

УДК 519.63, 539.433, 004.925.84

ПАКЕТ ПРОГРАММ ЛОГОС. МЕТОДИКА РАСЧЕТА ОТКЛИКА КОНСТРУКЦИИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ШИРОКОПОЛОСНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВИБРАЦИИ

А. Ю. Ерёменко, С. С. Косарим, А. О. Наумов, В. Н. Речкин, А. И. Чембаров

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров

В докладе представлено описание методики расчета отклика конструкции при действии широкополосной случайной вибрации. Описан расчет отклика конструкции к нагрузкам, приложенным как к незакрепленным, так и к закрепленным частям конструкции. Приведены основные соотношения для расчета отклика конструкции, как по перемещениям, скоростям и ускорениям, так и по напряжениям. Описаны реализованные методы интегрирования отклика и сравнение их между собой. Приведено решение практических задач.

Ключевые слова: пакет программ ЛОГОС, широкополосная случайная вибрация, вероятностные нагрузки, расчет отклика конструкции.

Введение

Все конструкции, обладающие инерцией и жесткостью, подвержены вибрациям [0 – 0]. При этом примеров источников вибраций огромное множество, и крайне важно учитывать их при конструировании. Например, поток ветра действует на мост, вызывая вибрации последнего. История знает примеры разрушения мостов ветром. Набегающий поток воздуха действует на фюзеляж самолета. Двигатель ракеты во время старта создает вибрацию всего корпуса. Колеса автомобиля при езде по дороге передают вибрацию на автомобиль, при этом вибрациям подвержен как сам корпус автомобиля, так и все приборы, начиняющие его. Поэтому вибрацию в автомобиле необходимо учитывать, как с точки зрения акустического комфорта пассажиров, так и с точки зрения надежности приборов. Очень важным примером является сейсмическое воздействие на постройки. Такое воздействие крайне важно учитывать, как в сейсмически опасных районах, так и при постройке критически важных сооружений, таких, как атомные станции.

При исследовании конструкции под действием вибрации в первую очередь интересует, выдержит ли конструкция приложенные нагрузки (не произойдет ли разрушение, не повлияют ли возникающие деформации на работоспособность), в каких частях конструкции возникают наибольшие деформации и напряжения, не возникнут ли резонансные явления. По результатам анализа можно изменить конструкцию, чтобы, например, сдвинулись собственные частоты конструкции в частотную область вне реализуемых вибраций, либо укрепить некоторые части конструкции, возможно, предпринять какие-то дополнительные меры для увеличения демпфирования.

К настоящему времени появилось достаточно большое число различных методов для моделирования вибрационных процессов [1 – 6]. Некоторые из них, такие как прямое моделирование, модальный и гармонический анализы [1 – 6], были реализованы в рамках разрабатываемого в РФЯЦ-ВНИИЭФ пакета программ (ПП) «ЛОГОС» [7, 8] и активно используются в промышленных расчетах.

Данный доклад посвящен разработке методики расчета отклика конструкции при действии широкополосной случайной вибрации (ШСВ) и реализации ее в рамках ПП «ЛОГОС». В рамках

данной методики отклик конструкции ищется в линейном приближении, т. е. все виды нелинейностей, такие как физическая, геометрическая, так и контактная, игнорируются. Нагрузка является случайной величиной, подчиненной нормальному распределению. Предполагается, что процесс стационарный и эргодический. В результате анализа получается вероятностный отклик конструкции, который включает в себя вероятностные рамки для деформации и возможных напряжений.

Доклад содержит описание теоретических основ анализа ШСВ и деталей реализации в ПП «ЛОГОС». Для оценки предлагаемых решений проводится расчет отклика демонстрационной задачи о воздействии ШСВ на контейнер.

1. Теоретические основы расчета отклика конструкции при действии ШСВ

Анализ ШСВ [5, 6] используется для определения вероятностного отклика конструкции при действии нагрузок, заданных вероятностным образом.

1.1. Вероятностный характер нагрузок

В анализе ШСВ предполагается, что все нагрузки являются стационарными, эргодическими случайными процессами [9]. Кроме того, предполагается, что нагрузки имеют нормальное распределение [9] со средним значением (математическим ожиданием) $\mu_f = 0$, при этом плотность вероятности распределения нагрузки f записывается в виде (1).

$$p(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_f} \exp\left(-\frac{f^2}{2\sigma_f^2}\right), \quad (1)$$

где σ_f – среднеквадратичное отклонение. Если плотность вероятности для нагрузки представить графически, то получится кривая, показанная на рис. 1.

