

A VIRTUAL 3D PRINTER: THE FUNCTIONAL CAPABILITIES FOR THE TOPOLOGY OPTIMIZATION OF STRUCTURES

D. Yu. D'yanov, M. V. Medvedkina, A. N. Bykov, V. V. Popov

Russian Federal Nuclear Center –
All-Russian Research Institute of Experimental Physics, Sarov

The paper describes approaches and algorithms used in the basic version of software «Virtual 3D printer» to find new topologies of structures. To demonstrate the serviceability and efficiency of the implemented functional capabilities for the simulation of an optimal topology, numerical simulation results are presented for a number of problems. The paper also gives the comparative analysis of the obtained results and model solutions.

Key words: virtual 3D printer, topology optimization, ESO, BESO, SIMP, PTO.

УДК 519.63, 004.925.84

ПАКЕТ ПРОГРАММ ЛОГОС. УЧЕТ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ПРОЧНОСТИ

А. Ю. Ерёменко, С. С. Косарим, Р. А. Барабанов

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров

В докладе представлен обзор текущего состояния учета контактного взаимодействия в статических задачах прочности в пакете программ ЛОГОС. Описаны методы и алгоритмы для поиска контактного взаимодействия. Приведены методы учета контактного взаимодействия, такие как метод Штрафа (Penalty Method) и пошаговый метод Лагранжа (Augmented Lagrange Method). Рассмотрены разные способы приложения контактных сил: узел-в-грань и грань-в-грань. Описан метод учета трения между контактирующими телами. Даны все основные формулы. В заключение приведено решение тестовых задач.

Ключевые слова: пакет программ ЛОГОС, статические задачи прочности, учет контактного взаимодействия, алгоритмы определения контактного взаимодействия, методы учета контактного взаимодействия, метод Штрафа, пошаговый метод Лагранжа.

Введение

Очень часто при решении статических задач прочности необходимо учитывать контактные явления, возникающие между различными телами. При этом необходимо как обеспечивать неп проникновение тел друг в друга, так и учитывать возможные силы трения, возникающие между ними.

Существуют разные подходы для определения величины контактного взаимодействия между телами [1–10]. Наиболее часто используемыми методами являются метод штрафа (метод штрафных

функций, Penalty Method) [1 – 10], метод множителей Лагранжа (Lagrange Multipliers Method) [1 – 10] и пошаговый метод множителей Лагранжа (Augmented Lagrange Method) [1 – 10].

Данный доклад посвящен описанию возможностей учета контактного взаимодействия в статических задачах прочности пакета программ (ПП) ЛОГОС, разрабатываемого во «РФЯЦ-ВНИИЭФ» [11, 12], в части программного модуля (ПМ) ЛОГОС-ПА, предназначенного для решения задач прочности.

Метод штрафа

Метод штрафа [1 – 10] является базовым для учета контактного взаимодействия в ПМ ЛОГОС-ПА в статических задачах прочности. Данный метод получил свое название по аналогии с методом, используемым в разделе математической оптимизации, в котором ищется минимум некоторого функционала с наложенными ограничениями, при этом задача на минимизацию функционала с ограничениями преобразуется в задачу минимизации без ограничений. Для этого к минимизируемому функционалу добавляется штрафная функция.

В статических задачах в качестве минимизируемого функционала выступает полная потенциальная энергия для которой ищется минимум.

$$L(\mathbf{u}) = \Pi(\mathbf{u}) - A(\mathbf{u}) = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{eT} \boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV - \int_\Gamma \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS, \quad (1)$$

где $\Pi(\mathbf{u})$ – потенциальная энергия деформации, $A(\mathbf{u})$ – работа внешних сил, $\boldsymbol{\varepsilon}^{eT} = \{\varepsilon_x^e, \varepsilon_y^e, \varepsilon_z^e, \varepsilon_{xy}^e, \varepsilon_{yz}^e, \varepsilon_{xz}^e\}$ – тензор упругой деформации, $\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}\}$ – тензор напряжений, \mathbf{u} – вектор перемещений, \mathbf{f} и \mathbf{p} – векторы удельных объемных и поверхностных сил соответственно. Интегрирование ведется по объему V и поверхностям Γ всех тел в задаче. В качестве штрафной функции выбирается удельная величина, определенная на поверхности тел Γ_C с потенциальным контактным взаимодействием и обеспечивающая условие геометрического непроникновения тел, заданная выражением.

$$w_C = \begin{cases} 0, & g_n > 0 \\ \frac{1}{2} k_n g_n^2, & g_n \leq 0 \end{cases}, \quad (2)$$

где k_n – контактная жесткость. В результате для учета контактного взаимодействия ищется минимум выражения.

$$L'(\mathbf{u}) = L(\mathbf{u}) + W_C(\mathbf{u}), \quad (3)$$

где $W_C(\mathbf{u}) = \int_{\Gamma_C} w_c dS$ – полная штрафная функция.

На рис. 1 показан фрагмент двух поверхностей (для простоты в двумерном случае), где узел r_S одной из сторон проникает через поверхность противоположной стороны.

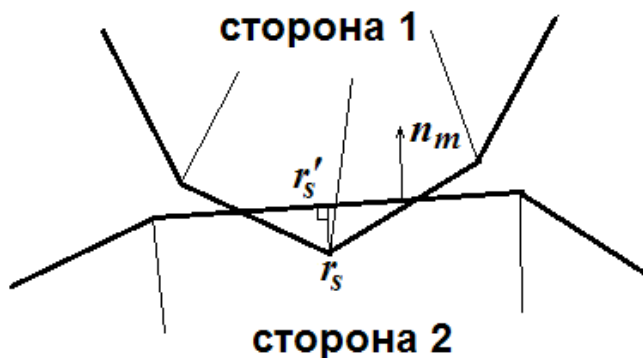


Рис. 1. Проникновение узла одной из сторон через поверхность второй стороны

Через r'_S обозначена проекция узла r_S на поверхность противоположной стороны (наиближайшая точка поверхности стороны 2), n_m – внешняя нормаль к стороне 2. Тогда g_n в точке r_S определяется по формуле.

$$g_n = (r_S - r'_S, n_m). \quad (4)$$

Из определения видно, что, если проникновение между поверхностями отсутствует, то $g_n > 0$, и по формуле можно сказать, что штрафная функция равна нулю и не оказывает никакого влияния на минимум функционала. Если же поверхность 1 проникла через поверхность 2, то $g_n \leq 0$, штрафная функция становится ненулевой и растет по мере увеличения проникновения.

