desacribed. The quantity inverse to the runtime of several steps represents the values of the process performance weighting function. Besides, the algorithm allows accounting for the «noisiness» of computing system and revealing «dirty» nodes.

Key words: decomposition, heterogeneous computing systems, performance weighting function, the TIM-3D code.

УДК 517.9+533.7

НЕКОТОРЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ЗАДАЧ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

В. А. Галкин

Сургутский государственный университет, Сургут

Рассмотрен класс стационарных задач с источником частиц для уравнений физической кинетики с операторами стокновений больцмановского типа. Предложен алгоритм построения диссипативных решений, позволяющий отыскать точные решения нестационарного уравнения Смолуховского для пространственно однородных систем с мультипликативным ядром слияния частиц. Обоснован алгоритм построения таких решений. Важной спецификой выделенного класса решений является то, что на них оператор столкновений является разрывным в норме соотношения сохранения. Сформулирована проблема существования таких решений в случае оператора столкновений Больцмана кинетической теории газов, что позволило бы дополнить класс точных решений А. В. Бобылева диссипативными решениями.

Ключевые слова: физическая кинетика, операторы столкновений Больцмана и Смолуховского, разрывные операторы, законы сохранения, точные решения, диссипативные решения.

Математические модели физических систем, состоящих из статистически большого количества частиц (разреженные газы, дисперсные системы, плазма), а также модели механики сплошной среды основываются на фундаментальных соотношениях баланса, носящих общее название – *законы сохранения*. Значительное количество современных исследований по теории законов сохранения связано с вопросами корректности задач для систем нелинейных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений

$$\frac{\partial f^{(\omega)}(x,t)}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_j^{(\omega)}(f,x,t)}{\partial x_j}=S^{(\omega)}(f,x,t), \qquad (1)$$

$$x\in\mathbb{R}_n,\quad t>0,\quad \omega\in\Omega,$$

где $f=\{f^{(\omega)}\}$ – неизвестная вектор-функция, вид потоков F_j и оператора столкновений $S(f)$ считаются заданными характером моделируемого физического процесса, $x\in\mathbb{R}_n$ – пространственные координаты, t – время, Ω – параметры, нумерующие уравнения.

Приложения этих уравнений широко известны, в частности, в связи с газодинамикой и гидродинамикой, физической кинетикой. Система законов сохранения (1) дополняется начальными данными

$$f|_{t=0}=f_0,\quad x\in\mathbb{R}_n,\quad \omega\in\Omega, \qquad (2)$$

Задача (1), (2) называется *пространственно однородной*, если она рассматривается в классе решений f, не зависящих от пространственных переменных x. В этом случае функция f является решением более простой задачи

$$\frac{\partial f^{(\omega)}(t)}{\partial t} = S^{(\omega)}(f^{(.)}(t)), \quad t > 0, \quad \omega \in \Omega \ , \tag{1_0}$$

$$f\,|_{t=0} = f_0 \quad \omega \in \Omega \, . \tag{2_0}$$

Наряду с корректностью в круге задач для системы уравнений (1) (*законов сохранения*) традиционно особую роль играют такие проблемы нелинейной математической физики как обоснование приближенных методов, используемых в процессе отыскания неизвестного решения. Подчеркнем, что практические надобности, связанные с вычислением конкретных физических параметров, приводят к вопросам определения понятия решения и отыскания функциональных пространств, в которых имеет место сходимость приближенных методов. Вопросы эти становятся особенно трудными, когда нелинейные операторы $\{F_j\}$ и S в уравнениях (1), (1_0) разрывны, что может повлечь неразрешимость задачи Коши во множестве классических или обобщенных решений в целом, т. е. при всех $t > 0$.