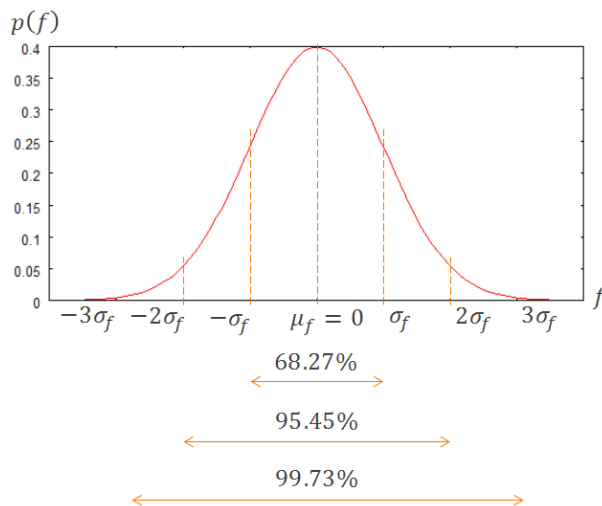


Рис. 1. График нормального распределения для величины f

Если для какой-то величины f с нормальным распределением известно значение σ_f , то с вероятностью $\sim 68,27\%$ величина $f \in [-\sigma_f, \sigma_f]$. Соответственно с вероятностью $\sim 95,45\%$ величина $f \in [-2\sigma_f, 2\sigma_f]$, и с вероятностью $\sim 99,73\%$ величина $f \in [-3\sigma_f, 3\sigma_f]$. В анализе ШСВ используются 1σ отклонения, однако в областях с критическими требованиями к надежности моделируемых конструкций необходимо использовать 3σ отклонения.

1.2. Спектральная плотность мощности

Для задания нагрузки в анализе ШСВ используется понятие спектральной плотности мощности (СПМ) [5, 6].

На рис. 2 приводится пример нагрузки $f(t)$, определенной на отрезке $t \in [-\infty, +\infty]$.

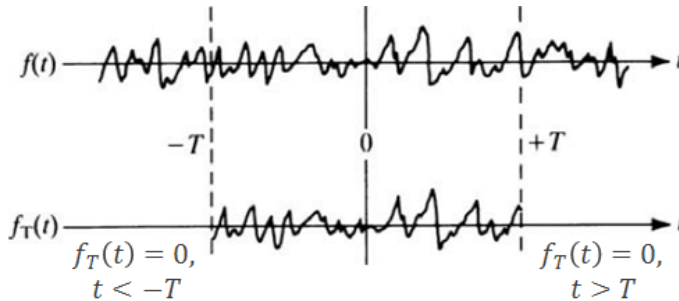


Рис. 2. Пример нагрузки $f(t)$ и функция $f_T(t)$, построенная из $f(t)$

Непосредственно для кривой $f(t)$ невозможно получить интеграл Фурье, т. к. будет нарушено условие существования интеграла (конечность $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$). Однако интеграл Фурье можно получить для кривой $f_T(t)$, которая строится из кривой $f(t)$ по формуле (2).

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & t < -T \\ f(t) & -T \leq t \leq T. \\ 0, & t > T \end{cases} \quad (2)$$

На отрезке $t \in [-T, T]$ кривая $f_T(t)$ повторяет кривую $f(t)$, а вне этого отрезка обращается в ноль. Имеет место соотношение

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t). \quad (3)$$

Для функции $f_T(t)$ интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ будет ограничен, и для нее интеграл Фурье запишется по формуле

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_T(i\omega) \exp(i\omega t) dt, \quad (4)$$

$$F_T(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t) \exp(-i\omega t) dt.$$

Для среднего значения квадрата функции $f_T(t)$ можно провести преобразования

$$\begin{aligned} \overline{f_T^2(t)} &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} f_T^2(t) dt = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t) \int_{-\infty}^{+\infty} F_T(i\omega) \exp(i\omega t) d\omega dt = \\ &= \frac{\pi}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} F_T(i\omega) F_T^*(i\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{T} |F_T(i\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (5)$$

При этом среднее значение квадрата исходной функции $f(t)$ определится по формуле

$$\overline{f^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{f_T^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} |F_T(i\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega) d\omega, \quad (6)$$

где величина $S_f(\omega)$ называется спектральной плотностью мощности (Power Spectral Density, PSD) [0, 0] и определяется по формуле

$$S_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} |F_T(i\omega)|^2. \quad (7)$$

Именно величина и задается в виде графика зависимости от частоты для нагрузок в анализе ШСВ.

Так как, как говорилось выше, математическое ожидание рассматриваемых нагрузок равно нулю ($\mu_f = \overline{f(t)} = 0$), то дисперсия f равна:

$$\sigma_f^2 = \overline{f^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega) d\omega. \quad (8)$$

Из чего, зная спектральную плотность мощности, можно легко получить среднеквадратичное отклонение σ_f .

1.3. Типы решаемых задач

Нагрузки в задачах о поиске отклика при действии ШСВ можно разделить на два типа:

Нагрузки, приложенные к незакрепленным частям конструкции.

Нагрузки, заданные в закреплениях.

