac{h^{2/3}}{\eta \sqrt{|\Delta H|}} \frac{\partial H}{\partial y} \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение системы, получаем уравнение диффузионной волны:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^{5/3}}{\eta \sqrt{|\nabla H|}} \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^{5/3}}{\eta \sqrt{|\nabla H|}} \frac{\partial H}{\partial y} \right) = q$$

Последнее выражение, введя обозначение $Q = \frac{-h^{5/3} \nabla(z+h)}{\eta \sqrt{|\nabla(z+h)|}}$, можно записать в компактном виде следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot Q = q$$

Уравнение решается в двумерной области G .

Для уравнения ставятся:

начальные условия $h(x, y, t) = h^0(x, y)$,

граничные условия I-рода $h(x, y, t)|_{G_2} = h^{G1}(x, y, t)$,

граничные условия II-рода $Q \cdot n|_{G_2} = \frac{h^{5/3}}{\eta} \frac{\partial z}{|\nabla z|}$.

Для численного решения приведенных выше уравнений используется метод конечных объемов и неявная схема. Область моделирования покрывается сеткой, состоящей из многоугольных конечных объемов. Проинтегрируем полученное выше уравнение по многоугольной ячейке C с границей L (рис. 1).

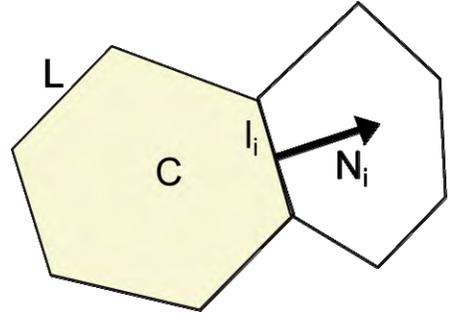


Рис. 1. Ячейка интегрирования

Ниже приведем выкладки этапов интегрирования:

$$\int_S \frac{\partial h}{\partial t} dS + \int_S \nabla \cdot Q dS = \int_S q dS$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} \cdot S_C + \int_S \nabla \cdot Q dS = q \cdot S_C$$

Применим формулу Грина и получим:

$$\frac{\partial h}{\partial t} \cdot S_C + \oint_L Q \cdot \bar{n} dL = q \cdot S_C.$$

Применив данную формулу для каждой ячейки области, получим систему нелинейных уравнений. Решение полученной системы ищется итерационно, при этом коэффициенты на границах, являющиеся функциями водного столба, берутся с предыдущей итерации:

$$\frac{S_C}{\Delta t} h^{\gamma+1} + \sum_{i=1}^k \left[\left[-\frac{\frac{5}{h^3}}{\eta \sqrt{|\nabla(z+h)|}} \right]^{\gamma} \nabla(z+h)^{\gamma+1} \cdot \bar{N} \cdot l \right] = \frac{S_C}{\Delta t} h^n + \varepsilon$$

Обозначим реберный коэффициент $F^v = \left[-\frac{\frac{5}{h^3} l}{\eta \sqrt{|\nabla(z+h)|}} \right]^{\gamma}$, v -номер итерации по нелинейности.

Значение $h^{5/3}$ на ребре (P2,P4) (рис. 2) берется из ячейки CL, если $(z+h)_{CR}^{\gamma} < (z+h)_{CL}^{\gamma}$, а иначе из CR (течет оттуда, где $z+h$ больше). Модуль градиента водного горизонта также берется из ячейки против потока. Градиент высоты водного горизонта $\nabla(z+h)$ в ячейке аппроксимируется с помощью формулы Грина:

$$\nabla(z+h) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{cellFaces} \left[(z+h)_{CL}^{\gamma+1} + (z+h)_{CR}^{\gamma+1} \right] l \bar{N}}{S_{cell}}$$

Единичная нормаль \bar{N}_l к ребру l_i (P2,P4) – внешняя относительно ячейки C.