Эволюция физических систем, состоящих из статистически большого количества сталкивающихся в процессе движения (в некотором смысле локально) элементов, моделируется *пространственно неоднородным уравнением больцмановского типа*

$$\frac{\partial f^{(\omega)}(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}_x(v^{(\omega)} f^{(\omega)}(x,t)) = S^{(\omega)}(f^{(.)}(x,t)), \tag{3}$$

$$\omega \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_1^+, \quad x \in \mathbb{R}_n,$$

где подлежащая отысканию функция u описывает состояния физической системы в каждый момент времени $t \geq 0$ в точках с пространственными координатами $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а множество параметров $\{\omega\} = \Omega$ описывает возможные состояния элементов физической системы. Величины $v^{(\omega)} \in \mathbb{R}_n$ определяют скорость движения элементов физической системы между столкновениями, т. е. *скорость свободного переноса*.

Ограничения на оператор столкновений S, в основном, связаны со свойствами постоянства либо невозрастания нормы решения в пространстве L_1, а также неотрицательностью решения u, которое по своему физическому содержанию характеризует распределение числа частиц в системе среди возможных состояний.

Для уравнения Больцмана кинетической теории газов оператор S в уравнении (3) задается соотношением

$$S^{(\omega)}(u^{(.)}) = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Sigma_2} \Phi(\omega,\xi,q)[f^{(\omega')} f^{(\xi')} - f^{(\omega)} f^{(\xi)}]d\xi dq, \tag{4}$$

$$\omega \in \Omega = \mathbb{R}_3,$$

$$\omega' = \omega - q(\omega-\xi,q)_{\mathbb{R}_3}, \quad \xi' = \xi + q(\omega-\xi,q)_{\mathbb{R}_3}, \ \Sigma_2 = \{q \in \mathbb{R}_3 : (q,q)_{R_3} = 1\}.$$

Операция $(.,.)_{\mathbb{R}_3}$ означает здесь обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}_3$. Интенсивность (ядро) столкновений частиц Φ считается известной функцией.

Для моделей вида (3) кинетической теории коагуляции (Смолуховского), где фазовое пространство $\Omega = \mathbb{R}_1^+$ – неотрицательные действительные числа (массы частиц), а оператор столкновений S определен соотношениями

$$S^{(\omega)}(f^{(.)}) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\omega} \Phi(\omega-\omega',\omega') f^{(\omega-\omega')} f^{(\omega')} d\omega' - f^{(\omega)} \int\limits_0^{\infty} \Phi(\omega,\omega') f^{(\omega')} d\omega', \quad \omega \in \mathbb{R}_1^+. \tag{5}$$

Заданная интенсивность столкновений $\Phi(\omega,\omega') = \Phi(\omega',\omega) \geq 0$ при $\omega,\omega' \in \mathbb{R}_1^+$. Аналогично выглядит оператор столкновений Смолуховского в теории коагуляции частиц с дискретными массами

$$S^{(\omega)}(f^{(.)})=\frac{1}{2}\sum_{\omega'=1}^{\omega-1}\Phi(\omega-\omega',\omega')f^{(\omega-\omega')}f^{(\omega')}-f^{(\omega)}\sum_{\omega'=1}^{\infty}\Phi(\omega,\omega')f^{(\omega')},\quad \omega\in\Omega=\mathbb{N}. \tag{6}$$

Наличие в физической системе источников частиц, действующих с неотрицательной интенсивностью $q^{(\omega)}(x,t)$, соответствует замене в кинетическом уравнении (3) оператора $S(f)$ на $S(f)+q$.

Несмотря на то, что первые кинетические уравнения записаны для специальных систем, область их приложений оказалась весьма широкой. Аналоги уравнений Больцмана и Смолуховского используются при моделировании процессов переноса излучения в веществе, нейтронов в ядерном реакторе, при исследовании роста капель в облаках, дефектов в материалах реакторов на быстрых нейтронах, газовых пор в металлах и т. д. Задача Коши для уравнения (3) с операторами столкновений (4) – (6) подробно исследована с точки зрения корректности в целом в классах начальных данных, которые не зависят от пространственных координат x. Случай пространственно неоднородных задач весьма трудный и число содержательных результатов здесь относительно невелико. Основная трудность заключается в отсутствии непрерывности операторов столкновений вида (4) – (6) в нормах, связанных с соотношениями сохранения или диссипации, специфических для этих задач.

