

10. Querin O. M., Young V., Steven G. P. and Xie Y.M. Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimization //Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. – 2000.
11. Гибсон Я., Розен Д., Стакер Б. Технологии аддитивного производства. – М.: Техносфера, 2016.
12. Никулин Е. А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики. – СПб.: БХВ – Петербург, 2003.

A PROGRAM FOR TOPOLOGICAL OPTIMIZATION OF STRUCTURES USING CELL (MESH) STRUCTURES

A. N. Bykov, V. V. Popov, E. A. Sinitsin, D. Yu. Dyanov, M. V. Medvedkina

Russian Federal Nuclear Center –
All-Russian Research Institute of Experimental Physics, Sarov

Within the project “Development of the Atlas of Charts of Typical Shapes for Topological Optimization of the Structures Formed by Selective Laser Melting and Their Production Verification», which involves National University of Science and Technology «MISIS», Central Scientific-Research Institute of Technology and Mechanical Engineering (CNIITMASH), FSUE RFNC-VNIIEF the software is being developed to prepare computer models of parts in additive production (on the basis of linear static strength problems with different limitations of the target function) and to generate and implement various types of cell (mesh) structures to fill the volume of parts. The paper provides a brief description of the basic version of the software being designed.

Key words: additive technologies, selective laser melting, topological optimization, cell structures, generative design, implicit geometry, TPMS structures.

УДК 519.635.6

ПАКЕТ ПРОГРАММ ЛОГОС. МЕТОДИКА РАСЧЕТА ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С УЧЕТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ПОДВИЖНЫХ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

Е. А. Веселова, Ю. Н. Дерюгин, Д. К. Зеленский

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, г. Саров

В данной работе проводится разработка методики расчета двумерных задач газовой динамики с теплопроводностью на подвижных неструктурированных сетках. Математическая модель, используемая для описания процессов распространения ударных волн, основана на уравнениях многокомпонентной газовой динамики и уравнении переноса излучения в диффузионном приближении. Расчетная методика построена на основе использования неструктурированных подвижных сеток, методе расщепления по физическим процессам, явного метода интегрирования уравнений Эй-

лера и неявного метода решения уравнения теплопереноса. Методика реализована в рамках параллельного пакета программ ЛОГОС. Приводятся результаты расчета тестовых и модельных задач, характеризующие возможности методики.

Ключевые слова: газовая динамика, распад разрыва, метод Годунова, перенос излучения, неструктурированная сетка, программа, моделирование.

Введение

В ряде практических приложениях необходимо достаточно точно моделировать распространение ударной волны в различных средах. Использование здесь методов сквозного счета приводит к существенной погрешности в определении скорости и положения ударной волны. Для решения такого класса задач в [1] развиты методы на структурированных подвижных эйлеровых сетках с выделением основных особенностей решения. Основная трудность в проведении расчетов по этим методам состоит в поддержании качественной сетки, особенно в центральной части, где в следствия вырождения ячеек на оси симметрии, происходит сильное ограничение счетного шага.

В данной работе проводится разработка методики расчета двумерных задач газовой динамики с теплопроводностью на подвижных неструктурированных сетках. Математическая модель, используемая для описания процессов распространения ударных волн, основана на уравнениях многокомпонентной газовой динамики и уравнении переноса излучения в диффузионном приближении [2]. Расчетная методика построена на основе использования неструктурированных подвижных сеток, методе расщепления по физическим процессам, явного метода интегрирования уравнений Эйлера и неявного метода решения уравнения теплопереноса. Расчетный шаг расщепляется на три этапа. На первом этапе определяется новое положение сетки. Движение сетки связывается с движением выделенных разрывов, таких как ударная волна, контактные разрывы, фронт пламени. Граничные условия на выделенных разрывах разрешаются методом распада разрыва, из решения которого определяется скорость смещения граней. По изменению положения выделенных разрывов производится перестройка сетки. На втором этапе интегрируются уравнения Эйлера на подвижной сетке. Разностные уравнения получены дискретизацией исходных уравнений в интегральной форме квадратными формулами прямоугольников. Численно конвективные потоки определяются на основе решения задачи о распаде разрыва. Для повышения точности моделирования предраспадные параметры потока определяются с использованием линейной реконструкции решения. В задачах со сферической симметрией с целью уменьшения немонотонности численного решения применяется алгоритм доворота вектора скорости у предраспадных параметров потока [3]. На третьем, заключительном этапе, решается уравнение теплопроводности, на неподвижной неструктурированной сетке. Расчетные формулы получены путем интегрирования уравнений теплопроводности по контрольному объему ячейки. Тепловые потоки на гранях аппроксимируются по верхнему временному слою центральными разностями. Разностные уравнения решаются итерациями по нелинейности и методе отложенной коррекции, учитывающей не ортогональность сетки. Получающаяся в результате аппроксимации система линейных алгебраических уравнений решается с использованием параллельных решателей из библиотеки PMLP [4]. Методики реализованы в рамках параллельного пакета программ ЛОГОС [5]. Приводятся результаты расчета тестовых и модельных задач принятых, для тестирования двумерных методик [6 – 8].

Математическая модель

Рассматриваются двумерное движение сплошной среды с учетом переноса лучистой энергии. Исходные уравнения в виде законов сохранения в декартовых ($v = 0$) и цилиндрических ($v = 1$) координатах имеют вид [2]:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial y^v \rho v}{y^v \partial y} = 0; \quad (1)$$

уравнение неразрывности k -компонента среды

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho_\alpha u}{\partial x} + \frac{\partial y^v \rho_\alpha v}{y^v \partial y} = 0; \quad (2)$$

уравнение сохранения количества движения

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{y^v \partial y} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial y^v \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad (4)$$

уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u E + p u)}{\partial x} + \frac{\partial y^v (\rho v E + p v)}{y^v \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(y^v \chi \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \rho Q(x, y, t). \quad (5)$$

Уравнения (1.1)–(1.5) замыкаются уравнениями состояния:

$$p = p(\rho, T), \quad (6)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T), \quad (7)$$

$$\chi = \frac{4\sigma c}{3} \ell T^3, \quad (8)$$

где σ – постоянная Стефана–Больцмана, c – скорость света, $\ell_R = \ell_R(\rho, T)$ – Росселандов пробег в веществе.

В расчетной области находится смесь N -веществ. Уравнение состояние и эффективная величина пробега смеси берутся в виде

$$p = \sum_{\alpha} C_{\alpha} P_{\alpha}(\rho, T), \quad (9)$$

$$p = \sum_{\alpha} C_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}(\rho, T). \quad (10)$$

Росселандов пробег в смеси веществе определяется по формуле

$$\ell = \sum_{\alpha} \frac{1}{\frac{C_{\alpha}}{\ell_{\alpha}(\rho, T)}}. \quad (11)$$

Границами расчетной области являются границы симметрии потока и ударная волна, на которой ставятся соотношения Ренкина–Гюгонио [7].