Выбор точек для приложения контактных сил

Возможны разные типы контактов с точки зрения шаблона для приложения контактных сил. Например, можно рассматривать контакты типа узел-в-узел [4 – 6], где силы прикладываются между узлами поверхностных сеток обеих сторон, или узел-в-грань [4 – 6] (см. рис. 2), когда силы прикладываются между узлами поверхностной сетки одной из сторон и сегментами поверхностной сетки второй стороны.

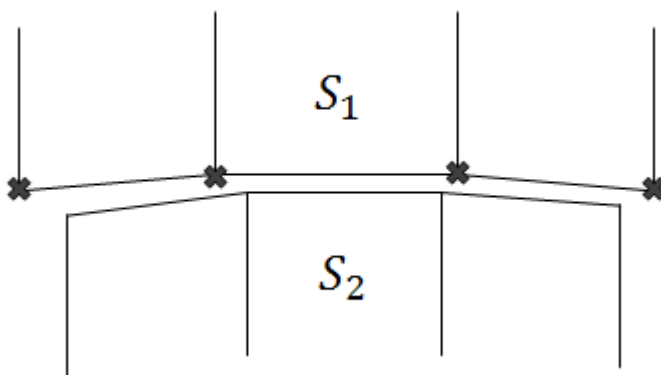


Рис. 2. Шаблон узел-в-грань. Для простоты показан двумерный случай

Также возможен вариант грань-в-грань, когда контактные силы прилагаются в точках интегрирования поверхностных граней [0 – 0], как показано на рис. 3.

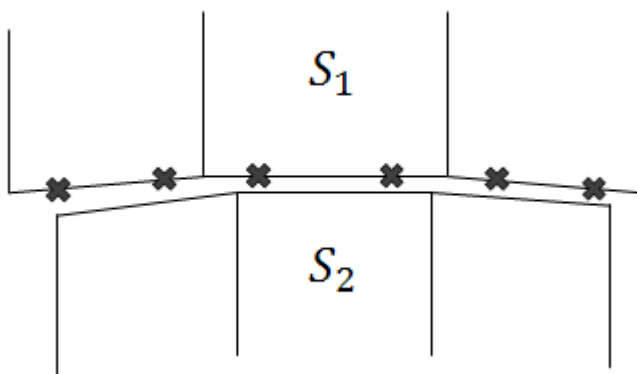


Рис. 3. Шаблон грань-в-грань

В ПМ ЛОГОС-ПА реализованы шаблоны узел-в-грань и грань-в-грань. На рис. 4 показаны фрагменты задачи, в которой контактные силы приложены в соответствии с разными шаблонами.

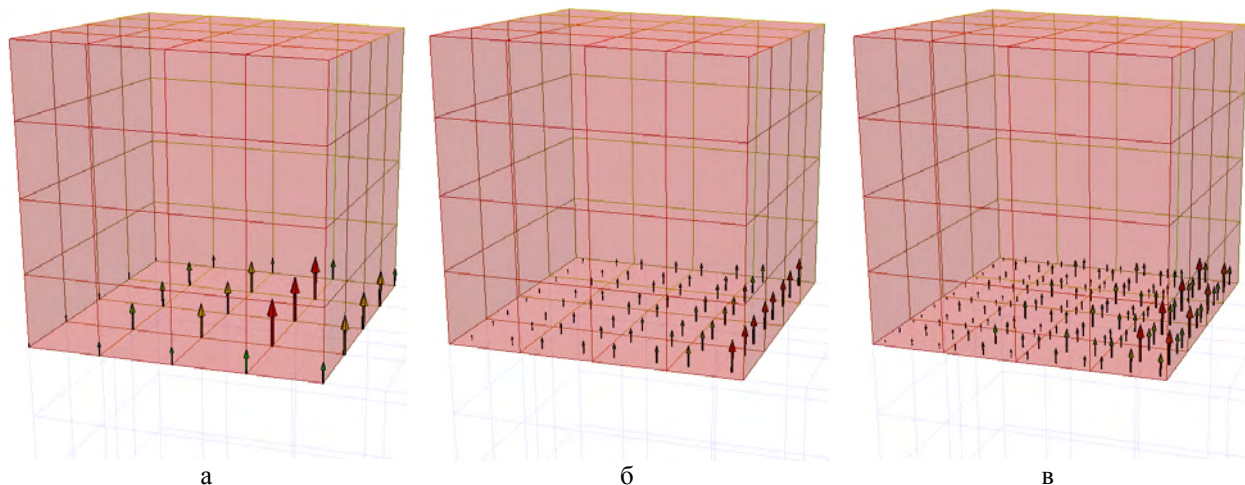


Рис. 4. Фрагменты задачи с разными шаблонами для приложения контактных сил: а – узел-в-грань, б – грань-в-грань; в – грань-в-грань, но с увеличенным порядком интегрирования

Алгоритм поиска проникновения одной контактирующей поверхности через другую

Одной из основных задач при реализации контактного взаимодействия является необходимость определения проникновения одной контактирующей поверхности через другую. Существует большое количество разных методов и алгоритмов [1 – 10]. В данной реализации используется достаточно простой и универсальный алгоритм.

Пусть дана точка интегрирования p_j одной из сторон (или узел сетки в зависимости от выбранного шаблона для приложения контактных сил), как показано на рис. 5.

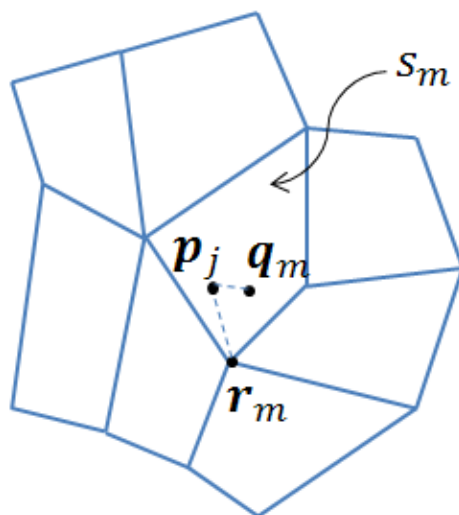


Рис. 5. Пример поиска проникновения узла p_j через поверхность

Необходимо найти ближайший сегмент s_m второй поверхности, точку проекции q_m точки p_j на сегмент s_m и определить, с какой стороны от сегмента поверхности лежит точка p_j . Осуществляется поиск проникновения в соответствии с алгоритмом, блок-схема которого показана на рис. 6.