Усреднение кинетических уравнений Больцмана, Смолуховского, Власова (т. е. интегрирование обеих частей уравнения (1) по некоторому семейству мер μ_β, $\beta\in A$, на множестве параметров $\omega\in\Omega$) приводит к формальной (вообще говоря, незамкнутой) системе уравнений механики сплошной среды относительно неизвестных средних величин

$$\langle f,\mu_\beta\rangle\overset{def}{=}u_\beta(x,t)=\int_\Omega f^{(\omega)}(x,t)\mu_\beta(d\omega),\quad \beta\in A. \tag{7}$$

Обычно меры μ_β выбираются так, чтобы интегралы в правой части уравнения (1) формально обращались в ноль на рассматриваемых множествах спектров частиц f (т. е., так называемые соотношения сохранения $\langle S,\mu_\beta\rangle\overset{def}{=}\int_\Omega S^{(\omega)}(f)\mu_\beta(d\omega)=0$), и тогда получается незамкнутая система законов сохранения механики сплошной среды для неизвестных $u=\{u_\beta\}_{\beta\in A}$:

$$\frac{\partial u_\beta(x,t)}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_j^{(\beta)}}{\partial x_j}=0,\quad x\in\mathbb{R}_n,\quad t>0,\quad \beta\in A. \tag{8}$$

Относительно вектора потоков $F=\{F_j^{(\beta)}\}$ делаются дополнительные (замыкающие) предположения, которые постулируют завимость $F_j^{(\beta)}$ от набора $u=\{u_\beta\}_{\beta\in A}$. Преимущество такого подхода связано, как правило, с конечномерностью вектора переменных $u=\{u_\beta\}_{\beta\in A}$. В частности, таким образом получают систему Навье—Стокса в газовой динамике, систему Эйлера для несжимаемой жидкости и т. п. Следует отметить, что в некоторых случаях операторов столкновений S Больцмана-Смолуховского соотношения сохранения могут переходить на решениях f уравнения (1) с течением времени в соотношения диссипации $\int_\Omega S^{(\omega)}(f)\mu_\beta(d\omega)<0$ даже при условии, что в начальный момент времени для функции $f|_{t=0}$ имеет место соотношение сохранения $\int_\Omega S^{(\omega)}(f|_{t=0})\mu_\beta(d\omega)=0$. В этом случае для задачи Коши $(1_0),(2_0)$ с оператором столкновений Смолуховского (5), (6) наблюдается интересное явление, когда соотношение сохранения $\langle S,\mu_\beta\rangle=0$ переходит в строгое неравенство $\langle S,\mu_\beta\rangle<0$, которое выполняется при всех временах, больших некоторого критического времени t_c. Т. е. отмеченное свойство характеризует оператор столкновений. В критический момент времени t_c, когда соотношение сохранения переходит в диссипацию, решение кинетического уравнения теряет порядок гладкости.

Доказательство существования неотрицательых решений $f^{(\omega)} \geq 0$ и их отыскание для уравнения

$$S(f) + q = 0 \tag{9}$$

в случае стационарного источника $q^{(\omega)} \geq 0$ является крайне важной и трудной задачей физической кинетики. Причина – в том, что эти решения сосредоточены на множестве точек разрыва оператора S.