В первом случае нагрузка задается, как правило, в виде СПМ для силы. Во втором случае в качестве нагрузки может задаваться СПМ для ускорения, скорости или перемещения

1.4. Результаты модального анализа

Для получения отклика конструкции при действии ШСВ удобно воспользоваться спектральным разложением, полученным в рамках модального анализа [2 – 6, 8], при котором ищутся собственные частоты и собственные вектора системы уравнений (9).

$$\left[\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M} \right] \boldsymbol{\varphi}_i = 0, \quad (9)$$

где \mathbf{K} – матрица жесткости, \mathbf{M} – матрица масс, ω_i и $\boldsymbol{\varphi}_i$ – частота и вектор i -ого собственного колебания.

Собственные векторы могут быть нормированы по-разному. В данной работе используется нормировка (10)

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_i = 1, \quad \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j = 0, \quad i \neq j. \quad (10)$$

т. е. вектора $\boldsymbol{\varphi}_i$ получают ортонормированы относительно матрицы масс \mathbf{M} . При этом из уравнения (9) относительно матрицы жесткости \mathbf{K} вытекают соотношения

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_i = \omega_i^2, \quad \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j = 0, \quad i \neq j, \quad (11)$$

Также векторы $\boldsymbol{\varphi}_i$ образуют ортонормированный базис, по которому по формуле (12) могут быть разложены перемещения конструкции.

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}(t), \quad (12)$$

где $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots]$ – матрица, составленная из собственных векторов, а $\mathbf{q}(t)$ – вектор коэффициентов разложения вектора \mathbf{u} по векторам $\boldsymbol{\varphi}_i$, образующий модальные перемещения.

1.5. Получение отклика конструкции при действии ШСВ, заданной на незакрепленных частях конструкции

Уравнение движения имеет вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (13)$$

Подставив перемещения $\mathbf{u}(t)$ в уравнение (13) в виде (12), а само уравнение (13) умножив слева на матрицу $\boldsymbol{\Phi}^T$, получим уравнение

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} \dot{\mathbf{q}}(t) + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{f}(t). \quad (14)$$

В силу ортонормированности векторов Φ_i (10), (11), для модальных координат получается уравнение

$$\ddot{q}(t) + \tilde{C}\dot{q}(t) + \Lambda q(t) = g(t), \quad (15)$$

где

$$\Lambda = \Phi^T K \Phi = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots \\ 0 & \omega_2^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\tilde{C} = \Phi^T C \Phi \quad (17)$$

модифицированная матрица демпфирования, а

$$g(t) = \Phi^T f(t) \quad (18)$$

проекция нагрузки на собственные векторы.

Если матрицу демпфирования C выбрать так, чтобы \tilde{C} получалась диагональной, как это происходит, например, в случае использования демпфирования в форме Релея ($C = \alpha M + \beta K$), то система уравнений (15) будет полностью диагонализирована, и для каждой компоненты вектора $q(t)$ получится независимое уравнение.

Функция передачи для модальных координат запишется в виде

$$H(i\omega) = [\Lambda - \omega^2 I + i\omega \tilde{C}]^{-1}. \quad (19)$$

Матрица $[\Lambda - \omega^2 I + i\omega \tilde{C}]$ является диагональной, и от нее легко найти обратную матрицу $H(i\omega)$, которая также будет диагональной.

Из отклика для модальных переменных $q(t)$ преобразование Фурье для естественных переменных $u(t)$ получается в виде (20).

$$U_T(i\omega) = \Phi H(i\omega) \Phi^T F_T(i\omega). \quad (20)$$

Для k -ой степени свободы преобразование Фурье выражается по формуле

$$U_{T_k}(i\omega) = \sum_{i=1}^{N_v} \phi_{i_d} H_i(i\omega) \sum_{l=1}^{N_l} \gamma_{l_i} F_{T_l}(i\omega), \quad (21)$$

где N_v – число собственных векторов, участвующих в разложении; N_l – количество прикладываемых нагрузок; $H_i(i\omega)$ – i -ый элемент диагонали матрицы $H(i\omega)$, а γ_l – вектор приложения l -ой нагрузки, заданной в незакрепленных частях конструкции, к собственным векторам. Тогда СПМ для перемещения в степени свободы k определяется выражением

$$S_{u_d}(\omega) = \sum_{i=1}^{N_v} \sum_{j=1}^{N_v} \phi_{i_d} \phi_{j_d} H_i^*(i\omega) H_j(i\omega) \sum_{l=1}^{N_l} \sum_{m=1}^{N_l} \gamma_{l_i} \gamma_{m_j} S_{f_{lm}}(\omega), \quad (22)$$

где

$$S_{f_{lm}}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} F_{T_l}^*(i\omega) F_{T_m}(i\omega) \quad (23)$$

элемент кросс-матрицы СПМ приложенных нагрузок и взаимных спектральных плотностей между ними.