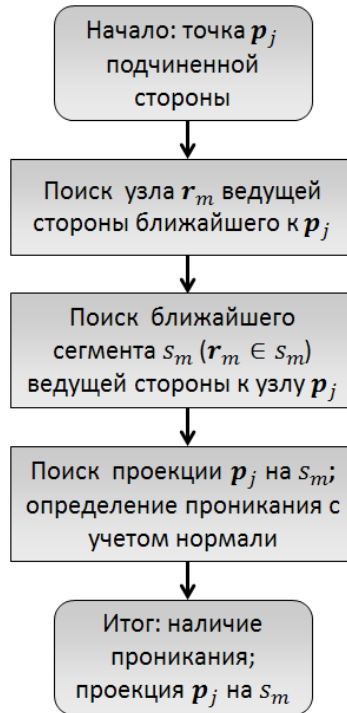


Рис. 6. Структурная схема алгоритма поиска проникновения точки p_j через поверхность

Сначала для точки интегрирования p_j ищется ближайший узел сетки противоположной поверхности r_m . После этого среди всех элементов анализируемой поверхности, сходящихся в найденном узле, ищется ближайший элемент s_m , на который потом и проецируется рассматриваемая точка интегрирования. Далее оценивается, находится ли точка интегрирования p_j за поверхностью элемента s_m . Если да, то считается, что точка интегрирования проникла за контактную поверхность.

В ситуации, когда поверхности представлены оболочечными элементами необходимо однозначно задавать, какая из сторон поверхности является «наружной», т. к. автоматически определить это из геометрии задачи невозможно. Наружные стороны контактирующих поверхностей выбираются пользователем на этапе задания задачи. Например, на рис. 7 показан выбор внешних нормалей для одной из сторон контакта в задаче о контакте двух цилиндров.

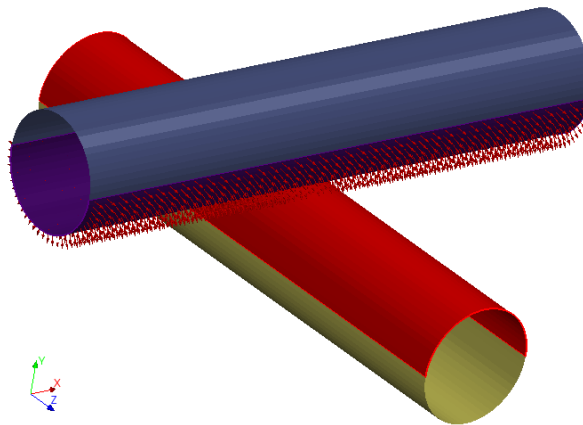


Рис. 7. Визуализация выбора внешних нормалей для одной из сторон контакта

На рис. 8 показана визуализация выбора внешних нормалей для второй стороны контактирующей пары.

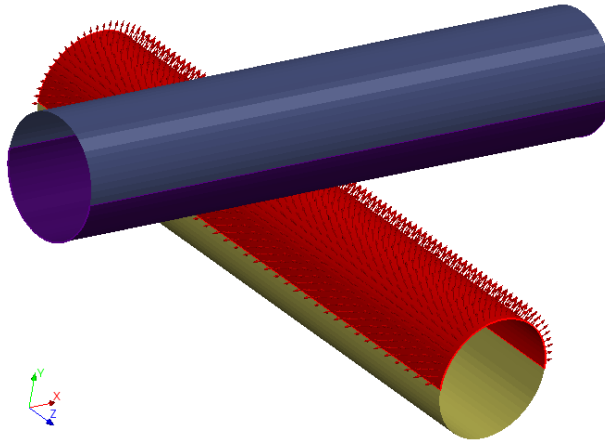


Рис. 8. Визуализация выбора внешних нормалей для второй стороны контакта

Контактная сила и ее жесткость

Далее определение контактной силы проводится для шаблона грань-в-грань. Для шаблона узел-в-грань выкладки осуществляются аналогично.

На рис. 9 показано положение точки интегрирования p некоторой грани подчиненной стороны и ближайшая грань ведущей стороны с нормалью n_m , на которую точка p проецируется в точку q (для простоты картинка показана ситуация, когда пересечения нет, но с точки зрения вывода формул это не влияет на результат).

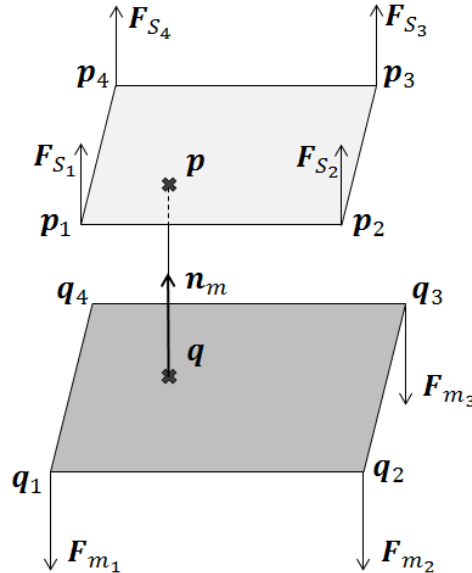


Рис. 9. Определение контактной силы между сегментами

Положение точек p и q через функции формы соответствующих элементов записывается по формулам

$$p = \sum_i \varphi_{s_i}(\xi_s, \eta_s) p_i, \quad (5)$$

$$q = \sum_i \varphi_{m_i}(\xi_m, \eta_m) q_i, \quad (6)$$

где ξ_s, η_s – локальные координаты точки \mathbf{p} в элементе поверхности подчиненной стороны, ξ_m, η_m – локальные координаты точки \mathbf{q} в элементе поверхности ведущей стороны. Вектор нормали \mathbf{n}_m определяется из соотношения

$$\mathbf{n}_m = \frac{\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \eta}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \eta} \right\|}. \quad (7)$$

