

The comparative analysis of simulation results obtained with the LOGOS and ANSYS CFX packages demonstrates a good agreement in all simulated parameters.

*Key words:* LOGOS software, cross-verification, marine reactor plant, RITM 200, turbulent flow, non-isothermal flow mixing, turbulent convection, CFD codes, pressure chamber, Ansys CFX.

УДК 519.61, 519.63, 550.3

## ОПТИМИЗИРОВАННОЕ ПРИМЕНЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОГО МЕТОДА АРНОЛЬДИ ПРИ ПРИБЛИЖЁННОМ РЕШЕНИИ ДВУХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ

*В. Л. Друскин<sup>1</sup>, М. Ю. Заславский<sup>2</sup>, Л. А. Книжнерман<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Druskin Algorithms, Бостон, США

и Вустерский политехнический институт, Вустер, США

<sup>2</sup>Научно-исследовательский центр «Шлюмберже-Долл», Бостон, США

<sup>3</sup>АО «Центральная геофизическая экспедиция» (холдинг «Росгеология»), Москва

В докладе описаны численные методы решения временных и частотных задач электроразведки в случае, когда требуется знать решение для широкого диапазона моментов времени или частот. Решение сводится к вычислению матричных функций с параметрами – временем или частотой соответственно. Применяется рациональный метод Арнольди, то есть проекция Галёркина на рациональное подпространство Крылова. Для определения оптимальных сдвигов используются скелетная аппроксимация и теория плоского потенциала. Показано, что предельные распределения сдвигов слабо сходятся к мерам из равновесной пары мер подходящих плоских конденсаторов в расширенной комплексной плоскости. Работа предложенных методов с расширяемыми последовательностями сдвигов проиллюстрирована на примерах временной и частотной электроразведочных задач. Численные результаты подтверждают эффективность предложенных нами методов.

*Ключевые слова:* рациональный метод Арнольди; вычисление матричных функций с параметрами; численное решение; временные и частотные задачи электроразведки; теория плоского потенциала; скелетная аппроксимация; плоский конденсатор; третья задача Золотарёва в комплексной плоскости; слабая сходимости мер.

**1. Крыловские и рациональные крыловские методы.** Многие задачи вычислительной геофизики (и не только геофизики) требуют вычисления векторов  $u$  вида

$$u = f(A)b, \quad A \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad b \in \mathbb{C}^N, \quad (1)$$

где функция  $f$  определена на числовом образе («поле значений») матрицы  $A$

$$W(A) = \left\{ \langle Ac, c \rangle \mid c \in \mathbb{C}^N, \|c\| = 1 \right\}. \quad (2)$$

Пусть  $U \subset \mathbb{C}^N$  – линейное подпространство размерности  $n$ . Популярный способ приближения  $u$  – осуществить проекцию Галёркина на  $U$ , что делается по формулам

$$u \approx u_n = Gf(V)G^*b, \quad G \in \mathbb{C}^{N \times n} = (g_1 \dots g_n), \quad (3)$$

$$\text{span}\{g_1, \dots, g_n\} = U, \quad G^*G = I_n, \quad V = G^*AG \in \mathbb{C}^n. \quad (4)$$

Здесь  $u_n$  — аппроксиманта,  $(g_1 \dots g_n)$  — ортонормальный базис  $U$ ,  $V$  — проекция  $A$  на  $U$ , выраженная в этом базисе.

Если в качестве  $U$  брать обычные (полиномиальные) подпространства Крылова

$$U = K^n(A, b) = \text{span}\{b, A^1b, \dots, A^{n-1}b\}, \quad (5)$$

то получается метод Арнольди (в эрмитовом случае  $A^* = A$  — метод Ланцоша). От матрицы требуется возможность в явном или неявном виде умножать на неё векторы:  $x \mapsto Ax$ .