Действительно, существенной чертой, характеризующей операторы столкновений $S(f)$ для этих задач, является их локальная липшиц-непрерывность в норме $\|.\|_{\mu_\beta}$ по некоторой мере μ_β, $\beta \in A$, связанной с соответствующим законом сохранения на множестве финитных функций φ, для которых всегда справедливо соотношение сохранения $\langle S(\varphi), \mu_\beta \rangle = 0$. Выбирем последовательность финитных функций $\varphi_n \to f$ в норме $\|.\|_{\mu_\beta}$ при $n \to \infty$. Поскольку на финитных функциях φ_n выполняется соотношение сохранения $\langle S(\varphi_n), \mu_\beta \rangle = 0$, а на решении уравнения (7) для $q > 0$ имеет место строгое неравенство $\langle S(f), \mu_\beta \rangle < 0$, то на указанное решение f является точкой разрыва для оператора S в норме $\|.\|_{\mu_\beta}$. Таким образом, разрывность оператора столкновений на решениях уравнения (7) создает существенные трудности для отыскания искомых решений.

В связи с рассмотренным выше явлением перехода соотношения сохранения в соотношение диссипации представляет интерес изучение решений стационарной задачи (9), которая в случае коагуляции непрерывных масс (5)записывается в виде

$$\frac{1}{2}\int_0^{\omega} \Phi(\omega-\omega_1,\omega_1) f(\omega-\omega_1) f(\omega_1) d\omega_1 - f(\omega)\int_0^{\infty} \Phi(\omega,\omega_1) f(\omega_1) d\omega_1 + q(\omega) = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}^+, \tag{10}$$

где неотрицательная величина $q(w)$ определяет интенсивность, с которой частицы массы $\omega \geq 0$ вводятся в коагулирующую систему. Отметим, что решения f уравнения (10) автоматически должны удовлетворять требованию

$$S(f) = -q < 0,$$

если $q > 0$ где S — оператор (5) столкновений Смолуховского кинетической теории коагуляции. Ясно, что такие решения не принадлежат множеству консервативности оператора столкновений, а лежат во множестве диссипативности в силу неотрицательности источника.

Такого рода задачи возникают при описании роста пор в металлах при облучении потоком быстрых нейтронов, которые, выбивая атомы из кристаллической решетки, служат причиной возникновения пор. При описании работы реактивных двигателей приходится учитывать коагуляцию слипающихся частичек, которые возникают в процессе горения топлива, т. е. здесь источником коагулирующих частиц является химическая реакция, протекающая во внешней среде. Важный класс задач связан с коагуляцией пор в поровом пространстве нефтегазовых пластов при пульсации давления в залежи.

Ниже рассматривается вопрос о построении решения уравнения коагуляции (10) в частном случае, когда ядро Φ имеет мультипликативное представление

$$\Phi(\omega,\omega_1) = \alpha(\omega)\alpha(\omega_1), \quad \alpha(\omega) > 0, \quad \omega,\omega_1 \in \mathbb{R}^+.$$

Сразу подчеркнем, что в случае мультипликативной функции Φ следующая замена независимой переменной

$$\alpha f \mapsto f$$

приводит уравнение (10) к стандартному виду:

$$\frac{1}{2}(f * f)(\omega) - f(\omega)\int_0^{\infty} f(\omega_1) d\omega_1 + q(\omega) = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}^+, \tag{11}$$

где символ * означает свертку. Очевидно, вопрос о построении решения интегрального уравнения (11) связан с определением величины интеграла $\int_0^\infty f(\omega_1)d\omega_1$. Если функция f удовлетворяет (11), то непосредственным интегрированием по $\omega \in \mathbb{R}^+$ получаем

$$\int_0^\infty f(\omega_1)d\omega_1 = \left\{2\int_0^\infty q(\omega)d\omega\right\}^{1/2} \stackrel{def}{=} Q,$$

если считать заданную функцию $q \geq 0$ суммируемой на $\mathbb{R}^+$. Для построения решения уравнения (11) рассмотрим вспомогательную задачу

$$\frac{1}{2}\varphi * \varphi - Q\varphi + q = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}^+, \tag{12}$$