В задачах с учетом теплопроводности на границах области могут быть поставлены дополнительно следующие граничные условия:

Задана температура:

$$T_G = T(G, t). \quad (12)$$

Задан тепловой поток:

$$\left(\chi \frac{\partial T}{\partial n} \right)_G = q(G, t). \quad (13)$$

В частности на УВ по теплопроводности ставится условие отсутствие теплового потока. Хорошим приближением постановки граничного условия на внешних границах является условие излучения абсолютно твердого тела, в котором тепловой поток определяется по формуле:

$$q(t) = \frac{\sigma c}{4} T^4. \quad (14)$$

Численная методика

Расчетная методика основана на использовании неструктурированных сеток, методе конечного объема, расщеплении по физическим процессам, явном методе интегрирования уравнений Эйлера и неявном методе интегрирования уравнения переноса излучения. Для численного решения в расчетной области строится в общем случае неструктурированная сетка, состоящая из многогранников произвольной формы. Контрольными объемами (ячейки сетки) являются произвольные многогранники. Контрольные объемы покрывают расчетную область без зазоров и наложений. Значение искомых параметров определяется в центрах ячеек. Грани ячеек разделяются на внутренние и внешние грани. Внешние грани объединены в группы по типу поставленных граничных условий.

В соответствии с принципом расщепления по физическим процессам расчетный шаг решения двумерных уравнений газовой динамики с теплопроводностью на подвижной неструктурированной сетке расщепляется на три этапа. На первом этапе находится решение уравнений газовой динамики на подвижной неструктурированной сетке, на втором этапе определяется новое значение внутренней энергии за счет источников энергоснабжения и на третьем, заключительном этапе, определяется новое распределение температуры из решения уравнения теплопроводности на неподвижной сетке.

Алгоритм расчета первого этапа состоит из следующих вычислений. В начале, разрешаются граничные условия на подвижных внешних и внутренних границах методом распада разрыва [1]. В результате на гранях, описывающих эти границы, определяются так называемые большие величины и компоненты вектора скорости движения самой границы. После этого, по найденным компонентам вектора скорости движения граней, определяются компоненты вектора смещения узлов граней и определяется новое положение подвижных выделенных границ. Затем осуществляется построение сетки на новый момент времени и рассчитываются предварительные параметры потока на новом временном слое из решения уравнений Эйлера. Приведем методику решения уравнений Эйлера. Для составления разностных формул здесь систему уравнений представляется в векторном виде:

$$\frac{\partial y^v Q}{\partial t} + \frac{\partial y^v F_x}{\partial x} + \frac{\partial y^v F_y}{\partial y} + y^v \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} = 0, \quad (15)$$

где $v = 0$ для плоской и $v = 1$ цилиндрической геометрий, Q – вектор консервативных переменных, $F = F_x \bar{e}_x + F_y \bar{e}_y$ – вектор потока, \bar{e}_x, \bar{e}_y – единичные базисные вектора ортогональной декартовой или цилиндрической систем координат. Векторы Q, F_x, F_y и \tilde{F} имеют следующие компоненты:

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \\ \rho C_k \end{pmatrix}, \quad F_x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u E + p u \\ \rho u C_k \end{pmatrix}, \quad F_y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 \\ \rho v E + p v \\ \rho v C_k \end{pmatrix}, \quad \tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Интегрируя уравнения (15) по подвижной площади ячейки, используя формулу Гаусса–Остроградского и правило Лейбница получим следующую форму уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q dV + \oint_{\partial \Omega} (F_n - Q W_n) dS + \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} dV = 0, \quad (16)$$

где $dV = y^v dx dy$ – объем ячейки, а $dS = y^v \sqrt{dx^2 + dy^2}$ – площадь грани.

Воспользуемся теоремой о среднем, будем аппроксимировать интегралы в (16) с помощью квадратурной формулы прямоугольников. В качестве среднего значения функции в ячейки примем ее значение в центре ячейки, а в качестве среднего значения функции на грани примем ее значение в центре грани. В этом случае получим полудискретный аналог уравнений (16):

$$\frac{(Q \Delta V)_P^{n+1} - (Q \Delta V)_P^n}{r} + \sum_f (F_n - Q W_n)_f^n \Delta S_f + \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} dV = 0. \quad (17)$$

Определим $\frac{\partial p}{\partial y}$ на основании формулы Грина:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_P = \frac{\oint p n_y d\ell}{\Delta\sigma} = \frac{\sum_f P_f(n_y)_f \Delta\ell_f}{\Delta\sigma_P}. \quad (18)$$

Тогда интеграл в (17) по площади ячейки P приближенно вычислим

$$\int_{\sigma} \frac{\partial p}{\partial y} dV = \frac{\left(\sum_f P_f(n_y)_f \Delta\ell_f\right)}{\Delta\sigma_P} \Delta V_P. \quad (19)$$

Отметим, что для осесимметричной геометрии, значение y_P^v центра ячейки определяется по формуле:

$$y_P^v = \frac{\Delta V_P}{\Delta\sigma_P}.$$

В результате получим окончательный дискретный аналог уравнений (17):

$$(Q\Delta V)_P^{n+1} = Q_P^n \frac{\Delta V_P^n}{\Delta V_P^{n+1}} - \frac{r}{\Delta V_P^{n+1}} \sum_f \left[(F_n - QW_n) \Delta S + (y^v)_P \tilde{F} n_y \Delta\ell \right]_f = 0. \quad (20)$$

Появляющиеся в (20) неизвестные газодинамические величины на боковых гранях криволинейных объемов при определении конвективных потоков, будем вычислять методом распада разрыва [1]. Для повышения аппроксимации конвективных слагаемых используется одномерная линейная реконструкция решения [9, 10] относительно примитивных либо характеристических переменных.

При взрыве заряда ВВ течение, возникающее в среде за фронтом УВ на больших расстояниях от эпицентра взрыва, носит одномерный сферически симметричный характер. Моделирование таких течений осуществляется на сеточных моделях, в которых в регионе строится «лучевая» сетка. В этом регионе секта является структурированной, а направление лучей совпадает с направлением распространения возмущений. Вследствие того, что направление скоростей в соседних ячейках на общей грани связанной с лучом даже для одномерного течения различаются, то это приводит при решении задачи о распаде разрыва к формированию потоков через грани и нарушению симметрии течения. Для уменьшения возникающей счетной ошибки при формировании предраспадных параметров производится поворот векторов скорости при их интерполяции на грань [3].