Вектор \mathbf{g} между точками \mathbf{p} и \mathbf{q} определяется, как

$$\mathbf{g} = \mathbf{p} - \mathbf{q}. \quad (8)$$

Тогда величина g_n будет равна

$$g_n = (\mathbf{g}, \mathbf{n}_m). \quad (9)$$

Используя введенные обозначения, результат минимизации функционала для удельной контактной силы в точке поверхности \mathbf{p} можно записать следующим образом:

$$\mathbf{f}_p = -k_n g_n \mathbf{n}_m. \quad (10)$$

Для получения полной контактной силы необходимо удельную силу \mathbf{f}_p умножить на площадь S_p , отнесенную к точке интегрирования \mathbf{p} в элементе подчиненной поверхности:

$$\mathbf{F}_p = S_p \mathbf{f}_p. \quad (11)$$

В данной реализации берется площадь элемента подчиненной стороны, вычисленная для Гауссовой точки \mathbf{p} по следующей формуле:

$$S_p = w_p \left| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \eta} \right|, \quad (12)$$

где w_p – весовой множитель Гауссовой точки \mathbf{p} в элементе подчиненной стороны. В случае шаблона узел-в-грань, площадь, отнесенная к узлам контактирующей поверхности, определяется из площадей окружающих элементов.

В результате приложения контактной силы в точке \mathbf{p} к элементу подчиненной стороны в точке \mathbf{q} ведущей стороны прикладывается противоположная сила \mathbf{F}_q

$$\mathbf{F}_q = -\mathbf{F}_p. \quad (13)$$

Так как в уравнении равновесия участвуют силы в узлах сетки, то итоговые силы для подчиненной и ведущей сторон получаются по формулам

$$\mathbf{F}_{S_i} = \varphi_{S_i}(\xi_s, \eta_s) \mathbf{F}_p. \quad (14)$$

$$\mathbf{F}_{m_i} = \varphi_{m_i}(\xi_m, \eta_m) \mathbf{F}_q = -\varphi_{m_i}(\xi_m, \eta_m) \mathbf{F}_p. \quad (15)$$

Выбор контактной жесткости

Для успешного получения решения задачи необходимо правильно выбрать контактную жесткость k_n . Относительно малые значения позволяют легче сойтись итерациям по нелинейности, однако могут ухудшить точность получаемого решения и допустить избыточное проникновение одной контактной поверхности в другую. Большие значения k_n сделают решение более точным, но могут привести к получению матриц с плохой обусловленностью, что приведет к расхождению нелинейного итерационного процесса. Таким образом, задача по выбору контактной жесткости формулируется, как необходимость выбрать как можно большее значение k_n , которое позволит сойтись нелинейному итерационному процессу.

Автоматически выбрать величину контактной жесткости, которая бы работала во всех случаях и на всех структурах практически невозможно, поэтому инженеру предоставлена возможность управлять масштабирующим множителем для контактной жесткости, чтобы в зависимости от задачи получить итоговую сходимость с максимально возможной точностью.

Для получения значения контактной жесткости в ПМ ЛОГОС-ПА реализованы два способа. При первом способе для определения контактной жесткости используется формула

$$k_n = \frac{\min(E_S, E_m)}{L_{ave}}, \quad (16)$$

где E_S, E_m – модули Юнга подчиненной и ведущей сторон, L_{ave} – средняя длина ребра на поверхности подчиненной стороны. При таком способе определения жесткости получается единая величина k_n для всего контакта.

При использовании второго способа контактная жесткость становится локальной, определяется для каждого элемента контактирующей поверхности независимо и вычисляется по формуле

$$k_n = \min\left(\frac{E_S}{V_S} S_s, \frac{E_m}{V_m} S_m\right), \quad (17)$$

где V_S, V_m – объемы ячеек оригинальной сетки, прилегающих к элементами подчиненной и ведущей сторон, S_s, S_m – площади элементов подчиненной и ведущей сторон.

Практика показала, что второй способ более надежен, и в результате он используется по умолчанию.

Вклад контактных сил в глобальную матрицу жесткости

Для получения вклада контактных сил в глобальную матрицу жесткости необходимо для каждой силы F_{S_i}, F_{m_i} взять производные по всем перемещениям u_{S_i} и u_{m_i} . Для этого на первом этапе вычисляются производные от F_p по всем перемещениям u_{S_i} и u_{m_i} . Полученная производная будет определяться по формуле

$$\frac{1}{S_p} \frac{\partial F_p}{\partial u_i} = -k_n \left(n_m \otimes \frac{\partial g_n}{\partial u_i} \right) - k_n g_n \frac{\partial n_m}{\partial u_i}, \quad (18)$$

где u_i – перемещения узла либо подчиненной, либо ведущей стороны. Производные $\frac{\partial g_n}{\partial u_i}$ и $\frac{\partial n_m}{\partial u_i}$ являются сложными функциями от координат узлов u_i , требующие большого количества вычислений.

Для получения сил F_{S_j} используется формула

$$\frac{\partial F_{S_j}}{\partial u_i} = \varphi_{S_j}(\xi_S, \eta_S) \frac{\partial F_p}{\partial u_i}. \quad (19)$$

А для сил F_{m_i} используется формула

$$\frac{\partial F_{m_j}}{\partial u_i} = -F_p \otimes \left(\frac{\partial \varphi_{m_j}(\xi_m, \eta_m)}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial u_i} + \frac{\partial \varphi_{m_j}(\xi_m, \eta_m)}{\partial \eta_m} \frac{\partial \eta_m}{\partial u_i} \right) - \varphi_{m_j}(\xi_m, \eta_m) \frac{\partial F_p}{\partial u_i}. \quad (20)$$

Производные, полученные по формулам для относительно больших значений g_n могут приводить к появлению не положительно определенных матриц жесткости, что катастрофически влияет на сходимости нелинейных итераций.