При использовании рациональных подпространств Крылова (РПК)

$$U = \text{span}\{(A + s_1I)^{-1}b, \dots, (A + s_nI)^{-1}b\}, \quad s_j \notin -W, \quad (6)$$

получается рациональный метод Арнольди (РА), предложенный Акселем Руэ [1]. Требуется вычислять  $x \mapsto (A + sI)^{-1}x$  (т. е. решать СЛАУ). Допускается случай  $s_j = \infty$ , тогда соответствующий шаг становится полиномиальным; нам здесь это не понадобится.

Построение базиса подпространства  $U$  проводится с помощью модифицированного процесса ортогонализации Грама — Шмидта. В случае (5) получается процесс Арнольди/Ланцоша, в случае (6) — более сложный процесс.

*Факторы, влияющие на эффективность РА:*

- степени числителя и знаменателя рациональной аппроксиманты к  $f$ , нужные для получения заданной точности;
- способ решения систем со сдвинутой матрицей  $A + sI$ : итерационный (наличие хороших предобуславливателей?), прямой (PARDISO? Возможность повторения сдвигов  $s$  с прицелом на многократное использование одной факторизации?);
- возможность использования «расширяемой» (не зависящей от  $n$ ) последовательности сдвигов  $s$ , что позволяет не пересчитывать столбцы  $g_1, \dots, g_n$  при переходе от  $n$  к  $n + 1$ .

## 2. Постановка временной задачи — задачи вычисления семейства матричных экспонент.

Нас интересует экономичное вычисление векторов

$$\exp(-tA)b, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

при предположениях

$$A^* = A, \quad 0 < \lambda_{\min}I \leq A \leq \lambda_{\max}I. \quad (8)$$

Эта задача связана со вспомогательной частотной задачей — задачей вычисления векторов

$$(A + i\omega I)^{-1}b, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

при том же условии (8) посредством преобразования Фурье. Обе задачи (частотная и временная) содержат параметр (время  $t$  или частоту  $\omega$ ). Иными словами, требуется вычислить целое семейство матричных функций, помноженных на вектор. Это обстоятельство не позволяет просто воспользоваться хорошей рациональной аппроксимантой к индивидуальной функции  $f$  из (1) и приводит к довольно изощрённым аналитическим конструкциям.

Отметим, что благодаря эрмитовости  $A$  числовой образ (2) совпадает со спектральным отрезком.

Электроразведочная интерпретация рассматриваемых задач очевидна: если из системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении исключить электрическую напряжённость  $E$  или магнитную напряжённость  $H$ , а затем дискретизировать пространственный оператор полученного уравнения, то получится матрица  $A$ .

**Замечание 1.** Л. Н. Трефевен с соавторами разработал квадратурный подход к вычислению (7) с  $0 < t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$  при условии умеренности отношения  $t_{\max}/t_{\min}$ ; см., например, [2]. У нас  $t$  — произвольное неотрицательное.

**3. Галёркинская аппроксимация на рациональном подпространстве Крылова для вспомогательной частотной задачи.** Приближённо вычислять векторы (9) мы будем с помощью РА (3), (4), (6) при удачном выборе сдвигов  $s_j$ . При этом сдвиги не зависят от частоты  $\omega$ .

Следующее утверждение показывает, что хорошая скалярная рациональная аппроксимация семейством рациональных функций с общими полюсами  $-s_j$  влечёт хорошую оценку ошибки решения частотной задачи:

**Предложение 1.** Пусть  $p$  – многочлен степени не выше  $n - 1$ . Тогда для приближённого вычисления (9) справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left\| (A + i\omega I)^{-1} b - G(V + \omega I_n)^{-1} G^* b \right\| \leq 2 \\ & \leq 2 \max_{\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}} \left| \frac{1}{\lambda + i\omega} - \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} \right|, \end{aligned} \quad (10)$$

$$q(\lambda) = \prod_{j=1}^n (\lambda + s_j). \quad (11)$$

Полезно иметь в виду, что знаменатель  $q$  из (11) зависит только от сдвигов  $s_j$ , в то время как числитель  $p$  для получения хорошей оценки должен зависеть ещё и от  $\omega$ . Формула (10) оценивает ошибку решения векторной задачи через погрешность скалярной аппроксимации.