1.6. Получение отклика конструкции при действии ШСВ, заданной на закреплениях

Пусть на закрепленные степени свободы конструкции действует сила $f_R(t)$, других сил нет. Разделим вектор перемещений $u(t)$ на две части. Одна часть будет соответствовать незакрепленным степеням свободы $u_F(t)$, вторая – граничным закрепленным степеням $u_R(t)$ в виде

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_F(t) \\ \mathbf{u}_R(t) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Тогда уравнение (13) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{FF} & \mathbf{M}_{FR} \\ \mathbf{M}_{RF} & \mathbf{M}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_F(t) \\ \dot{\mathbf{u}}_R(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{FF} & \mathbf{C}_{FR} \\ \mathbf{C}_{RF} & \mathbf{C}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_F(t) \\ \dot{\mathbf{u}}_R(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{FF} & \mathbf{K}_{FR} \\ \mathbf{K}_{RF} & \mathbf{K}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_F(t) \\ \mathbf{u}_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_R(t) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

где \mathbf{M}_{FF} – часть матрицы масс \mathbf{M} между незакрепленными степенями свободы, \mathbf{M}_{FR} и \mathbf{M}_{RF} – части матрицы масс \mathbf{M} между незакрепленными и закрепленными степенями свободы, \mathbf{M}_{RR} – часть между закрепленными степенями свободы, аналогично \mathbf{C}_{FF} , \mathbf{C}_{FR} , \mathbf{C}_{RF} , \mathbf{C}_{RR} и \mathbf{K}_{FF} , \mathbf{K}_{FR} , \mathbf{K}_{RF} , \mathbf{K}_{RR} – соответствующие части матриц \mathbf{C} и \mathbf{K} .

В системе уравнений (25) оставим только уравнения для свободных степеней свободы, тогда получим уравнение

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{FF} & \mathbf{M}_{FR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_F(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}_R(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{FF} & \mathbf{C}_{FR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_F(t) \\ \dot{\mathbf{u}}_R(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{FF} & \mathbf{K}_{FR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_F(t) \\ \mathbf{u}_R(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (26)$$

Перемещения незакрепленных степеней свободы можно представить в виде суммы двух составляющих:

$$\mathbf{u}_f(t) = \mathbf{u}_F^d(t) + \mathbf{u}_F^s(t), \quad (27)$$

где $\mathbf{u}_F^d(t)$ – динамическая часть перемещений, соответствующая перемещению свободных степеней свободы относительно закрепленных степеней, а $\mathbf{u}_F^s(t)$ – квазистатическая часть перемещений, вызванная перемещением закрепленных степеней свободы.

Подставив (27) в (26) и сгруппировав все, что относится к динамической части перемещений в левой части, а все остальное перенеся в правую часть, получим уравнения

$$\mathbf{M}_{FF}\ddot{\mathbf{u}}_F^d(t) + \mathbf{C}_{FF}\dot{\mathbf{u}}_F^d(t) + \mathbf{K}_{FF}\mathbf{u}_F^d(t) = \mathbf{f}_{eff}(t), \quad (28)$$

$$\mathbf{f}_{eff}(t) = -\mathbf{M}_{FF}\ddot{\mathbf{u}}_F^s(t) - \mathbf{C}_{FF}\dot{\mathbf{u}}_F^s(t) - \mathbf{K}_{FF}\mathbf{u}_F^s(t) - \mathbf{M}_{FR}\ddot{\mathbf{u}}_R(t) - \mathbf{C}_{FR}\dot{\mathbf{u}}_R(t) - \mathbf{K}_{FR}\mathbf{u}_R(t). \quad (29)$$

Для квазистатических перемещений можно записать уравнение равновесия

$$\mathbf{K}_{FF}\mathbf{u}_F^s(t) + \mathbf{K}_{FR}\mathbf{u}_R(t) = \mathbf{0}. \quad (30)$$

Из уравнения квазистатическую часть перемещений можно выразить по формуле

$$\mathbf{u}_F^s(t) = -\mathbf{K}_{FF}^{-1}\mathbf{K}_{FR}\mathbf{u}_R(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}_R(t), \quad (31)$$

где $\mathbf{A} = -\mathbf{K}_{FF}^{-1}\mathbf{K}_{FR}$ – матрица, i – столбец которой является вектором квазистатических перемещений для единичной i – ой нагрузки, заданной в закрепленных степенях свободы.