Для борьбы с этим явлением на начальных итерациях можно использовать упрощенные формулы, которые получаются в предположении, что в пределах одной итерации положение ξ_m, η_m меняется несильно, и их изменением можно пренебречь. В результате выражение сильно упрощается, и после подстановки выражения получается соотношение

$$\frac{1}{S_p} \frac{\partial F_p}{\partial u_p} = -k_n (n_m \otimes n_m). \quad (21)$$

При этом выражения для производных от итоговых сил и упрощаются до формул

$$\frac{\partial F_{S_j}}{\partial \mathbf{u}_{S_i}} = \varphi_{S_j} \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}_{S_i}} = \varphi_{S_j} \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}_p} \frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial \mathbf{u}_{S_i}} = \varphi_{S_j} \varphi_{S_i} \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}_p}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial F_{S_j}}{\partial \mathbf{u}_{m_i}} = \varphi_{S_j} \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}_{m_i}} = -\varphi_{S_j} \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}_p} \frac{\partial \mathbf{u}_q}{\partial \mathbf{u}_{m_i}} = -\varphi_{S_j} \varphi_{m_i} \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}_p}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial F_{m_j}}{\partial \mathbf{u}_{m_i}} = -\varphi_{m_j} \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}_{m_i}} = \varphi_{m_j} \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}_p} \frac{\partial \mathbf{u}_q}{\partial \mathbf{u}_{m_i}} = \varphi_{m_j} \varphi_{m_i} \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}_p}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial F_{m_j}}{\partial \mathbf{u}_{S_i}} = -\varphi_{m_j} \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}_{S_i}} = -\varphi_{m_j} \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}_p} \frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial \mathbf{u}_{S_i}} = -\varphi_{m_j} \varphi_{S_i} \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}_p}. \quad (25)$$

На текущий момент в ПМ ЛОГОС-ПА пользователь сам выбирает, по каким формулам вести расчет. По умолчанию используются упрощенные формулы.

Учет трения на контактах

В ПМ ЛОГОС-ПА учет силы трения реализован в соответствии с законом Кулона.

$$\|F_T\| \leq \mu \|F_N\|, \quad (26)$$

где $\|F_T\|$ – величина силы трения в плоскости контакта, $\|F_N\|$ – нормальная контактная сила, μ – коэффициент трения. При этом используется подход, при котором диаграмма зависимости силы трения от перемещения в плоскости контакта выглядит, как показано на рис. 10.

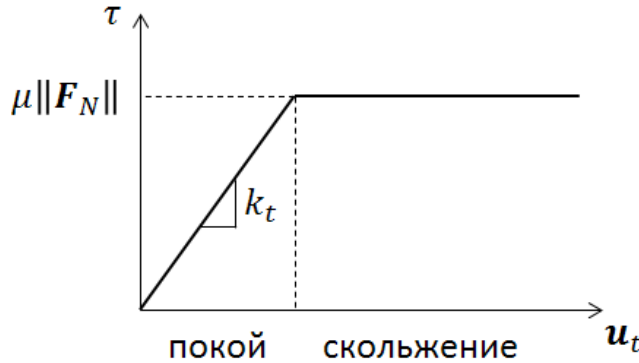


Рис. 10. Зависимость силы трения от тангенциального перемещения

Процедура для получения результирующей контактной силы трения похожа на вычисление напряжений для идеального упруго – пластического материала. Сначала на стадии предиктора с использованием контактной жесткости для трения k_t вычисляется оценочная величина силы трения $\|F_T^{\text{trial}}\|$, которая затем сравнивается с максимально возможной силой трения $\mu \|F_N\|$, и, если получилось нарушение неравенства, на стадии корректора происходит нормировка силы трения.

Для более точного описания необходимо ввести следующие обозначения. Пусть \mathbf{p}^{n+1} , \mathbf{q}^{n+1} – текущее положение точки \mathbf{p} и ее проекции \mathbf{q} на ведущую сторону, а \mathbf{p}^n , \mathbf{q}^n – положение этих точек перед началом счета текущего шага по нагрузке, тогда вектор $\Delta \mathbf{s}^{n+1}$ перемещения точки \mathbf{p} относительно ведущей поверхности за время счета $n + 1$ -ого шага по нагрузке (инкремента) запишется по формуле.

$$\Delta \mathbf{s}^{n+1} = (\mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{q}^{n+1}) - (\mathbf{p}^n - \mathbf{q}^n). \quad (27)$$

При этом относительное перемещение точки p в плоскости контакта (тангенциальное) определяется по формуле.

$$\Delta \mathbf{t}^{n+1} = \Delta \mathbf{s}^{n+1} - \Delta s_n^{n+1} \mathbf{n}_m, \quad (28)$$

где $\Delta s_n^{n+1} = (\Delta \mathbf{s}^{n+1}, \mathbf{n}_m)$ – относительное перемещение вдоль нормального направления.

Перемещение в плоскости контакта раскладывается на перемещение в состоянии покоя и на перемещение скольжения

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_e + \mathbf{t}_p, \quad (29)$$

где \mathbf{t}_e – перемещение в режиме покоя, \mathbf{t}_p – перемещение в режиме скольжения (индекс e используется по аналогии с упругостью (elastic), p используется по аналогии с пластичностью (plastic)). Полное перемещение точки p относительно ведущей стороны в плоскости контакта вычисляется как:

$$\mathbf{t}^{n+1} = \mathbf{t}^n + \Delta \mathbf{t}^{n+1}. \quad (30)$$

Пусть известно, что к началу текущего инкремента по нагрузке точка p «проскользила» расстояние, заданное вектором \mathbf{t}_p^n , тогда остается определить, как вела себя сила трения на перемещении, заданном вектором $\mathbf{t}^{n+1} - \mathbf{t}_p^n$. Для этого используется процедура, показанная на рис. 11.