На втором этапе вычислений определяется изменение энергии за счет энерговыделения. Поскольку энерговыделение связано с конкретным физическим веществом, то новое значение энергии определяется по формуле:

$$\bar{\varepsilon}_P = \tilde{\varepsilon}_P + r \frac{(\rho_\alpha)_P}{\rho_P} Q(t^{n+1/2}), \quad (21)$$

где $\tilde{\varepsilon}_P$ – значение удельной внутренней энергии после шага газодинамики.

По найденному значению энергии определяется значение температуры, которое находится из уравнения состояния по итерационной формуле Ньютона:

$$T_P^{\gamma+1} = T_P^{\gamma} + \frac{\bar{\varepsilon}_P - \varepsilon(\rho_P, T_P^{\gamma})}{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_P}. \quad (22)$$

На третьем, заключительном этапе, находится новое значение температуры и внутренней энергии из решения уравнения теплопроводности на неподвижной сетке:

$$\frac{\partial y^v \rho \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(y^v \chi \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(y^v \chi \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (23)$$

Интегрируя (23) по площади ячейки, используя формулу Гаусса–Остроградского и переходя к объему ячейки, интегральный закон сохранения энергии представляется в виде

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial e} dV = \oint_{\partial \Omega} \chi \frac{\partial T}{\partial n} dS, \quad (24)$$

где введены обозначения

$$\chi \frac{\partial T}{\partial n} = (\chi \text{grad } T \cdot \vec{n}). \quad (25)$$

Используя квадратурные формулы, заменим интегральные выражения разностными. Производную по времени будем аппроксимировать по схеме первого порядка

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\varepsilon^{n+1} - \bar{\varepsilon}}{r^n}, \quad (26)$$

Тогда уравнения (24) в полудискретном виде запишется

$$(\rho \Delta V)_P \left(\frac{\varepsilon^{n+1} - \bar{\varepsilon}}{r^n} \right)_P - \sum_{f=1}^F \left(\chi \frac{\partial T}{\partial n} \right)_f \Delta S_f = 0. \quad (27)$$

Будем аппроксимировать $\sum_{f=1}^F \left(\chi \frac{\partial T}{\partial n} \right)_f \Delta S_f$ в каждой ячейки сетки по верхнему временному слою,

тогда получим систему нелинейных разностных уравнений. Решение системы разностных уравнений будем искать методом итераций по Ньютону. Для этого проведем линеаризацию внутренней энергии

$$\varepsilon^{n+1} - \bar{\varepsilon} = \varepsilon^{\gamma+1} - \varepsilon^{\gamma} + \varepsilon^{\gamma} - \bar{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)^{\gamma} \Delta T + (\varepsilon^{\gamma} - \bar{\varepsilon}), \quad (28)$$

и потока тепла

$$\sum_{f=1}^F \left(\chi \frac{\partial T}{\partial n} \right)_f^{n+1} \Delta S_f = \sum_{f=1}^F \chi_f^{\gamma} \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial n} \right)_f^{\gamma} \Delta S_f + \sum_{f=1}^F \chi_f^{\gamma} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_f^{\gamma} \Delta S_f, \quad (29)$$

С учетом (28) и (29) разностное уравнение (27) принимает вид

$$\frac{1}{r^n} (\rho \Delta V)_P \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_P^{\gamma} \Delta T_P - \sum_{f=1}^F \chi_f^{\gamma} \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial n} \right)_f^{\gamma} \Delta S_f = - \frac{(\varepsilon_P^{\gamma} - \bar{\varepsilon}_P)}{r^n} (\rho \Delta V)_P + \sum_{f=1}^F \chi_f^{\gamma} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_f^{\gamma} \Delta S_f \quad (30)$$

Для аппроксимации потока тепла через грани ячеек будем использовать метод отложенной коррекции [11]. В этом методе потоки тепла через грани ячеек аппроксимируются на неструктурированной сетке с учетом вычисленного в ячейках сетки значения градиента температуры, значение которого в центрах ячеек определяется либо по формуле Грина–Гаусса [12], либо методом наименьших квадратов [13]. Поток тепла на гранях ячеек определяется из условия равенства односторонних потоков и непрерывности температуры в центре грани. На равномерной ортогональной сетке данная схема имеет второй порядок аппроксимации по пространству и первый порядок по времени.

Для построения аппроксимации потока тепла через внутреннюю грань рассмотрим произвольную f -ю грань, которая является общей для P и E ячеек. Обозначим индексом f – центр грани. Проведем через центры P и E ячеек линии, перпендикулярные нормальной линии к f – той грани. Определим (см. рис. 1) точки P' и E' пересечения этих линий с нормальной линией.

Векторы $\Delta \vec{R}_{PP'}$ и $\Delta \vec{R}_{EE'}$, с учетом ориентации вектора нормали, определяются по следующим формулам:

$$\Delta \vec{R}_{PP'} = \vec{R}_{P'} - \vec{R}_P = \Delta \vec{R}_{Pf} - \vec{n}_f (\vec{n}_f \cdot \Delta \vec{R}_{Pf}), \quad \Delta \vec{R}_{Pf} = \vec{R}_f - \vec{R}_P, \quad (31)$$

$$\Delta \vec{R}_{EE'} = \vec{R}_{E'} - \vec{R}_P = \Delta \vec{R}_{Ef} - \vec{n}_f (\vec{n}_f \cdot \Delta \vec{R}_{Ef}), \quad \Delta \vec{R}_{Ef} = \vec{R}_f - \vec{R}_E. \quad (32)$$

Считая, что в точках P' , E' и центре грани, известны значения температуры, поток тепла в направлении нормали можно определить из условия непрерывности потока:

$$\left(\chi \frac{\partial T}{\partial n}\right)_f \approx \chi_f \frac{T_{E'} - T_{P'}}{|\Delta \bar{R}_{P'f}| + |\Delta \bar{R}_{E'f}|} = \chi_P \frac{T_f - T_{P'}}{|\Delta \bar{R}_{P'f}|} = \chi_E \frac{T_{E'} - T_f}{|\Delta \bar{R}_{E'f}|}. \quad (33)$$

Исключая из (33) значение температуры на грани (T_f), получим выражение для потока тепла через единичную поверхность:

$$\left(\chi \frac{\partial T}{\partial n}\right)_n \approx \chi_f \frac{T_{E'} - T_{P'}}{|\Delta \bar{R}_{E'f}| + |\Delta \bar{R}_{P'f}|}, \quad (34)$$

где значение коэффициента теплопроводности в центре грани χ_f определяется как среднее гармоническое значение:

$$\chi_f = \frac{\chi_P \chi_E (|\Delta \bar{R}_{P'f}| + |\Delta \bar{R}_{E'f}|)}{\chi_P (|\Delta \bar{R}_{E'f}| + \chi_E |\Delta \bar{R}_{P'f}|)}. \quad (35)$$