$R_{P1, P3}$ – расстояние от центра ячейки CL до центра ячейки CR

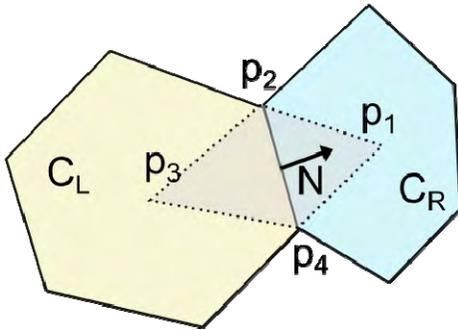


Рис. 2. Две соседние ячейки на плоскости

Итоговое уравнение имеет вид:

$$\frac{S_C}{\Delta t} h^{\gamma+1} + \sum_{i=1}^k \left(F^v \left[\frac{h_{CR}^{\gamma+1} - h_{CL}^{\gamma+1}}{R_{P1, P3}} \right] \right)_i = \frac{S_C}{\Delta t} h^n - \sum_{i=1}^k \left(F^v \left[\frac{z_{CR} - z_{CL}}{R_{P1, P3}} \right] \right)_i + \varepsilon$$

Данное уравнение, записанное для ячейки C, наглядно демонстрирует схему заполнения строки матрицы:

• Вклад от ячейки в правую часть равен $\frac{S_C}{\Delta t} h^n + \varepsilon$.

• Вклад на диагональ от нестационарного слагаемого равен $\frac{S_C}{\Delta t}$ (коэффициент перед $h^{\gamma+1}$).

• Вклад от каждого ребра ячейки на диагональ равен $\left(\left[\frac{F^{\gamma}}{R_{P1, P3}} \right] \right)_i$ и на внедиагональный элемент – $\left(\left[\frac{F^{\gamma}}{R_{P1, P3}} \right] \right)_i$.

CL и CR выстроены так, чтобы CL совпадала с рассматриваемой ячейкой.

Для улучшения сходимости итерационного процесса также вводится дополнительная поправка в диагональ матрицы и правую часть, в процессе итерационного решения поправка стремится к нулю.

Модель течений в открытых водотоках.

Формулировка. Аппроксимация

Нелинейные уравнения мелкой воды в одномерном случае в переменных площадь и поток выглядят следующим образом [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = q \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \partial A \left(\frac{\partial h}{\partial s} + S_f - \frac{\partial z}{\partial s} \right) = 0 \end{cases}$$

$$S_f = \frac{Q^2 \eta^2}{4 A^2 R^3}, \quad R = \frac{A}{P}$$

где Q – поток вдоль русла реки (расход) [м³/сек], s – координата вдоль русла реки [м],

A – площадь смоченного поперечного сечения, перпендикулярного руслу реки [м²],

h – уровень воды в реке [м], z – отметка дна реки [м],

P – смоченный периметр [м],

R – гидравлический радиус [м],

g – ускорение свободного падения [м/сек²],

η – коэффициент Маннинга [сек/м^{1/3}].

Для дальнейшего упрощения уравнения используем предположение о прямоугольной форме канала, тогда смоченную площадь и гидравлический радиус можно записать в виде:

$$A = hw, \quad R = \frac{hw}{2h+w}, \quad w - \text{ширина канала}$$

$$\frac{\partial wh}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{whR^3}{\eta \sqrt{\left| \frac{\partial(z-h)}{\partial s} \right|}} \frac{\partial(z-h)}{\partial s} \right) = q$$

Данное нелинейное параболическое уравнение есть диффузионная форма одномерных уравнений Сен-Венана для открытых каналов прямоугольной формы.

Уравнение решается численно с помощью итерационной неявной схемы:

$$\frac{h_i^{\gamma+1} - h_i^n}{\tau} w \Delta S_i + \sum_{j \in K(i)} \left(\frac{whR^{\frac{2}{3}}}{\eta \sqrt{\frac{h_i - h_j + z_i - z_j}{\Delta s}}} \right)^v \frac{h_i^{\gamma+1} - h_j^{\gamma+1} + z_i - z_j}{\Delta s} N = q$$

$K(i)$ – ребра, инцидентные узлу i , ΔS_i – линейный размер узла,
 ΔS – расстояние между узлом I и соседним узлом J ,
 γ – номер итерации.

Аналитические тесты

Тест 1. Заводнение горизонтальной плоскости

Описание теста приведено в [3].

Геометрические характеристики области: длина – 5000 м, ширина – 100 м, высота – 1 м.

Стресс-период: 1 час.

Начальное условие: начальный уровень воды совпадает с рельефом ($h = 0, H = z(x, y)$ – высота рельефа).

Геодинамические свойства:

Шероховатость поверхности (коэффициент Маннинга) $\eta = 0,01 \text{ с/м}^{1/3}$.