Оценка, похожая на (10), была независимо получена Б. Бекерманном и Л. Райхелем в [3].

**4. Скелетная аппроксимация – средство выбора рациональных функций  $p/q$ .** Скелетная аппроксимация (СА) была введена в [4]. В нужном нам частном случае – для приближаемой функции двух переменных  $1/(\lambda + s)$  – она была исследована в [5]. В этом случае скелетная аппроксиманта с параметрами  $s_1, \dots, s_n, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  определяется как

$$f_{\text{skel}}(\lambda, s) = \left( \frac{1}{\lambda + s_1}, \dots, \frac{1}{\lambda + s_n} \right) M^{-1} \left( \frac{1}{s + \lambda_1}, \dots, \frac{1}{s + \lambda_n} \right)^T, \quad (12)$$

где

$$M = (M_{kl}), \quad M_{kl} = 1/(\lambda_k + s_l), \quad 1 \leq k, l \leq n. \quad (13)$$

Теорема 3 из [5] даёт выражение для относительной ошибки  $\eta$  приближения функции  $1/(\lambda + s)$  аппроксимантой (12), (13):

$$\eta = \left[ \frac{1}{\lambda + s} - f_{\text{skel}}(\lambda, s) \right] \cdot (\lambda + s) = \prod_{j=1}^n \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda + s_j} \cdot \prod_{j=1}^n \frac{s - s_j}{s + \lambda_j}. \quad (14)$$

Переписав выражение (14) в виде

$$\eta(\lambda, s) = \frac{r(\lambda)}{r(-s)}, \quad r(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - \lambda_j}{z + s_j}, \quad (15)$$

мы получаем представление  $\eta$ , оптимизация правой части в котором приводит к третьей задаче Золотарёва в комплексной плоскости. Из формулы (15) следует, что  $s_j$  и  $\lambda_j$  являются интерполяционными узлами. Мы держим в уме подстановки  $\lambda \hookrightarrow A$ ,  $s \hookrightarrow i\omega I$ .

**5. Возвращение от вспомогательной частотной задачи к эволюционной.** Так как матрица  $A$  самосопряжённая, достаточно изучить ошибку аппроксимации  $\in (\lambda, t)$  скалярной задачи – для  $e^{-\lambda}$ . По-прежнему используя скелетную аппроксимацию, с помощью обратного преобразования Фурье  $F_\omega^{-1}$  выводим:

$$\in (\lambda, t) \equiv F_\omega^{-1} \left[ \frac{1}{\lambda + i\omega} - f_{\text{skel}}(\lambda, i\omega) \right] (t), \quad t \geq 0. \quad (16)$$

Из теоремы Планшереля и из (14), (15), (16) следует

**Предложение 2** [6]. *Ошибка аппроксимации удовлетворяет неравенству*

$$\max_{\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} \left\| \epsilon(\lambda, \cdot) \right\|_{L_2[0, +\infty]} \leq \pi \sqrt{2/\lambda_{\min}} \max_{\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} |r(\lambda)| \max_{s \in i\mathbb{R} \cup \{\infty\}} |r(s)|^{-1}. \quad (17)$$

**6. Приближённая оптимизация параметров: приближённое решение третьей задачи Золотарёва.** Для оптимизации выбора параметров  $s_j$  и  $\lambda_j$  из (15), (17) рассмотрим плоский конденсатор  $(E, D)$  с компактными (в расширенной комплексной плоскости  $\bar{C}$ ) платами

$$E = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] = W(A) \quad \text{и} \quad D = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z \leq 0\}. \quad (18)$$