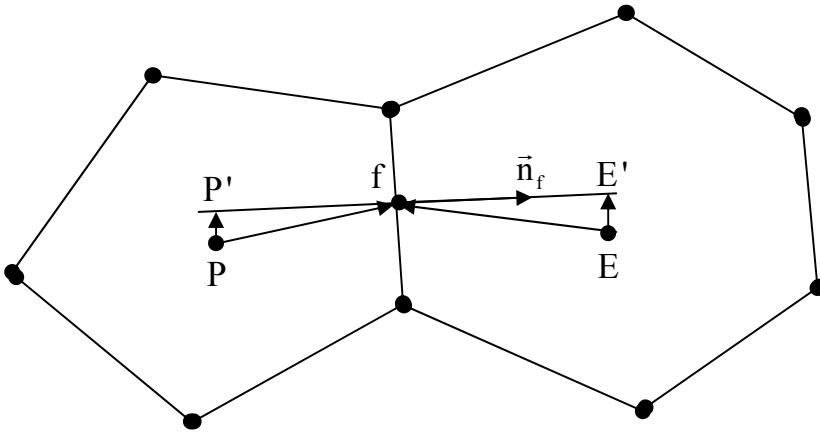


Рис. 1. Шаблон точек для аппроксимации $\chi \frac{\partial T}{\partial n}$ на внутренней грани

Значения $T_{P'}$ и $T_{E'}$ определяются с использованием $grad T$, вычисленного в центрах ячеек:

$$T_{P'}^y = T_P^y + \left((grad T)_P^y \cdot \Delta \bar{R}_{PP'} \right), \quad (36)$$

$$T_{E'}^y = T_E^y + \left((grad T)_E^y \cdot \Delta \bar{R}_{EE'} \right). \quad (37)$$

Подставляя (36) и (37) в (34), получим окончательное выражение для потока тепла через внутреннюю грань

$$\left(\chi \frac{\partial T}{\partial n}\right)_f^y \Delta S_f = \lambda_f^y \left(T_E^y - T_P^y + \left((grad T)_E^y \cdot \Delta \bar{R}_{EE'} \right) - \left((grad T)_P^y \cdot \Delta \bar{R}_{PP'} \right) \right), \quad (38)$$

где

$$\lambda_f = \frac{\chi_P \chi_E \Delta S_f}{|\Delta \bar{R}_{E'f}| \chi_P + |\Delta \bar{R}_{P'f}| \chi_E}. \quad (39)$$

Следуя построению явной аппроксимации потока тепла, приращение теплового потока представим следующей образом:

$$\left(\chi \frac{\partial \Delta T}{\partial n}\right)_f \approx \chi_f^y \frac{\Delta T_{E'} - \Delta T_{P'}}{|\Delta \bar{R}_{P'E'}|}, \quad (40)$$

где значение коэффициента теплопроводности в центре грани χ_f определяется как среднее гармоническое значение (39), вычисленное по параметрам с предыдущей итерации. При построении не-

явной аппроксимации для приращения потока тепла будем учитывать в (40) только главные члены разложения, полагая

$$\Delta T_{P'} = \Delta T_P, \quad \Delta T_{E'} = \Delta T_E.$$

Тогда разностная аппроксимация для приращения потока тепла запишется в виде:

$$\left(\chi \frac{\partial \Delta T}{\partial n} \right)_f \Delta S_f \approx \lambda_f^\gamma (\Delta T_E - \Delta T_P), \quad (41)$$

где коэффициент λ_f^γ определяется по формуле (39).

При таком способе определения приращения потока тепла матрица будет симметрической матрицей с диагональным преобладанием и шириной ленты определяемой только числом граней. Граничные условия в этом случае разрешаются только в явном операторе.

При таком способе определения приращения потока тепла матрица будет симметрической матрицей с диагональным преобладанием и шириной ленты определяемой только числом граней. Граничные условия в этом случае разрешаются только в явном операторе. При аппроксимации уравнения теплопроводности по неявной разностной схеме в дельта-форме, разностные уравнения записываются в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$A \Delta T = B, \quad (42)$$

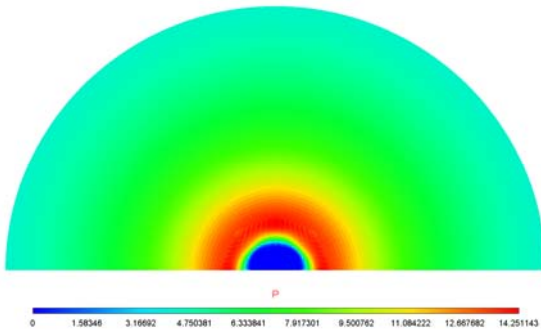
где $A = (a_{PF})$ – разреженная матрица размерности $(N \times N)$, $\Delta T = (\Delta T_P)$ – искомый вектор размерности (N) , $B = (b_P)$ – вектор правых частей размерности (N) , N – число ячеек.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (42) осуществляется с использованием решателей из библиотеки PMLP [4]. Сходимость итераций определяется в ячейках, в которых выполняется условие: $T_P^\gamma > 10^{-5}$. Итерации ведутся до тех пор, пока не выполнится условие

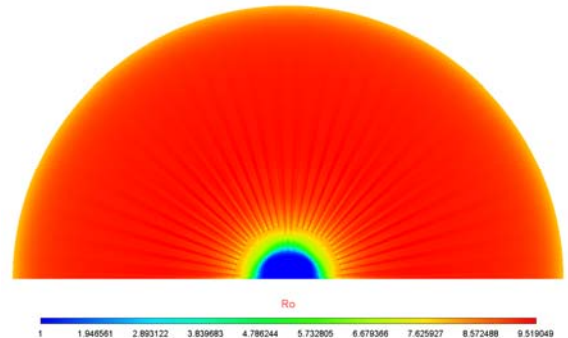
$|T_P^{\gamma+1} - T_P^\gamma| \leq \varepsilon_1 T_P^\gamma + \varepsilon_2$, ($\varepsilon_1 \sim 10^{-4}$, $\varepsilon_2 \sim 10^{-8}$) во всех ячейках разностной сетки.