ЛЕММА 1. *При любой суммируемой неотрицательной функции* $q \neq 0$ *на* $\mathbb{R}^+$ *решение задачи* (12) *может быть найдено как предел в метрике пространства* $L^1_{[0,\infty]}$ *при* $n \to \infty$ *монотонно возрастающей последовательности функций* $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$, *где*

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n, \qquad \varphi_0 = 0, \qquad \varphi_{n+1} = Q^{-1}\left[\frac{1}{2}\varphi_n * \varphi_n + q\right], \quad n \geq 0, \tag{13}$$

при условии, что величина $Q > 0$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неотрицательности q и положительности Q последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ является монотонно возрастающей, ибо для неотрицательных функций φ оператор, определенный правой частью (13), монотонно возрастающий. Таким образом, справедливы соотношения

$$\varphi_n \geq 0, \quad \varphi_n \in L^1_{[0,\infty]}, \quad n \geq 0.$$

Обозначим

$$y_n = \int_0^\infty \varphi_n d\mu, \quad n \geq 0.$$

Из соотношения (13) получаем

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}Q^{-1}\left[y_n^2 + Q^2\right], \quad n \geq 0, \quad y_0 = 0. \tag{14}$$

Покажем, что при каждом номере $n \geq 0$ справедливо неравенство

$$y_n \leq Q.$$

Действительно, величина $Q > 0$ является единственным корнем квадратного уравнения

$$y^2 - 2Qy + Q^2 = 0. \tag{15}$$

Обозначим $z_n = Q - y_n$ и воспользовавшись равенством

$$Q = (Q^2 + Q^2)(2Q)^{-1},$$

имеем

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}Q^{-1}z_n\left[Q + y_n\right], \quad n \geq 0.$$

Поскольку $y_n \geq 0$, $Q > 0$, $z_0 > 0$ то при каждом номере $n \geq 0$ величины $z_n \geq 0$. Следовательно, выполняется неравенство

$$y_n \leq Q, \quad n \geq 0.$$

Применяя теорему Б. Леви о предельном переходе под знаком интеграла, устремляя $n \to \infty$ в соотношении (13), получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае $Q = 0$ почти везде функция $q = 0$ и, значит, уравнение (12) имеет единственное решение $f = 0$ в классе неотрицательных функций (с точностью до эквивалентности на множестве меры нуль).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция q неотрицательная суммируемая на* $\mathbb{R}^+$. *Тогда уравнение* (11) *имеет неотрицательное суммируемое решение f, являющееся пределом монотонно возрастающих итераций* (13) *при Q > 0 и решение f = 0 при Q =0 Это решение единственное с точностью до эквивалентности в пространстве* $L^1_{[0,\infty]}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства используем лемму 1. Достаточно убедиться, что для функции

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$$

интеграл на $\mathbb{R}^+$ равен Q. В силу теоремы Б. Леви

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \varphi_n \, d\omega = \int_0^\infty \varphi d\omega.$$

Следовательно, достаточно установить равенство

$$\lim_{n\to\infty} y_n = Q,$$

где величины $\{y_n\}$ определены соотношениями (14). Очевидно, монотонно возрастающая ограниченная последовательность $\{y_n\}$ имеет предел, который обозначим y. Но этот предел совпадает с единственным корнем уравнения (15), который равен Q. Значит, $y = Q$ и, следовательно,

$$\int_0^\infty \varphi d\mu = Q.$$

Итак, решение вспомогательной задачи (12) является решением задачи (11). Единственность решения вытекает из единственности решения задачи (12). Теорема доказана.

Теорема 1 даёт возможность построения явных решений уравнения Смолуховского кинетической теории коагуляции [1] , монотонно убывающих по времени. На этих решениях нарушается соотношение сохранения для всех неотрицательных значений времени, т. е. происходит постоянная диссипации вещества частиц, связанная с возникновением полимерных структур.