Определим величины (далее используются эллиптические интегралы)

$$\sigma_n(E, D) = \min_{\lambda_1, \dots, \lambda_n, s_1, \dots, s_n} \left( \max_{\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} |r(\lambda)| / \min_{s \in i\mathbb{R} \cup \{\infty\}} |r(s)| \right); \quad (19)$$

$$\delta = \lambda_{\min} / \lambda_{\max}, \quad \mu = \left( \frac{1 - \sqrt{\delta}}{1 + \sqrt{\delta}} \right)^2, \quad (20)$$

$$\rho = \exp \left( -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{K'(\mu)}{K(\mu)} \right)^{\lambda_{\max}/\lambda_{\min} \gg 1} \exp \left[ -\frac{\pi^2}{2} \log(4\lambda_{\max}/\lambda_{\min})^{-1} \right]. \quad (21)$$

**Теорема 1** [6]. *Справедливо двойное неравенство*

$$\rho^n \leq \sigma_n(E, D) \leq 2\rho^n. \quad (22)$$

Нижняя оценка получается вычислением ёмкости конденсатора  $(E, D)$  из (18) и применением теоремы Гончара из [7], в терминах ёмкости сформулированной. Верхняя оценка получается при наборе параметров, являющемся результатом минимизации при дополнительном условии  $s_j = \lambda_j$ :

$$s_j = \lambda_j = \lambda_{\max} dn \left( \frac{2(n-j)+1}{2n} K'(\delta), \sqrt{1-\delta^2} \right), \quad j = 1, \dots, n. \quad (23)$$

В [8] показано, что набор (23) удовлетворяет некоторому локальному условию оптимальности.

**Замечание 2.** *Предельное распределение параметров (в смысле слабой сходимости мер) соответствует равновесной паре мер конденсатора. Это проясняет появление в данной задаче теории плоского потенциала.*

**Замечание 3.** *Тот факт, что верхняя граница в (22) отличается от нижней границы всего в два раза, показывает, что существенно улучшить наши результаты в данной задаче нельзя.*

**Замечание 4.** *Все параметры в (23) вещественны, что позволяет использовать вещественную арифметику в производственных фортран-программах.*

**Замечание 5.** *Если мы возьмём (снова вещественную) бесконечную последовательность  $s_j = \lambda_j$ , имеющую то же предельное (при  $n \rightarrow \infty$ ) распределение, что и в (23), мы получим тот же асимптотический (в смысле Коши – Адамара) показатель сходимости  $\rho$ . Это позволяет расширять набор параметров при переходе от  $n$  к  $n+1$  (в стиле [9–12]).*

**7. Численные эксперименты для временной системы уравнений Максвелла (временной задачи электроразведки).** Мы сравниваем взятые из [6] результаты, полученные нашим численным методом с расширяемой последовательностью сдвигов  $s_j$ , с результатами, полученными по методу SIA-RD, который разработан для индивидуального значения  $t$ , а назван Shift and Invert Arnoldi в [13] и Restricted Denominator Method в [14] соответственно. Это РА с единственным и многократно повторяемым сдвигом  $s$ . Выбор сдвига для SIA-RD мы делаем оптимальным образом, согласно [15], для  $t = 1$  и  $n = 60$ .

На рис. 1 изображена в разрезе модель среды, выбранная для экспериментов. Трёхмерная аномалия в виде прямоугольного параллелепипеда с  $\sigma = 0,1$  находится в горизонтально-слоистой среде.

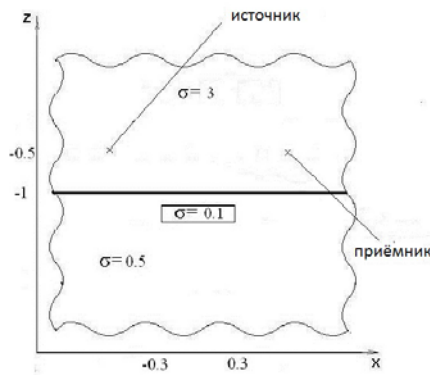


Рис. 1. Модель среды для временной задачи ( $\sigma$  – электропроводность,  $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = 0$ )

Наш метод на рисунках мы обозначаем как RAOS (Rational Arnoldi with Optimized Shifts). Сдвиги мы берём из псевдослучайной последовательности (это практичный вариант), что объясняет мелкие «подпрыгивания» ошибки RAOS.