Подставив выражение (31) для $\mathbf{u}_F^s(t)$ в формулу (29) с учетом (30) и сгруппировав слагаемые, для $\mathbf{f}_{eff}(t)$ можно получить выражение

$$\mathbf{f}_{eff}(t) = -(\mathbf{M}_{FF}\mathbf{A} + \mathbf{M}_{FR})\ddot{\mathbf{u}}_R(t) - (\mathbf{C}_{FF}\mathbf{A} + \mathbf{C}_{FR})\dot{\mathbf{u}}_R(t). \quad (32)$$

В предположении малости величины демпфирования выражение приобретает вид

$$\mathbf{f}_{eff}(t) = -(\mathbf{M}_{FF}\mathbf{A} + \mathbf{M}_{FR})\ddot{\mathbf{u}}_R(t). \quad (33)$$

Итоговый набор уравнений для определения отклика для нагрузки, заданной на закреплении, определяется выражениями (28), (30) и (33). Из уравнения (28) определяется динамическая часть перемещений, а из уравнения (30) квазистатическая.

Аналогично подходу, использованному для вывода формул (22) и (23) для получения отклика для нагрузок, заданных в закрепленных частях конструкции, для динамической части для нагрузок, заданных в закреплении, получаются формулы

$$S_{u_k}^d(\omega) = \sum_{i=1}^{N_v} \sum_{j=1}^{N_v} \phi_{i_k} \phi_{j_k} H_i^*(i\omega) H_j(i\omega) \sum_{l=1}^{N_r} \sum_{m=1}^{N_r} \Gamma_{l_i} \Gamma_{m_j} S_{\ddot{u}_{R_{lm}}}(\omega), \quad (34)$$

где

$$S_{\ddot{u}_{R_{lm}}}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} \dot{U}_{R_{l_i}}^*(i\omega) \dot{U}_{R_{T_m}}(i\omega), \quad (35)$$

и $\Gamma = -\Phi^T(M_{FF}A + M_{FR})$ – матрица проекций нагрузок на векторы конструкции.

Используя уравнение (31) для связи преобразований Фурье для квазистатических перемещений $U_T^s(i\omega)$ и нагрузки $\ddot{U}_{R_T}(i\omega)$, можно записать:

$$U_T^d(i\omega) = A \ddot{U}_{R_T}(i\omega). \quad (36)$$

Учитывая уравнения связи СПМ для перемещения, скорости и ускорения (37),

$$\begin{aligned} S_{\dot{u}}(\omega) &= \omega^2 S_u(\omega) \\ S_{\ddot{u}}(\omega) &= \omega^4 S_u(\omega) \end{aligned} \quad (37)$$

для квазистатических перемещений в степени свободы k можно в итоге получить выражение (38).

$$S_{u_k}^s(\omega) = \sum_{l=1}^{N_r} \sum_{m=1}^{N_r} A_{l_k} A_{m_k} \left(\frac{1}{\omega^4} S_{\ddot{u}_{R_{lm}}}(\omega) \right). \quad (38)$$

Аналогичным образом, используя выражения (20) и (36), можно получить выражение (39) для ковариантной части между динамическими и квазистатическими выражениями.

$$S_{u_k}^{sd}(\omega) = \sum_{i=1}^{N_v} \sum_{l=1}^{N_r} \sum_{m=1}^{N_r} \phi_{i_k} A_{l_k} \left(-\frac{1}{\omega^2} \Gamma_{m_i} H_i(i\omega) S_{\ddot{u}_{R_{lm}}}(\omega) \right). \quad (39)$$

Соотношения (40) – (42) дают итоговое выражение для получения отклика конструкции под действием ШСВ.

$$S_{u_k}^d(\omega) = \sum_{i=1}^{N_v} \sum_{j=1}^{N_v} \phi_{i_k} \phi_{j_k} \left(\sum_{l=1}^{N_l} \sum_{m=1}^{N_l} \gamma_{l_i} \gamma_{m_j} H_i^*(i\omega) H_j(i\omega) S_{f_{lm}}(\omega) + \sum_{l=1}^{N_r} \sum_{m=1}^{N_r} \Gamma_{l_i} \Gamma_{m_j} H_i^*(i\omega) H_j(i\omega) S_{\ddot{u}_{R_{lm}}}(\omega) \right), \quad (40)$$

$$S_{u_k}^s(\omega) = \sum_{l=1}^{N_r} \sum_{m=1}^{N_r} A_{l_k} A_{m_k} \left(\frac{1}{\omega^4} S_{\ddot{u}_{R_{lm}}}(\omega) \right), \quad (41)$$

$$S_{u_k}^{sd}(\omega) = \sum_{i=1}^{N_v} \sum_{l=1}^{N_r} \sum_{m=1}^{N_r} \phi_{i_k} A_{l_k} \left(\frac{1}{\omega^2} \Gamma_{m_i} H_i(i\omega) S_{\ddot{u}_{R_{lm}}}(\omega) \right). \quad (42)$$