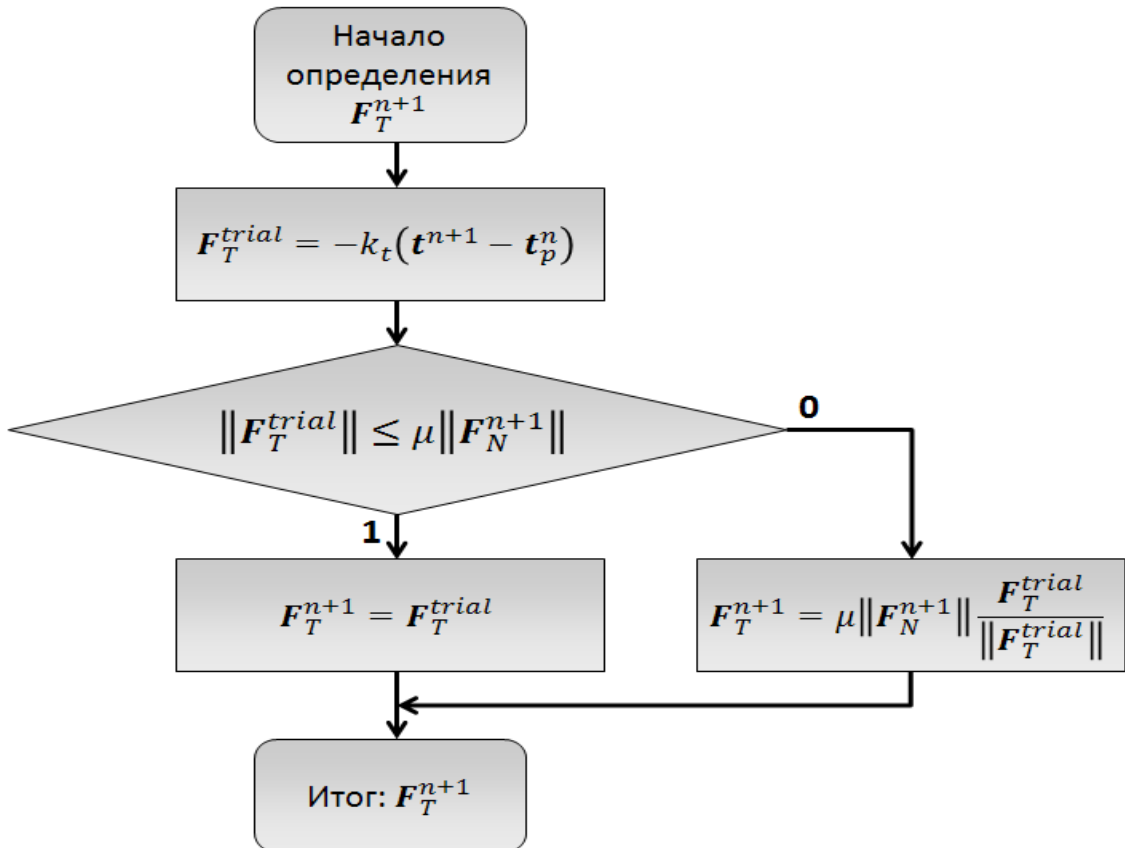


Рис. 11. Структурная схема вычисления контактной силы трения

Сначала вычисляется прогнозируемая сила трения по формуле.

$$\mathbf{F}_T^{trial} = -k_t (\mathbf{t}^{n+1} - \mathbf{t}_p^n). \quad (31)$$

Если выполнено условие Кулона на силу трения, т. е. $\|\mathbf{F}_T^{\text{trial}}\| \leq \mu \|\mathbf{F}_N^{n+1}\|$, то прогнозируемая сила $\mathbf{F}_T^{\text{trial}}$ и становится результирующей силой трения $\mathbf{F}_T^{n+1} = \mathbf{F}_T^{\text{trial}}$. Если условие не выполнено, т. е. $\|\mathbf{F}_T^{\text{trial}}\| > \mu \|\mathbf{F}_N^{n+1}\|$ то сила трения выбирается, как максимально возможная по формуле.

$$\mathbf{F}_T^{n+1} = \mu \|\mathbf{F}_N^{n+1}\| \frac{\mathbf{F}_T^{\text{trial}}}{\|\mathbf{F}_T^{\text{trial}}\|}. \quad (32)$$

Одновременно вычисляется и накапливается величина скольжения точки \mathbf{p} согласно формулам.

$$\Delta \mathbf{t}_p^{n+1} = \frac{\|\mathbf{F}_T^{\text{trial}}\| - \mu \|\mathbf{F}_N^{n+1}\|}{k_t} \frac{\mathbf{F}_T^{\text{trial}}}{\|\mathbf{F}_T^{\text{trial}}\|}, \quad (33)$$

$$\mathbf{t}_p^{n+1} = \mathbf{t}_p^n + \Delta \mathbf{t}_p^{n+1}. \quad (34)$$

Чтобы учесть вклад от силы трения в глобальную матрицу жесткости необходимо сначала вычислить производную от тангенциального перемещения \mathbf{t}^{n+1} по перемещению узла \mathbf{p} . После дифференцирования, учитывая, получается формула

$$\frac{\partial \mathbf{t}^{n+1}}{\partial \mathbf{u}_i} = \frac{\partial \Delta \mathbf{s}^{n+1}}{\partial \mathbf{u}_i} - \mathbf{n}_m \otimes \frac{\partial \Delta \mathbf{s}_n^{n+1}}{\partial \mathbf{u}_i} - \Delta \mathbf{s}_n^{n+1} \frac{\partial \mathbf{n}_m}{\partial \mathbf{u}_i}. \quad (35)$$

В случае использования упрощенных формул для нормальной контактной силы, формула также упрощается и приобретает вид

$$\frac{\partial \mathbf{t}^{n+1}}{\partial \mathbf{u}_p} = \mathbf{I} - \mathbf{n}_m \otimes \mathbf{n}_m. \quad (36)$$

Если для прогнозируемой силы выполняется условие, то производная от силы трения в точке \mathbf{p} вычисляется по формуле

$$\frac{\partial \mathbf{F}_T^{n+1}}{\partial \mathbf{u}_p} = -k_t (\mathbf{I} - \mathbf{n}_m \otimes \mathbf{n}_m). \quad (37)$$

Если на текущем инкременте возникло скольжение, то необходимо дифференцировать уже, и производная от силы трения определяется выражением

$$\frac{\partial \mathbf{F}_T^{n+1}}{\partial \mathbf{u}_p} = \mu \mathbf{e}^{\text{trial}} \otimes \left[-\mathbf{n}_m \frac{\partial \mathbf{F}_N^{n+1}}{\partial \mathbf{u}_p} \right] + \mu \frac{\|\mathbf{F}_N^{n+1}\|}{\|\mathbf{F}_T^{\text{trial}}\|} \left[\mathbf{I} - \mathbf{e}^{\text{trial}} \otimes \mathbf{e}^{\text{trial}} \right] \frac{\partial \mathbf{F}_T^{\text{trial}}}{\partial \mathbf{u}_p}. \quad (38)$$

Численное моделирование контактного взаимодействия двух цилиндров с параллельными осями

Постановка задачи

Для проверки работоспособности модуля учета контактного взаимодействия в статических задачах прочности в ПМ ЛОГОС-ПА была решена задача Герца о контактном взаимодействии двух цилиндров с параллельными осями [0]. Полученные результаты сравнивались с аналитическим решением.