Результаты тестовых расчетов

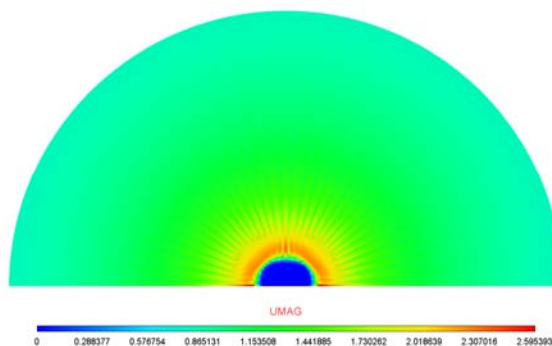
Сходящаяся сферическая ударная волна. Рассматривается задача о схождении сферической автомодельной УВ и последующем отражении ее от центра [6] (тест № 5). В шаре радиусом $R_0 = 1$ задана начальная плотность $\rho_0 = 1$ и начальная внутренняя энергия $E_0 = 0$. Уравнение состояния – идеальный газ с $\gamma = 5/3$. На внешней границе задана зависимость давления от времени $P(t)$. Для проведения расчетов на сходимость были построены три сгущающиеся расчетные сетки. В центральной области $R < 0,2$ строится неструктурированная сетка, во внешней области строится лучевая сетка с числом ячеек 20×24 , 40×48 и 60×96 . Расчет проводился в осесимметричной постановке. На рис. 2 показано распределение газодинамических величин на самой подробной сетке на момент времени $t = 0,59$, который близок к моменту фокусировки УВ.



Поле давления



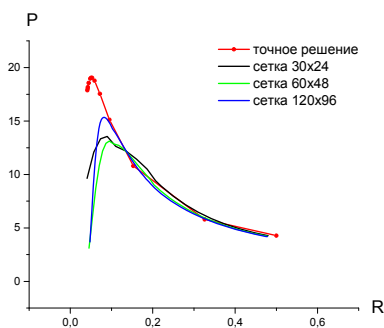
Поле плотности



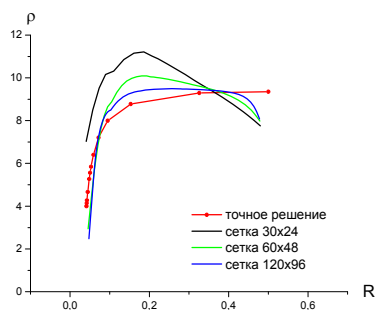
Поле модуля скорости

Рис. 2. Распределение параметров потока на момент времени $t = 0,59$ на самой подробной сетке

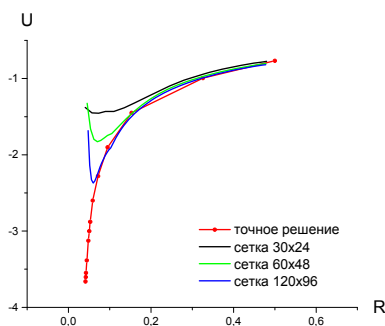
На рис. 3 показано распределение давления, плотности и скорости вдоль радиуса в сравнении с точным решением на последовательности сгущающихся сетках на момент времени $t = 0,59$.



Распределение давления



Распределение плотности



Распределение модуля вектора скорости

Рис. 3. Графики распределения газодинамических величин вдоль радиуса на момент времени $t = 0,59$ на сгущающихся сетках в сравнении с точным решением

В табл. 1 сравниваются точные значения моментов фокусировки и выхода отраженной УВ на свободную поверхность с расчетными значениями, полученными на сгущающихся сетках. Для самой подробной сетки разница с точным решением не превышает $\Delta \approx 0,9\%$ на момент фокусировки УВ и $\Delta \approx 0,1\%$ на момент выхода отраженной УВ на свободную поверхность.

Таблица 1

Точные и расчетные значения моментов фокусировки и выхода отраженной УВ на свободную поверхность

Время	Точное значение	Сетка (30x24)	Сетка (60x48)	Сетка (120x96)
Момент фокусировки УВ	0,5958	0,6037, $\Delta \approx 1,3 \%$	0,6035, $\Delta \approx 1,3 \%$	0,6013, $\Delta \approx 0,9 \%$
Момент выхода УВ на границу	0,7895	0,79073, $\Delta \approx 0,2 \%$	0,79069, $\Delta \approx 0,2 \%$	0,7902, $\Delta \approx 0,1 \%$

Точечный взрыв. Рассматривается задача о сферически-симметричном движении газа, возникающем в результате взрыва в однородном веществе без противодействия [6] (тест № 4). В шаре радиусом $R_{01} = 0.1$ задана начальная внутренняя энергия $E_{01} = 10^7$, в сферическом слое $0,1 \leq R \leq 20$ $E_{02} = 0$. Начальная плотность в обеих областях $\rho_0 = 1$. Уравнение состояния – идеальный газ с $\gamma = 1,4$. Закон движения фронта ударной волны $R(t)$ описывается соотношением [13]:

$$R(t) = \alpha(E_B/\rho_0)^{1/5} t^{2/5},$$

где $E_B = 4/3 \pi R_0^3 \rho_0 E_{01} = 4,189 \cdot 10^4$ – энергия взрыва, α – константа, равная 1,0328 для случая $\gamma = 1,4$.

Для проведения расчетов на сходимость были построены три сгущающиеся расчетные сетки. В центральной области $R < 0,1$ строится неструктурированная сетка. Во внешней области $0,1 < R < 0,2$ строится лучевая сетка с числом ячеек 90×16 , 180×32 и 360×64 .

На рис. 4 показано распределение газодинамических величин на самой подробной сетке на момент времени $t = 3,5$, когда УВ прошла примерно 140 начальных радиусов R_{01} .

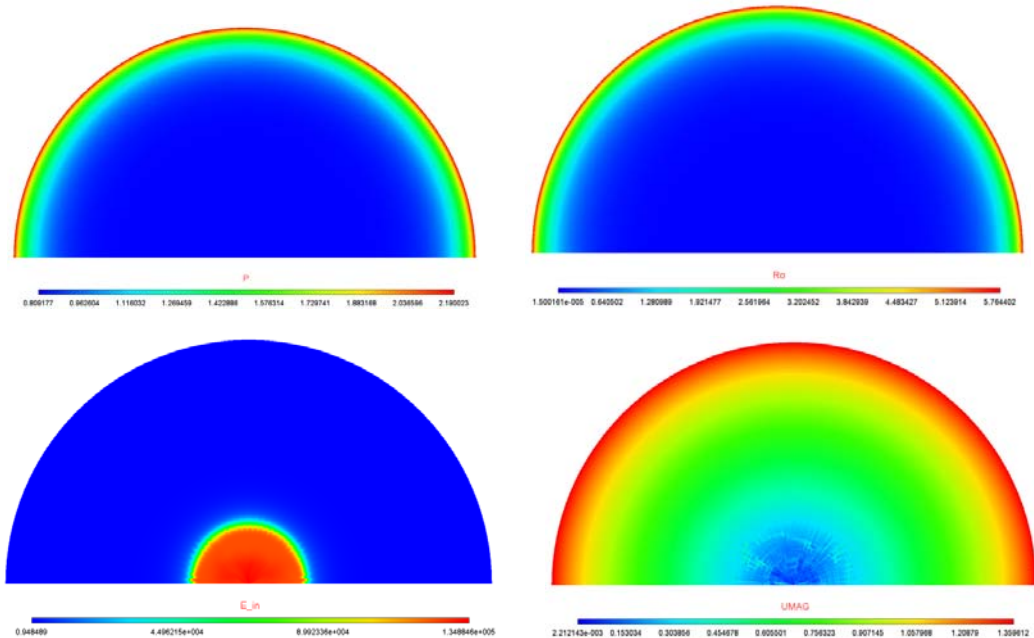


Рис. 4. Распределение давления, плотности, внутренней энергии и модуля скорости на самой подробной сетке на момент времени $t = 3,5$

В табл. 2 сравниваются расчетные значения E_{tot} – полной энергии и величины R^5/t^2 (сохраняется при автомодельном течении) на начальный $t = 0$ и конечный $t = 9$ моменты времени. На момент времени $t = 9$ УВ прошла примерно 200 начальных радиусов R_{01} . На разностной сетке 250×96 величины сохраняются с точностью $\Delta \approx 0,8 \%$.