2. Интегрирование отклика конструкции методом ШСВ

Формулы (40) – (42) пригодны для получения детального отклика конструкции в виде графика зависимости СПМ от частоты ω в степени свободы k . Однако, если требуется охарактеризовать отклик конструкции в целом, то происходит расчет среднеквадратичного отклонения σ_{u_k} в каждой степени свободы, распределение которого по всей задаче выдается в качестве анализируемой величины. Расчет полного отклика конструкции происходит по формуле

$$\left(\sigma_{u_k} \right)^2 = \left(\sigma_{u_k}^d \right)^2 + \left(\sigma_{u_k}^s \right)^2 + 2 \left(\sigma_{u_k}^{sd} \right)^2 = \int_0^{\infty} S_{u_k}^d(\omega) d\omega + \int_0^{\infty} S_{u_k}^s(\omega) d\omega + 2 \int_0^{\infty} S_{u_k}^{sd}(\omega) d\omega \Big|_{\text{Re}}. \quad (43)$$

Из интегрирования формул (40) – (42) по частоте ω получаются выражения (44) – (46)

$$\left(\sigma_{u_k}^d\right)^2 = \sum_{i=1}^{N_v} \sum_{j=1}^{N_v} \phi_{i_k} \phi_{j_k} \left(\sum_{l=1}^{N_l} \sum_{m=1}^{N_l} \gamma_{l_i} \gamma_{m_j} \int_0^{\infty} H_i^*(i\omega) H_j(i\omega) S_{f_{lm}}(\omega) + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{N_r} \sum_{m=1}^{N_r} \Gamma_{l_i} \Gamma_{m_j} \int_0^{\infty} H_i^*(i\omega) H_j(i\omega) S_{\ddot{u}_{R_{lm}}}(\omega) d\omega \right), \quad (44)$$

$$\left(\sigma_{u_k}^s\right)^2 = \sum_{l=1}^{N_r} \sum_{m=1}^{N_r} A_{l_k} A_{m_k} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^4} S_{\ddot{u}_{R_{lm}}}(\omega) d\omega, \quad (45)$$

$$\left(\sigma_{u_k}^{sd}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N_v} \sum_{l=1}^{N_r} \sum_{m=1}^{N_r} \phi_{i_k} A_{l_k} \Gamma_{m_i} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^2} H_i(i\omega) S_{\ddot{u}_{R_{lm}}}(\omega) d\omega. \quad (46)$$

Если рассчитывается отклик конструкции для скоростей или ускорений, то выражения в формулах (44) – (46) меняются в соответствии с формулами (37). Кроме того, в формулах (44) – (46) рассматривалась $S_{\ddot{u}_R}(\omega)$, включающая в себя СПМ для ускорения. Если для нагрузок задано СПМ для скорости или перемещения, то подынтегральные выражения также меняются в соответствии с формулами (37). В результате в общем случае необходимо вычислить интегралы, заданные формулами (47) – (49)

$$I_{ij,n}^{(d)} = \int_0^{\infty} \omega^n H_i^*(i\omega) H_j(i\omega) S_{lm}(\omega) d\omega, \quad (47)$$

$$I_n^{(s)} = \int_0^{\infty} \omega^{n-4} S_{lm}(\omega) d\omega, \quad (48)$$

$$I_{i,n}^{(sd)} = \int_0^{\infty} \omega^{n-2} H_i(i\omega) S_{lm}(\omega) d\omega, \quad (49)$$

где степень n выбирается в соответствии с табл. 1.

Таблица 1

Выбор степени n в зависимости от типов нагрузки и отклика

Отклик \ Нагрузка	Перемещение	Скорость	Ускорение	Сила
Перемещение	4	2	0	0
Скорость	6	4	2	2
Ускорение	8	6	4	4

В данной работе реализовано два метода интегрирования. Первый метод – прямое численное интегрирование, в котором точность определяется частотной сеткой. Второй метод – явное интегрирование, при котором сегменты СПМ нагрузок аппроксимируются полиномами, а точность метода определяется точностью данной аппроксимации [10, 11]. В случае СПМ нагрузки, заданной ступенчатым образом, второй метод дает точное значение интегралов.

2.1. Численное интегрирование

Одним из способов для получения значений интегралов (47) – (49) является прямое численное интегрирование. В данной работе используется интегрирование методом трапеции, при этом определенные интегралы вычисляются по формуле

$$I = \int_0^{\infty} f(\omega) d\omega = \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} \frac{f(\omega_{j+1}) + f(\omega_j)}{2} (\omega_{j+1} - \omega_j), \quad (50)$$

где $f(\omega)$ – подынтегральные выражения в формулах (47) – (49), N_{int} – число интервалов в одномерной сетке по частоте для интегрирования, ω_j – частота j -ого узла сетки интегрирования.

Итоговая сетка для интегрирования по частоте строится объединением узлов двух частотных сеток.

Первая частотная сетка строится при помощи равномерного разбиения интервалов между собственными частотами конструкции, как показано на рис. 3.