На рис. 2–4 приведены сравнительные результаты сходимости для моментов времени  $t = 1$ , 10 и 100, и соответственно в терминах относительной ошибки в приёмнике поля. На рисунках также представлен «теоретический наклон» кривых ошибки RAOS  $\text{const} \rho^n$ , где значение  $\rho$  взято из (19 – 21). Для  $t = 1$  SIA-RD сходится существенно быстрее, чем RAOS. Это неудивительно, так как здесь метод SIA-RD используется строго по назначению, а RAOS решает более общую задачу. Случай  $t = 10$  уже показывает, что RAOS предпочтителен для значений  $t$ , далёких от значения, входного для SIA-RD. В случае  $t = 100$  SIA-RD практически не сходится, в то время как RAOS демонстрирует почти ту же скорость сходимости, что для  $t = 1$  и  $t = 10$ . При этом скорость сходимости RAOS хорошо согласуется с «теоретическим наклоном».

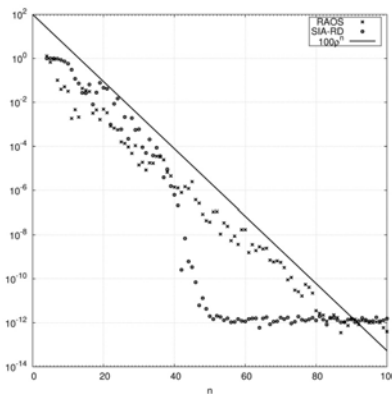


Рис. 2. Временная задача: сравнительная сходимость методов для  $t = 1$

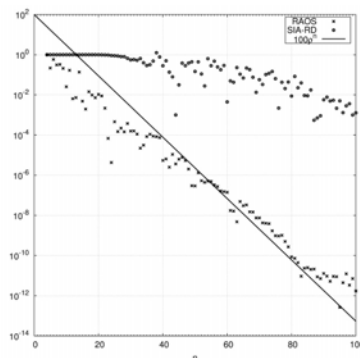


Рис. 3. Временная задача: сравнительная сходимость методов для  $t = 10$

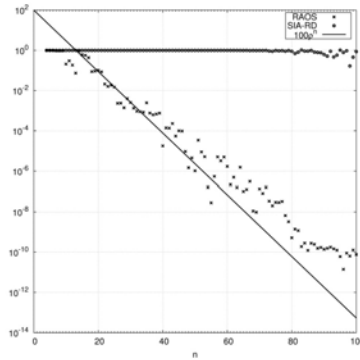


Рис. 4. Временная задача: сравнительная сходимость методов для  $t = 10$

**8. Постановка частотной задачи (задачи вычисления семейства матричных резольвент с мнимыми сдвигами) для неотрицательно определённого оператора.** В статье [16] рассмотрена задача экономичного вычисления векторов

$$u = (A + i\omega I)^{-1} b \quad (24)$$

при условиях

$$A^* = A \geq 0, \quad 0 < \omega_{\min} \leq |\omega| \leq \omega_{\max}. \quad (25)$$

Отметим, что формула (24) совпадает с первой формулой из (9), но условия (25) отличаются от комбинации условий на  $A$  и  $\omega$  из (8) и (9).

Для решения задачи (24) – (25) так же, как во временной задаче, применяется ГА на РПК. Приближённо решается третья задача Золотарёва для конденсатора с платами

$$[0, +\infty] \text{ и } [\omega_{\min} i, \omega_{\max} i] \cup [-\omega_{\max} i, -\omega_{\min} i]. \quad (26)$$

То, что вторая плата в (26) несвязна, не противоречит общей теории, хотя и несколько усложняет обоснование. Асимптотически оптимальные параметры и тут выражаются в терминах эллиптических функций и полных интегралов. При  $\omega_{\max}/\omega_{\min} \gg 1$  асимптотический множитель сходимости приближённо выражается формулой

$$\rho \approx \exp\left[-0,5\pi^2 n / \log(16\omega_{\max}/\omega_{\min})\right]. \quad (27)$$

**9. Численный эксперимент для частотной системы уравнений Максвелла (частотной задачи электроразведки).** Мы воспроизводим пример из [16]. Модель среды изображена в разрезе на рис. 5. Она также представляет собой аномалию в виде прямоугольного параллелепипеда, вставленную в горизонтально-слоистую среду. Источником является вертикально падающая плоская волна.