Граничные условия: на правой, верхней и нижней границах условие: нулевой поток.

На левой границе глубина воды задана формулой (при $u = 1 \text{ м/с}$).

$$h(0, t) = \left[\frac{7}{3} (0,07 + \eta^2 u^3 t) \right]^{3/7}$$

Аналитическое решение:

$$h(x, t) = \left[\frac{7}{3} (C + \eta^2 u^3 (x - ut)) \right]^{3/7} \quad (\text{при } u = 1 \text{ м/с, } C = 0,07)$$

Параметры расчета: для решения задачи использовалась треугольная неструктурированная сетка. Средний размер ребра плановой сетки составил 10 м.

Для расчета использовалась неявная противоположная схема, шаг по времени был равен 1 секунде.

Сравнение с аналитическим решением: на рис. 3 приведен уровень воды, полученный расчетом на ПК «НИМФА», и аналитическое решение, на момент времени 1 час.

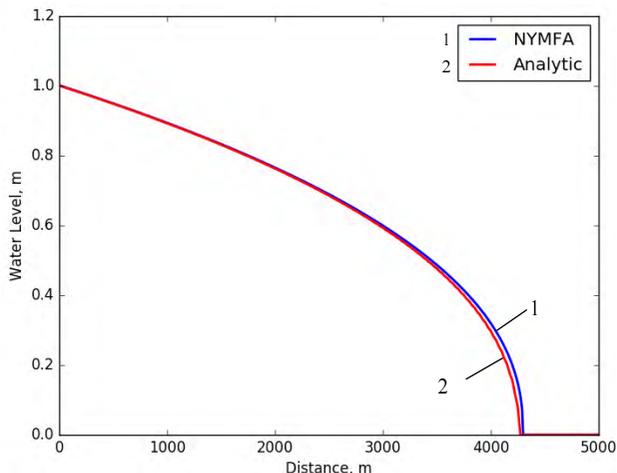


Рис. 3. Численное и аналитическое решения на момент времени $t = 1$ час

Из рис. 3 видно хорошее качественное и количественное согласие с аналитическим решением. Интегральная относительная погрешность решений составляет 1,12 %.

Тест 2. Задача о разрыве «зеркала» воды (Flooding a disconnect water body)

Описание теста и результаты приведены в [3]. Задача описывает разрыв «зеркала» воды с течением времени.

Геометрические характеристики области: длина – 5000 м, ширина – 100 м, высота – 1 м.

На рис. 4 приведено распределение высоты столба жидкости.

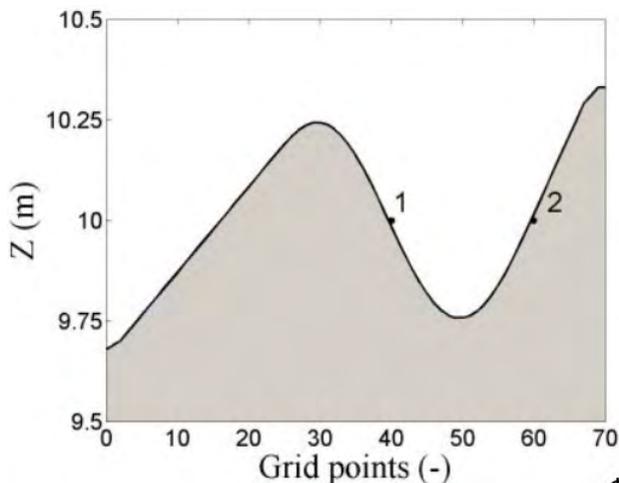


Рис. 4. Распределение высоты столба жидкости

Стресс-период: 20 часов.

Начальное условие: начальный уровень воды совпадает с рельефом ($h = 0, H = z(x, y)$ – высота рельефа).

Геодинамические свойства: шероховатость поверхности (коэффициент Маннинга) $\eta = 0,03 \text{ с/м}^{1/3}$.

Граничные условия: на левой границе задается уровень воды ($H = h + z$), зависящий от времени, в виде функции, изображенной на рис. 5.

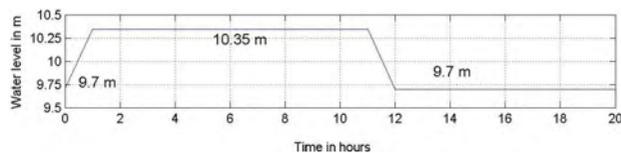


Рис. 5. Граничное условие на левой границе

На правой, верхней и нижней границах задано условие не протекания.