Таблица 2

Расчетные значения E_{tot} – полной энергии и величины R^5/t^2 на моменты времени $t = 0$ и 9

Время и радиус	E_{tot}	R^5/t^2
$t = 0, R = R_{01}$	6.61e3	4.83e4
$t = 9, R \approx 200 \cdot R_{01}$	6.56e3	4.81e4
	$\Delta \approx 0,8\%$	$\Delta \approx 0,8\%$

Радиус фронта УВ на момент времени $t = 9$ на экваторе $R_{\text{экватор}} = 20,95$, на полюсе $R_{\text{полюс}} = 20,93$. Погрешность в определении радиуса фронта УВ составляет $\Delta \approx 0,09\%$.

Изменение формы фронта ударной волны от времени для сферической гармоники Y8,0. Рассматривается сферическая область с радиусом $R_0 = 1$. В начальный момент времени на поверхности области задаются возмущения в виде сферической гармоники Y8,0. В качестве начальных данных задаются расчетные поля задачи о распространении УВ от точечного взрыва ($\rho_0 = 1, E_0 = 10^7, \gamma = 1,4$) на момент выхода решения на автомодельный режим. На рис. 5 показана начальная геометрия задачи и расчетная сетка. На рис. 6 дано начальное распределение давления.

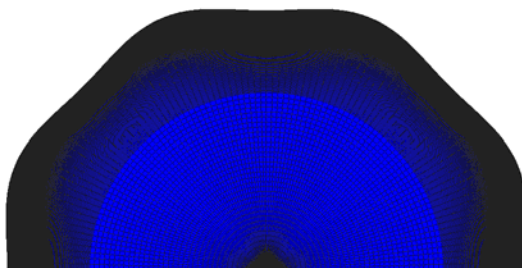


Рис. 5. Начальная геометрия задачи и расчетная сетка

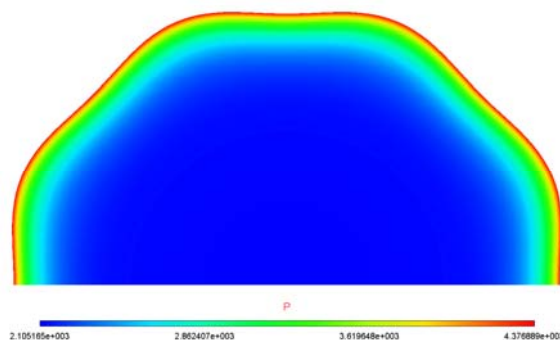


Рис. 6. Начальное распределение давления

На рис. 7 показано изменение фронта УВ за период и распределение давления. На месте впадин образуются холмы (1/2 периода), затем на месте холмов опять образуются впадины (период). Амплитуда возмущений для наглядности увеличена в 3 раза.

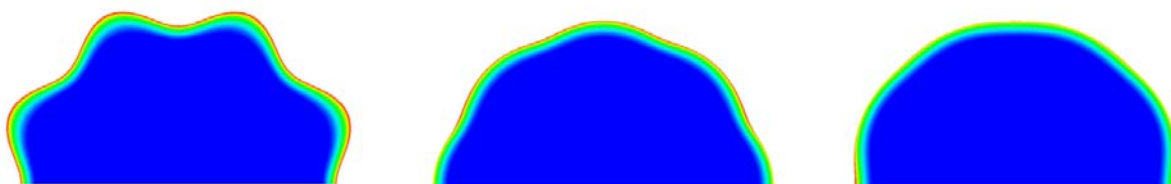


Рис. 7. Изменение фронта УВ и распределение давления за период

На рис. 8 показана нормированная зависимость амплитуды возмущений от логарифма среднего радиуса в сравнении с аналитическим решением.

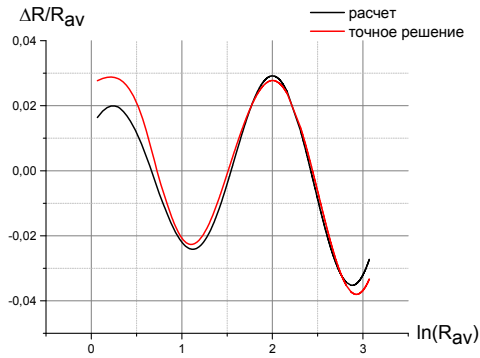


Рис. 8. Нормированная зависимость амплитуды возмущений от логарифма среднего радиуса

Обтекание сферы. Рассматривается начальный участок обтекания сферы потоком идеального газа со скоростью $M = 20$. На этом участке реализуется смешанное дозвуковое, транзвуковое и сверхзвуковое течение. В начальный момент времени в области задаются плотность $\rho_0 = 0,0011845$, внутренняя энергия $E_0 = 0,21385$, скорость $U_0 = 6,92$. Параметры набегающего потока: $\rho_\infty = 0,0011845$, внутренняя энергия $E_\infty = 0,21385$, скорость $U_\infty = 6,92$. Уравнение состояния – идеальный газ с $\gamma = 1,4$.

В данной задаче смешанное течение рассчитывалось методом установления. В расчетах выделялась отошедшая ударная волна. На рис. 9 показана начальная геометрия задачи и расчетная сетка. На рис. 10 показано распределение давления на момент установления.