Рис. 6 показывает максимальную по допустимым частотам относительную норму ошибки в приёмниках. Видно, что поведение нашего метода хорошо согласуется с асимптотической оценкой погрешности; последняя представлена функцией  $\text{const } \rho^n$ , где  $\rho$  взято из правой части (27).

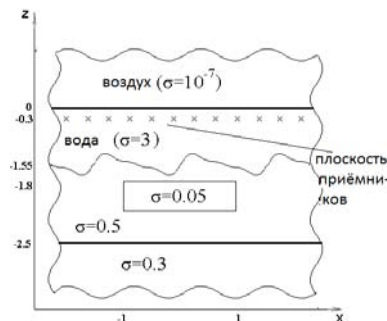


Рис. 5. Модель среды для частотной задачи ( $\sigma$  – электропроводность,  $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = 0$ )

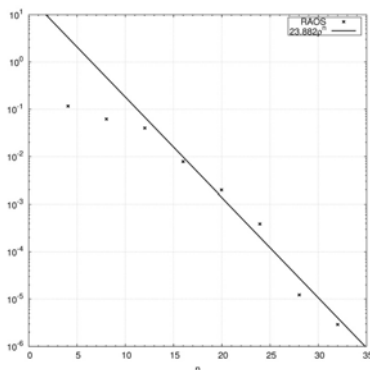


Рис. 6. Частотная задача: сходимость RAOS в сравнении с теоретической оценкой

**10. Распараллеливание.** В случаях, когда это выгодно, можно распределять работу по факторизации разных матриц  $A + s_j I$  между процессорами или процессорными ядрами. Может также распределяться работа по факторизации при фиксированном  $j$ . Суперкомпьютеры в полной мощи здесь не требуются: благодаря быстрой сходимости достаточно нескольких десятков (ну, до двух сотен) ядер.

**Благодарности.** Мы благодарим А. Абубакара, М. Айерманна, А. И. Аптекарева, Б. Бекерманна, А. Б. Богатырёва, М. А. Бочева, В. С. Буярова, В. И. Лебедева, Л. Райхеля, В. Н. Сорокина, С. П. Суетина, Д. Н. Тулякова, Е. Е. Тыртышникову, Г. Флэгга и Т. Хабаши за полезные обсуждения и/или библиографическую поддержку.