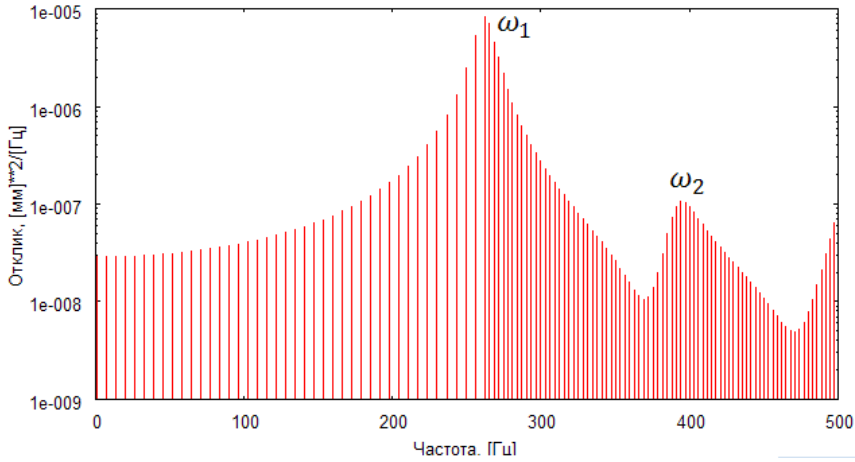


Рис. 3. Равномерная сетка по частоте между собственными частотами

Количество интервалов разбиения для каждого отрезка между собственными частотами задается конструктором и может меняться с целью увеличения точности расчета. На рис. 4 на каждом из отрезков $[10, \omega_1]$, $[\omega_1, \omega_2]$ и т. д., где 10 – минимальная частота, а ω_1 и ω_2 – первые две собственные частоты конструкции, расставлялось равномерно по 20 частот. Т. к. отрезок $[\omega_1, \omega_2]$ короче отрезка $[10, \omega_1]$, то и густота сетки получилась разной.

Вторая частотная сетка состоит из узлов, сгущающихся вокруг собственных частот конструкции.

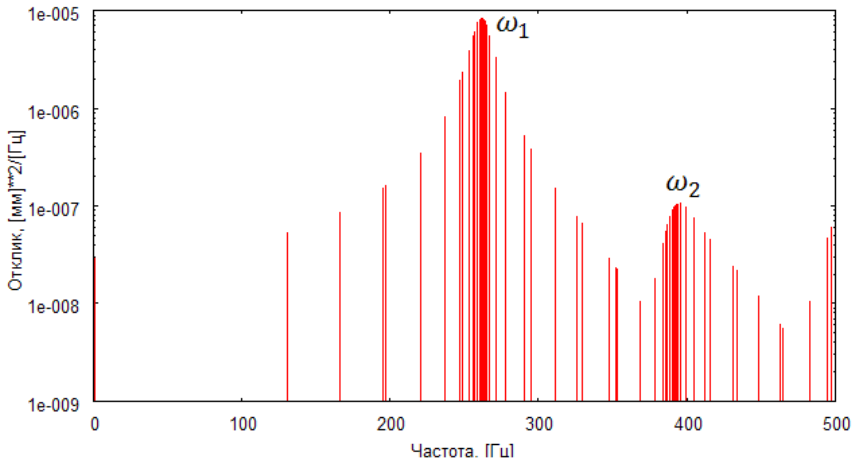


Рис. 4. Сгущающаяся сетка по частоте вокруг собственных частот

В данном случае вокруг каждой из собственных частот расставляются точки частотой сетки со сгущением. Количество частотных точек также управляется расчетчиком тем же самым параметром, как и для равномерного размещения.

После комбинирования двух полученных сеток получается итоговая сетка для интегрирования по частоте, показанная на рис. 5.

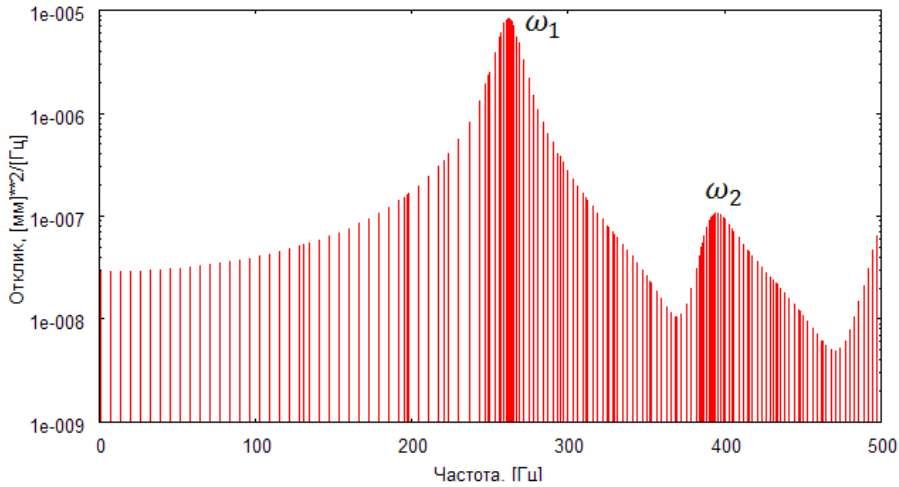


Рис. 5. Итоговая объединенная сетка по частоте

2.2. Явное интегрирование

Реализация явного интегрирования в данной работе базировалась на подходах, изложенных в работах [10, 11]. В общем случае произвольной СПМ нагрузки получить явные формулы для вычисления интегралов (47) – (49) невозможно. Идеей метода является аппроксимация подынтегральных выражений при помощи функций, от которых можно взять интеграл явно. В данном случае используется полиномиальная аппроксимация.