На рис. 12 показана исходная постановка задачи.

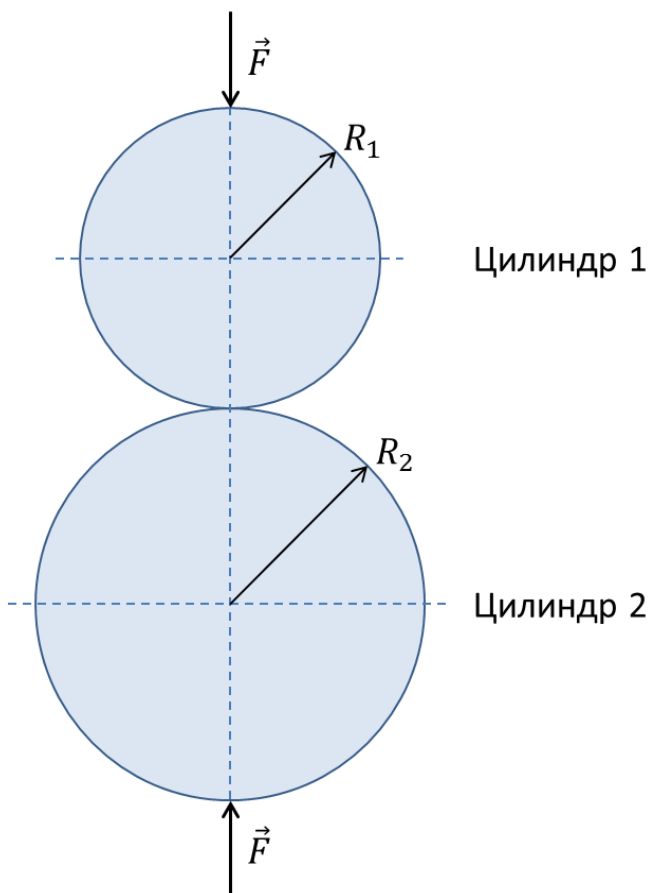


Рис. 12. Исходная постановка задачи о контакте двух цилиндров

Два длинных цилиндра радиусов R_1 и R_2 с параллельными друг другу осями сдавливаются вместе нагрузкой, заданной в виде силы \vec{F} , определенной на единицу длины и распределенной вдоль образующей цилиндров. В результате решения задачи необходимо определить ширину поверхности контакта без учета силы трения. Величина силы составляет $|\vec{F}| = 3200 \text{ Н/мм}$. В задаче используются линейные упругие материалы. Параметры для формы и материалов цилиндров приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры задачи о контакте двух цилиндров

Деталь	Радиус, мм	$E, \text{Н/мм}^2$	$\nu, 1$
Цилиндр 1	10	30000	0,25
Цилиндр 2	13	29120	0,3

Задача решалась в трехмерной постановке. Вследствие симметрии в задаче в расчете участвуют четвертые части цилиндров. Высота цилиндров берется равной 1 мм. На рис. 13 показана итоговая постановка в ПМ ЛОГОС-ПА.

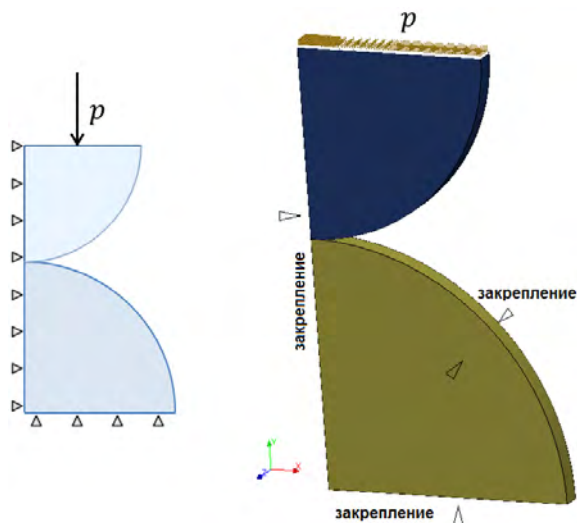


Рис. 13. Постановка и геометрия задачи в ПМ ЛОГОС-ПА

Были заданы следующие закрепления: степень свободы x для узлов цилиндров, лежащих на вертикальной плоскости симметрии, степень свободы y для узлов нижнего цилиндра, лежащих на горизонтальной плоскости симметрии, степень свободы z для всех узлов, лежащих в плоскостях $z = 0$ и $z = 1$ мм.

На поверхности среза верхнего цилиндра задается давление $p = 160$ Па.

Пространственная дискретизация расчетной области выполнена на основе объемного восьми-узлового конечного элемента (КЭ). В расчетах используются элементы сплошной среды с уточненными функциями формы. Для получения решения достаточной точности необходимо использовать подробную сетку с измельчением в области контакта цилиндров. Размерность использованной модели составляет ≈ 92000 КЭ. Вид КЭ-модели представлен на рис. 14.

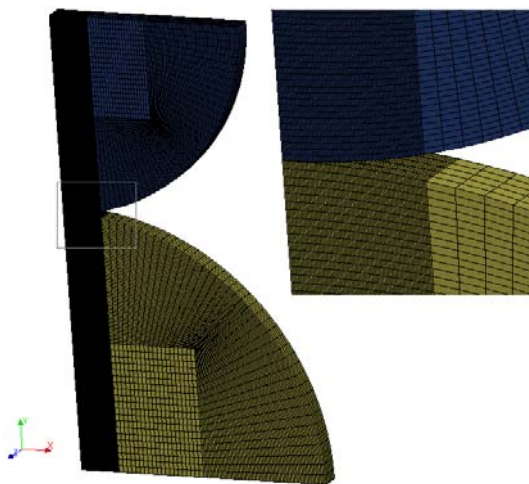


Рис. 14. КЭ сетка для задачи с двумя цилиндрами

Аналитическое решение

Результирующая поверхность контакта представляет собой узкий прямоугольник. Половина ширины зоны контакта определяется по формуле

$$a = \sqrt{\frac{4|\bar{F}|(k_1 + k_2)R_1R_2}{R_1 + R_2}} = 1,1284[\text{мм}], \quad (39)$$

где $k_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i} = 0,000009947$, $i = 1, 2$.