Параметры расчета: для решения задачи использовалась структурированная сетка. Средний размер ребра плановой сетки составил 10 м.

Контрольные точки ставились в координатах $(x, y) = [(400 \text{ м}, 50 \text{ м}), (600 \text{ м}, 50 \text{ м})]$.

Для расчета использовалась неявная протипоточная схема, шаг по времени 60 сек.

Сравнение с результатами, полученными на зарубежных программах (ПС): сравнение результатов расчетов уровня воды в контрольных точках (400 м, 50 м) и (600 м, 50 м), полученных расчетом на ПК «НИМФА», и на различных зарубежных ПС [4] приведено на рис. 6, 7.

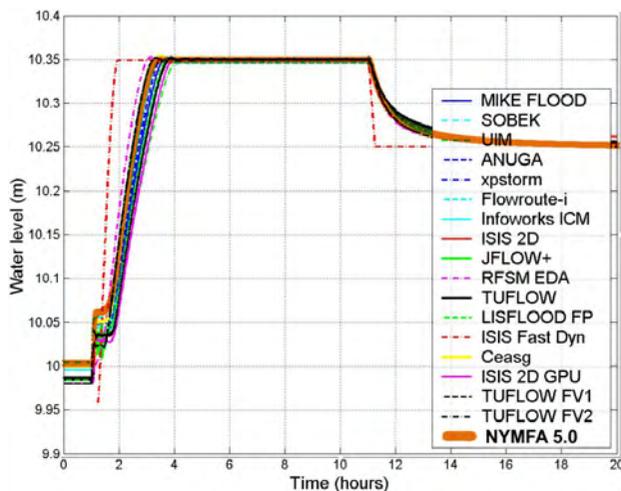


Рис. 6. Распределение уровня воды по времени в контрольной точке (400 м, 50 м)

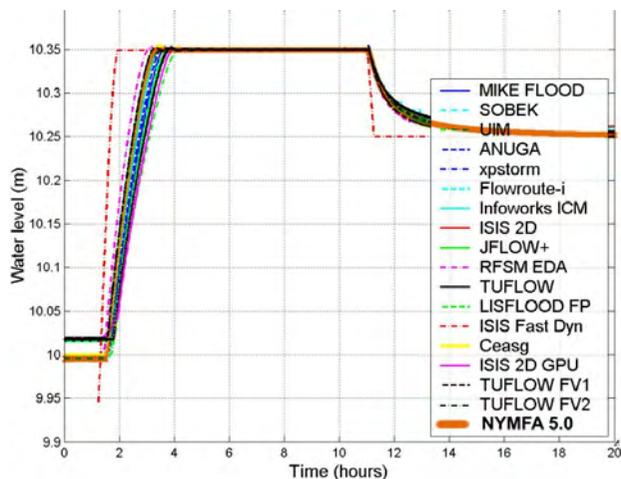


Рис. 7. Распределение уровня воды по времени в контрольной точке (600 м, 50 м)

Из рис. 6, 7 видно хорошее качественное и количественное согласие с данными по расчету поверхностного стока, полученными на зарубежных ПС.

Различие на начальный момент времени по уровню воды связано с различной точностью установки контрольных точек и сбора данных в них.

Литература

1. Бутнев О. И., Горев И. В., Дерюгин Ю. Н., Колесников С. С., Машенькин П.А., Пронин В. А., Сидоров М. Л., Журавлева М. В., Лысова Е. Н. Комплекс программ НИМФА. Методика решения нелинейной однофазной фильтрации жидкости и тепло-массопереноса в пористых средах // Сборник материалов XVI сессии молодежной школы-семинара «Промышленная безопасность и экология». Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ». 2017. С. 202–209.
2. De Saint Venant V. Theorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivieres et a l'introduction des marees dans leur lits. Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences 1871; 73: 148-54, 237-40.
3. Leandro, J., Chen, A.S., Schumann, A., A 2D Parallel Diffusive Wave Model for floodplain inundation with variable time step (P-DWave), Journal of Hydrology, 2014.
4. S. Néelz, G Pender, Benchmarking of 2D Hydraulic Modelling Packages, Environment Agency, June 2010.