Действительно, рассмотрим решение $f^{(\cdot)}(t)$ уравнения (1_0) с оператором столкновений Смолуховского (5), которое им в виде

$$f^{(\omega)}(t) \overset{def}{=} f(\omega,t) = q(\omega)(t+1)^{-1}, \quad \omega, t \ge 0, \tag{16}$$

где $q(\omega) > 0$ при $\omega \ge 0$ и удовлетворяет условиям теоремы 1. Подставляя (16) в (1_0) с оператором (5), получаем, что функция q необходимо должна удовлетворять уравнению

$$S_\Phi(q) + q = 0, \quad \omega \ge 0. \tag{17}$$

где оператор $S_\Phi(q)$ определен формулой (5). При заданном положительном q найдем симметричные неотрицательные ядра Ф, для которых (17) обращается в тождество, т. е. решаем обратную задачу. Рассмотрим ее решение в классе мультипликативных ядер, полагая

$$\Phi(\omega,\omega_1) = \alpha(\omega)\alpha(\omega_1), \quad \omega,\omega_1 \ge 0. \tag{18}$$

Обозначим

$$f(\omega) = \alpha(\omega) q(\omega), \quad \omega \ge 0, \tag{19}$$

и подставим (19) в (17), выражая величины α и q в операторе S_Φ через неизвестную f. Тем самым получаем уравнение

$$S_1(f) + q = 0, \quad \omega \ge 0, \tag{20}$$

которое совпадает с уравнением (11), исследованным в теореме 1. Следовательно, для рассматриваемых положительных q существует единственное положительное решение уравнения (20) f и, значит, ядро Ф отыскивается по формулам (18), (19).

Значительный интерес вызывает проблема разрешимости уравнения (9) с оператором столкновений Больцмана (4). Наличие решений у этого уравнения может дать новый класс точных решений уравнения Больцмана вида (16) с диссипативными свойствами в дополнение к классу решений А. В. Бобылева [2, 3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 18-01-00343.

Литература

1. Галкин В. А. Анализ математических моделей: системы законов сохранения, уравнения Больцмана и Смолуховского. – М.: БИНОМ, 2009.

2. Бобылев А. В. О точных решениях уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. – 225, № 6, – 1296 – 1299.

3. Бобылев А. В. Об одном классе инвариантных решений уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. – 231, № 3, – 571 – 574 .

SOME UNSOLVED ISSUES IN PHYSICAL KINETICS PROBLEMS

V. A. Galkin

Surgut State University, Surgut

A class of stationary problems with a source of particles is considered for physical kinetics equations with operators of Boltzmann-type collisions. We suggest an algorithm to construct dissipative solutions that allows finding accurate solutions of non-stationary Smolukhovsky equation for the spatially uniform systems with multiplicative nucleus of particles coalescence. The algorithm to construct such solutions is substantiated. An important specific feature of this class of solutions is the fact that the operator of collisions here is disruptive in the rate of permanence relation. The problem of existence of such solutions in the case of the operator of Boltzmann collisions of the gas kinetic theory is formulated that would allow complementing the class of exact solutions by A.V. Bobylev with dissipative solutions.

Key words: physical kinetics, operators of Boltzmann-type and Smolukhovsky-type collisions, disruptive instructions, conservation law, exact solutions, dissipative solutions.

УДК 519.6, 533.7, 533.9

ТРЕХМЕРНЫЙ РАСЧЕТ ЭКСПЕРИМЕНТА НА УСТАНОВКЕ NIF: СХЕМА ВВОДА ЛИ В БОКС-КОНВЕРТОР И СЖАТИЕ ТЕРМОЯДЕРНОЙ МИШЕНИ

А. С. Гнутов, С. А. Донцов, Д. М. Линник, Л. Ф. Потапкина, П. В. Рыбаченко

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров

В данной работе рассматривается программная реализация, требуемая для численного моделирования процесса обжатия термоядерной мишени для условий работы установки National Ignition