Результаты расчета

В табл. 2 приводится сравнение решения (половины ширины зоны контакта), полученного с использованием ПМ ЛОГОС-ПА, с аналитическим решением.

Таблица 2

Результаты численного расчета

Аналитическое решение, мм	ЛОГОС-ПА, мм	Относительная погрешность, %
1,1284	1,125	0,03

На рис. 15 приводятся поля перемещений и напряжений по Мизесу, полученные по ПМ ЛОГОС-ПА.

Как видно из табл. 2, результаты ПМ ЛОГОС-ПА очень хорошо согласуются с аналитическим решением.

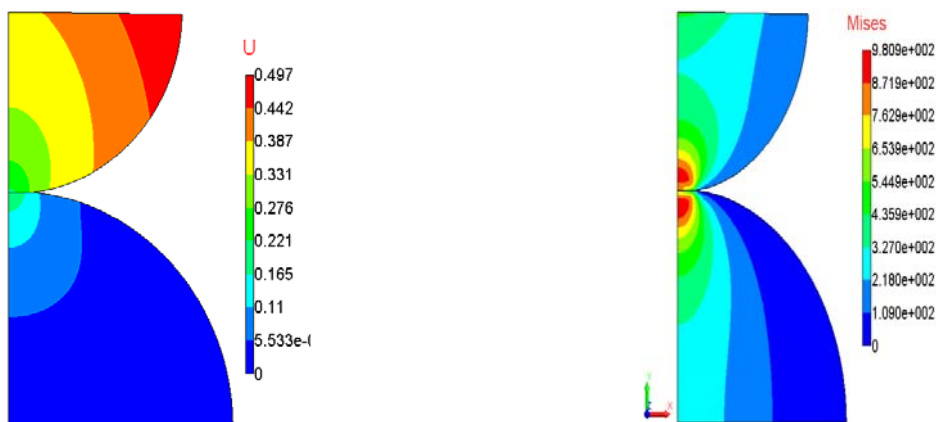


Рис. 15. Поле перемещений и напряжений по Мизесу, полученных по ПМ ЛОГОС-ПА

Заключение

В работе приведено описание возможностей ПМ ЛОГОС-ПА для учета контактного взаимодействия в статических задачах прочности.

Базовым методом для учета контактного взаимодействия в ПМ ЛОГОС-ПА является метод штрафа. В докладе изложены основные идеи данного метода и аспекты реализации. Приведен алгоритм для поиска проникновения одной из контактных поверхностей через другую. Описаны реализованные способы приложения контактных сил, даны основные формулы для расчета нормальной контактной силы и силы трения.

В завершении работы приводится решение задачи Герца. Решение, полученное с использованием ПМ ЛОГОС-ПА, сравнивается с аналитическим решением. Наблюдается очень хорошее согласие, что подтверждает корректность работы реализованных методов и алгоритмов.

Литература

1. Johnson K. L. Contact Mechanics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
2. Taylor R. L., Cheng L. Y. A consistent finite element formulation of nonlinear frictional contact problems // Numerical Techniques for Engineering Analysis and Design. – 1987
3. Asano N. A virtual work principle using penalty function method for impact contact problem of two bodies // Trans. of JSME. – 1985. – A51, no. 467. – P. 1863 – 1898
4. Kloosterman G. Contact Methods in Finite Element Simulations. – Wageningen: Ponsen & Looijen, 2002
5. Rust W. Non-Linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics. Springer, 2015
6. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Springer, 2006
7. Bertsekas D. P. Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods. Academic Press, 1982.
8. Бураго Н. Г., Кукуджанов В. Н., Обзор контактных алгоритмов // Известия РАН. МТТ. – 2002.
9. Yang B., Laursen T., Meng X. Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding. – Durham: Duke University, 2004.
10. Puso M., Laursen T. A mortar segment-to-segment frictional contact methods for large deformations // Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2003.
11. Дерюгин Ю. Н., Козелков А. С., Спиридонов В. Ф., Циберев К. В., Шагалиев Р. М. Многофункциональный высокопараллельный пакет программ ЛОГОС для решения задач тепломассопереноса и прочности // С.-Петербургский научный форум «Наука и общество»: сб. тез. – С.-Пб: Изд-во Политех. ун-та, 2012.
12. Речкин В. Н., Спиридонов В. Ф., Циберев К. В. и др. Пакет программ ЛОГОС. Модуль решения квазистатических задач прочности и модального анализа // XIII Международный семинар «Супервычисления и математическое моделирование»: сб. докл. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2011.
13. Zavarise G., Lorenzis L., Taylor R. A non-consistent start-up procedure for contact problems with large load-steps // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2011.
14. Беляев Н. М. Вычисление наибольших расчетных напряжений при сжатии соприкасающихся тел // Сборник Ленинградского института инженеров путей сообщения. – 1929. – Вып. 99.

LOGOS SOFTWARE PACKAGE. ACCOUNT FOR CONTACT INTERACTION IN STATIC STRENGTH PROBLEMS

A. Yu. Yeremenko, R. A. Barabanov, S. S. Kosarim

Russian Federal Nuclear Center –
All-Russian Research Institute of Experimental Physics, Sarov

The paper describes the current state of the account for the contact interaction in static strength problems in LOGOS software package. We describe methods and algorithms to find contact interaction. We show the examples of accounting for the contact interaction, such as Penalty Method and Augmented Lagrange Method. We consider different ways to apply contact forces (node-to-face and face-to-face). A method to account for the friction between contacting bodies is described. All basic formulas are provided. Solution of benchmark problems is given in the concluding part.

Key words: LOGOS software package, static strength problems, account for contact interaction, algorithms to determine contact interaction, methods to account for contact interaction, Penalty Method, Lagrange Method.