## Литература

1. Ruhe A. The rational Krylov algorithm for nonsymmetric eigenvalue problems. III: Complex shifts for real matrices // BIT. – 1994. – V. 34. – P. 165 – 176.
2. Trefethen L. N., Weideman J. A. C., Schmelzer T. Talbot quadratures and rational approximations // BIT. – 2006. – V. 46. – P. 653 – 670.
3. Beckermann B., Reichel L. Error estimation and evaluation of matrix functions via the Faber transform // SIAM J. Num. Anal. – 2009. – V. 47. – P. 3849 – 3883.
4. Tyrtshnikov E. E. Mosaic-skeleton approximations // Calcolo. – 1996. – V. 33. – P. 47 – 57.
5. Оселедец И. В. Оценки снизу для сепарабельных аппроксимаций ядра Гильберта // Матем. сб. – 2007. – Т. 198, № 3. – С. 137 – 144.
6. Druskin V., Knizhnerman L., Zaslavsky M. Solution of large scale evolutionary problems using rational Krylov subspaces with optimized shifts // SIAM J. Sci. Comp. – 2009. – V. 31, no. 5. – P. 3760-3780.
7. Гончар А. А. О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями // Матем. сб. – 1969. – Т. 78 (120), № 4. – С. 640 – 654.
8. Le Bailly B., Thiran J. P. Optimal rational functions for the generalized Zolotarev problem in the complex plane // SIAM J. Numer. Anal. – 2000. – V. 38, no 5. – P. 1409– 1424.
9. Гончар А. А. О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций // Матем. сб. – 1978. – Т. 105 (147), № 2. – С. 147 – 163.
10. Saff E. B., Totik V. Logarithmic potentials with external fields. – Berlin et al.: Springer-Verlag, 1997.
11. Leja F. Sur certaines suites liées aux ensemble plan et leur application à la representation conforme // Ann. Polon. Math. – 1957. – V. 4. – P. 8 – 13.
12. Baglama J., Calvetti D., Reichel L. Fast Leja points // Elec. Trans. Numer. Anal. – 1998. – V. 7. – P. 124 – 140.
13. van den Eshof J., Hochbruck M. Preconditioning Lanczos approximations to the matrix exponential // SIAM J. Sci. Comp. – 2006. – V. 27, no 4. – P. 1438 – 1457.
14. Moret I., Novati P. RD-rational approximations of matrix exponential // BIT. – 2003. – V. 43. – P. 1 – 18.

15. Andersson J.-E. Approximation of  $e^x$  by rational functions with concentrated negative poles // J. Approx. Theory. – 1981. – V. 32 (2). – P. 85 – 95.
16. Knizhnerman L., Druskin V., Zaslavsky M. On optimal convergence rate of the Rational Krylov Subspace Reduction for electromagnetic problems in unbounded domains // SIAM J. Numer. Anal. – 2009. – V. 47, no 2. – P. 953 – 971.

## OPTIMIZED APPLICATION OF THE RATIONAL ARNOLDI METHOD TO APPROXIMATE SOLUTION OF TWO NONSTATIONARY ELECTRICAL PROSPECTING PROBLEMS

*V. L. Druskin<sup>1</sup>, M. Yu. Zaslavsky<sup>2</sup>, L. A. Knizhnerman<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Druskin Algorithms, Boston, U.S.A.  
and Worcester Polytechnic Institute, Worcester, U.S.A.

<sup>2</sup>Schlumberger-Doll Research, Boston, U.S.A.

<sup>3</sup>JSC Central Geophysical Expedition/Rusgeology,  
Moscow

In this talk, numerical methods of solving temporal and frequency electrical prospecting problems, when the solution is to be known for a wide range of temporal moments or frequencies, are described. The solution is reduced to computation of parameterized matrix functions, time or frequency being a parameter. The Rational Arnoldi Method, i.e., Galerkin projection onto a rational Krylov subspace, is exploited. To determine optimal shifts, skeleton approximation and the plane potential theory are used. It is shown that the limit shift distributions weakly converge to the measures from the equilibrium measure pairs for suitable plane condensers in the extended complex plane. Operation of the proposed methods with extendable shift sequences is illustrated on examples of temporal and frequency electrical prospecting problems. The numerical results have confirmed the effectiveness of the methods that we proposed.

*Keywords:* the rational Arnoldi method; computation of parameterized matrix functions; numerical solution; temporal and frequency electrical prospecting problem; the plane potential theory; skeleton approximation; a plane condenser; the third Zolotarev problem in the complex plane; weak convergence of measures.

УДК 519.6

## ПАКЕТ ПРОГРАММ ЛОГОС. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРОЧНОСТИ

*Д. Ю. Дьянов, В. В. Борляев, А. А. Челаков, А. В. Казанцев, К. В. Циберев,  
М. В. Медведкина, Е. И. Наумова, А. М. Гельберг, И. В. Серякова*

Российский федеральный ядерный центр –  
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров

В работе представлено описание текущих функциональных возможностей модуля пакета программ ЛОГОС в части решения динамических задач прочности. К данным возможностям