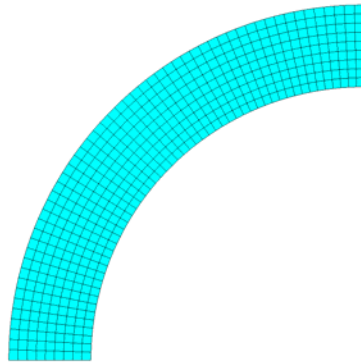


Рис. 9. Начальная геометрия задачи и расчетная сетка

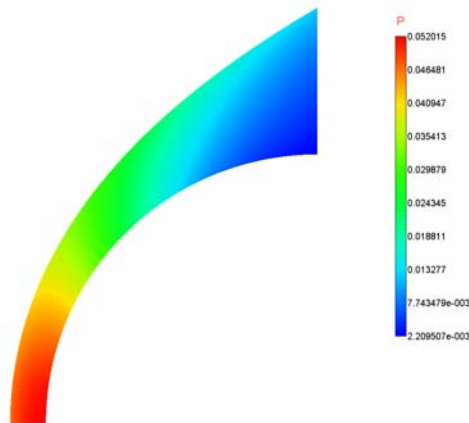


Рис. 10. Распределение давления для установившегося течения

Результаты расчета сравнивались с результатами, полученными по методике [1]. Значения газодинамических параметров в точке торможения приведены в таблице 3. Разница в значениях не превышает $\Delta \approx 0,6\%$. Разница между расчетным значением давления в точке торможения, полученным по данной методике и точным значением давления в точке торможения [14] $P_{\text{точное}} = 5,22e-2$ не превышает $\Delta \approx 0,4\%$. Положение ударной волны на оси X (в точке торможения) и на оси Y (на кромке полусферы) дано в табл. 4. Разница в значениях не превышает $\Delta \approx 0,6\%$.

Таблица 3

Значения газодинамических параметров в точке торможения

	Плотность	Давление	Внутренняя энергия
[1]	7,41e-3	5,18e-2	17,67
ЛОГОС-ВОЛНА	7,44e-3, $\Delta \approx 0,4\%$	5,2e-2, $\Delta \approx 0,4\%$	17,56, $\Delta \approx 0,6\%$

Таблица 4

Положение ударной волны на осях X и Y

	Ось X (точка торможения)	Ось Y (кромка полусферы)
[1]	-1,133	1,554
ЛОГОС-ВОЛНА	-1,132, $\Delta \approx 0,1\%$	1,545, $\Delta \approx 0,6\%$

Задача об остывании бесконечного бруса с квадратным сечением. Рассматривается задача об остывании бесконечного бруса с квадратным сечением [8] внутри которого в начальный момент времени задана температура $T_0 = 1$, а на внешней границе во все последующие моменты времени поддерживается нулевая граничная температура $T_{\text{bound}} = 0$. Сечение бруса представляет собой единственный квадрат. Точное решение имеет вид [15]:

$$T(x, y, t) = \psi(x, t) \cdot \psi(y, t), \quad \text{где } \psi(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\pi^2(2k+1)^2 t}}{2k+1} \cdot \sin \pi(2k+1)x.$$

Для проведения расчетов на сходимость были построены три сгущающиеся четырехугольные сетки с числом ячеек 20x20, 40x40, 80x80 и три сгущающиеся треугольные сетки с числом ячеек 440, 1814, 7746. На рис. 11 представлена начальная геометрия задачи и треугольная расчетная сетка. На рис. 12 показано распределение температуры на момент времени $t = 0.1$ в расчете на самой подробной четырехугольной сетке.

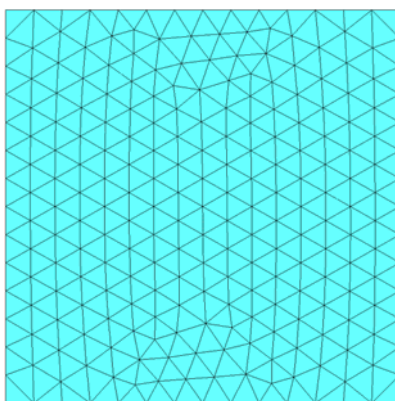


Рис. 11. Начальная геометрия задачи и треугольная расчетная сетка

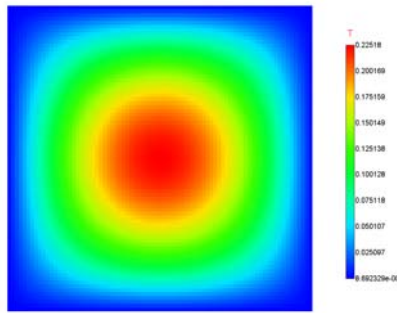


Рис. 12. Распределение температуры на момент времени $t = 0,1$ в расчете на самой подробной четырехугольной сетке

На рис. 13 показаны зависимости температуры от длины вдоль прямой $y = x$ на момент времени $t = 0.1$ для расчетов на сгущающихся четырехугольных сетках в сравнении с аналитическим решением. Уже на самой грубой сетке разница между точным и расчетным значениями не превышает $\Delta \approx 0,7\%$.

На рис. 14 показаны зависимости температуры от длины вдоль прямой $y = x$ на момент времени $t = 0,1$ для расчетов на самой подробной четырехугольной и треугольной сетках в сравнении с аналитическим решением.

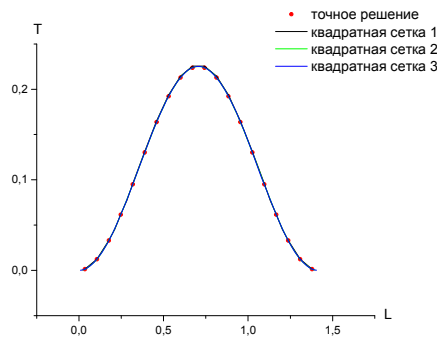


Рис. 13. Зависимость температуры от длины вдоль прямой $y = x$ на момент времени $t = 0,1$ для расчетов на сгущающихся четырехугольных сетках в сравнении с аналитическим решением

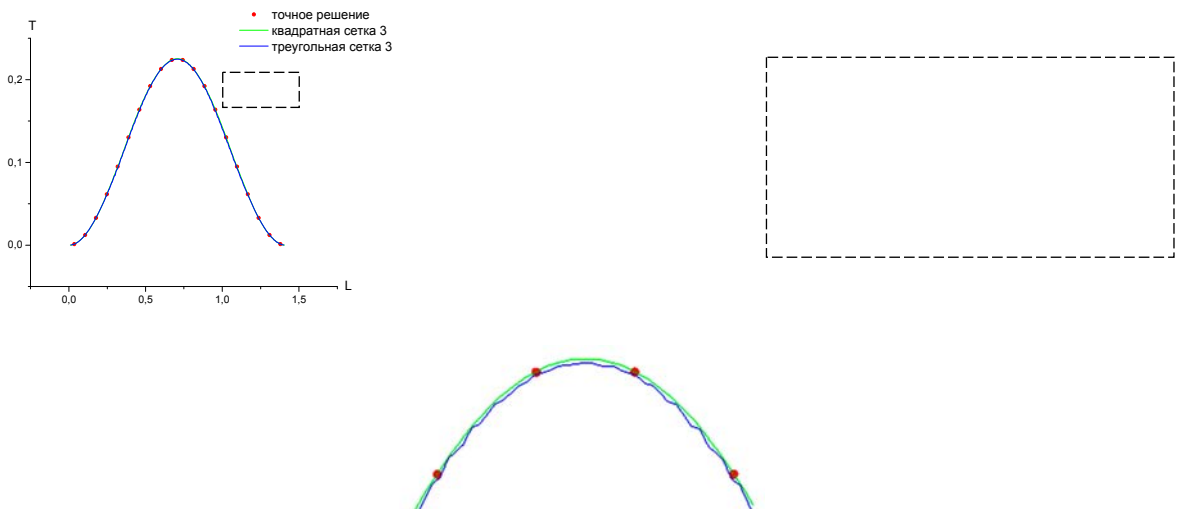


Рис. 14. Зависимость температуры от длины вдоль прямой $y = x$ на момент времени $t = 0.1$ для расчетов на самой подробной четырехугольной и треугольной сетках в сравнении с аналитическим решением

Распространение тепла от постояннодействующего источника.

Рассматривается задача [16] распространения сферической тепловой волны от постоянного действующего источника $Q(t, T) = \frac{3T}{2t}$.

Уравнение состояния $\varepsilon = c_v T$, $c_v = 1$. Коэффициент теплопроводности $\chi = T^\sigma$, $\sigma = 4$. Плотность среды $\rho = 1$.

Аналитическое решение данной задачи имеет следующий вид [16]:

$$T(r, t) = 1.21921 \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{r_\phi} \right)^2 \right)^{0.25},$$

где $r_\phi = 1.48647\sqrt{t}$ – радиус фронта тепловой волны.

Задача решается в осесимметричной постановке. Область представляет собой квадрат $0 \leq z, r \leq 2,5$. В области $0 \leq z, r \leq 0,1$ задана начальная температура $T_0 = 1,1629541$, во внешней области температура равна нулю. Строятся три сгущающиеся четырехугольные сетки с числом ячеек 25×20 , 50×40 , 100×80 . Расчеты проводятся до момента времени $t = 1,5$. На рис. 15 показано распределение температуры вдоль оси Or . Разница между точным и расчетным значениями на подробной сетке не превышает $\Delta \approx 0,7\%$.

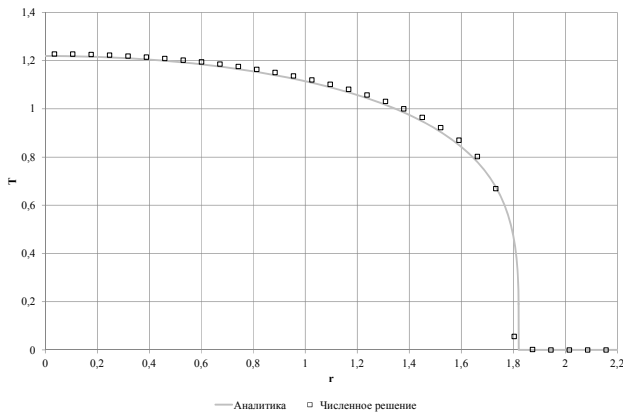


Рис. 14. Графики распределения температуры вдоль оси Or

Литература

1. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – М.: Наука, 1966.
3. Матяш С. В. Новый метод использования принципа минимальных приращений в численных схемах второго порядка аппроксимации // Ученые записки ЦАГИ. – 2005. – Т.36, № 3 – 4. – С. 42 – 50.
4. Реализованные методы решения разреженных линейных систем в библиотеке линейной алгебры. Артемьев А. Ю., Бартенев Ю. Г., Басалов В. Г., Бондаренко Ю. А., Варгин А. М., Голубев А. А., Ерзунов В. А., Ломтев А. В., Максимов А. С., Панов А. И., Прокофьев А. И., Романова М. Д., Фролова Н. В., Щаникова Е. Б. // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 2002. – Вып. 2.
5. Дерюгин Ю. Н., Козелков А. С., Спиридонов В. Ф., Циберев К. В., Шагалиев Р. М. Многофункциональный высокопараллельный пакет программ ЛОГОС для решения задач тепломассопереноса и прочности // Санкт-Петербургский научный форум «Наука и общество»: сб.тез., 2012. – С. 102.

6. Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Делов В. И., и др. Описание системы тестов для двумерных газодинамических методик и программ. Ч. 1. Требование к тестам. Тесты 1 – 7 // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 1991. – Вып. 2. – С. 3 – 9.
7. Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Делов В. И., и др. Описание системы тестов для двумерных газодинамических методик и программ. Ч. 2. Требование к тестам. Тесты 8 – 13 // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 1992. – Вып. 2. – С. 3 – 13.
8. Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Делов В. И., и др. Описание системы тестов для методик и программ, предназначенных для решения двумерных задач теплопроводности // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 1992. – Вып. 2. – С. 14 – 20.
9. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001.
10. Тилляева Н. И. Обобщение модифицированной схемы С. К. Годунова на произвольные нерегулярные сетки // Ученые Записки ЦАГИ. – 1986. – Т. 17, № 2, – С. 18 – 26.
11. Ferziger J. H., Peric M. Computational methods for fluid dynamics. – Berlin; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo: Springer, 2002.
12. Barth T. J., Jespersen D. C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes // AIAA 89-0366. – 1989.
13. Седов А. И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1972.
14. Любимов А. Н., Русанов В. В. Течения газа около тупых тел. Ч. 2. Таблицы газодинамических функций. – М.: Наука, 1970.
15. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970.
16. Тихомиров Б. П. Автомодельные тепловые волны от сосредоточенного или объемного источника в среде с неоднородными теплофизическими параметрами // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 2010. – Вып. 2. – С. 40 – 50.

LOGOS SOFTWARE PACKAGE: THE COMPUTATIONAL TECHNIQUE FOR 2D GAS DYNAMIC PROBLEMS WITH HEAT CONDUCTION ON MOVING UNSTRUCTURED GRIDS

E. A. Veselova, Yu. N. Deryugin, D. K. Zelensky

Russian Federal Nuclear Center –
All-Russian Research Institute of Experimental Physics, Sarov

The paper describes the development of a computational technique for 2D gas dynamics problems with heat conduction on moving unstructured grids. The mathematical model used to describe the shock wave propagation processes is based on multicomponent gas dynamics equations and the radiation transport equation in diffusion approximation. The computational technique is based on the use of moving unstructured grids, splitting in physical processes, an explicit integration scheme for Eulerian equations and an implicit scheme for solving the heat transfer equation. The technique is implemented in the LOGOS software package. Simulation results demonstrating the technique capabilities are presented for a number of test and model problems.

Key words: gas dynamics, Riemann problem, Godunov's method, radiation transport, unstructured grid, code, simulation.