Сначала подынтегральные выражения представляются в рациональном виде $p(\omega)/q(\omega)$, где $p(\omega)$ – действительный полином, а $q(\omega)$ – комплексный полином.

В случае интеграла $I_{ij,n}^{(d)}$ в качестве $q(\omega)$ будет использоваться выражение

$$\frac{1}{q^{(d)}(\omega)} = H_i^*(i\omega)H_j(i\omega), \quad (51)$$

а для интеграла $I_{i,n}^{(sd)}$ в качестве $q(\omega)$ берется выражение

$$\frac{1}{q^{(sd)}(\omega)} = H_i(i\omega). \quad (52)$$

Для интеграла $I_n^{(s)}$ полином $q^{(s)}(\omega)$ не используется.

Для комплексного полинома $q(\omega)$ с различными корнями (в данном случае это справедливо) имеет место разложение

$$\frac{1}{q(\omega)} = \sum_{q=1}^{N_q} \frac{a_q}{\omega - \Omega_q}, \quad a_q = \frac{1}{\prod_{r=1, r \neq q}^{N_q} (\Omega_q - \Omega_r)}, \quad (53)$$

где N_q – число корней полинома, Ω_q – q -й корень. Это позволяет упростить выражение в знаменателе, и является удобным для дальнейшего явного взятия интеграла.

В действительный полином $p(\omega)$ для интегралов (47) – (49) входит все, что не вошло в соответствующие комплексные полиномы $q(\omega)$. В частности в него входит СПМ $S_{lm}(\omega)$, которая представляет собой кусочно-линейную функцию в log-log масштабе. Напрямую от такого представления в общем случае взять интеграл не получается, поэтому на каждом отрезке $[\omega_j, \omega_{j+1}]$ задания кривой СПМ она приближается при помощи разложения по полиномам согласно

$$S_{lm}^{(j)}(\omega) = \sum_{p=0}^{N_p} b_p \omega^p, \quad \omega_j \leq \omega \leq \omega_{j+1}, \quad (54)$$

где N_p – максимальная степень полинома в разложении. Теперь для отрезка $[\omega_j, \omega_{j+1}]$ интегралы и можно привести к виду

$$I_n = \int_{\omega_j}^{\omega_{j+1}} \frac{\omega^{n-n_0} S_{lm}^{(j)}(\omega)}{q(\omega)} d\omega = \sum_{p=0}^{N_p} b_p \sum_{q=1}^{N_q} a_q \int_{\omega_j}^{\omega_{j+1}} \frac{\omega^{n-n_0+p}}{\omega - \Omega_q} d\omega, \quad (55)$$

где n_0 – показатель степени, определяемый из выражений (47) и (49) для конкретных интегралов. А интеграл можно привести к виду

$$I_{n,k}^{(s)} = \int_{\omega_j}^{\omega_{j+1}} \omega^{n-4} S_{lm}^{(j)}(\omega) d\omega = \sum_{p=0}^{N_p} b_p \int_{\omega_j}^{\omega_{j+1}} \omega^{n-4+p} d\omega. \quad (56)$$

3. Сравнение методов интегрирования на примере задачи о контейнере

Для сравнения точности методов интегрирования отклика конструкции при действии ШСВ была выбрана задача о контейнере, установленном на платформе, на которую воздействует вертикальная вибрация.

Постановка задачи о контейнере размером 767×903×454 мм приведена на рис. 6 и 7.

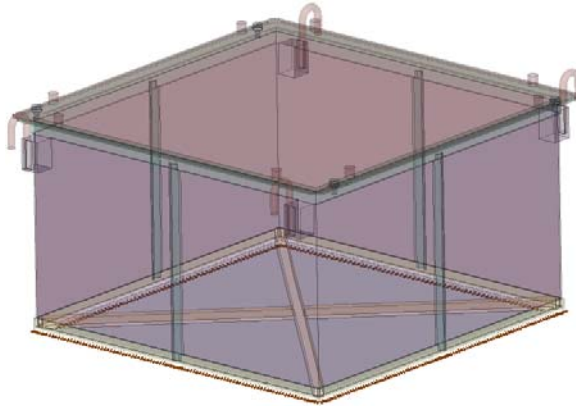


Рис. 6. Геометрия контейнера и места его закрепления

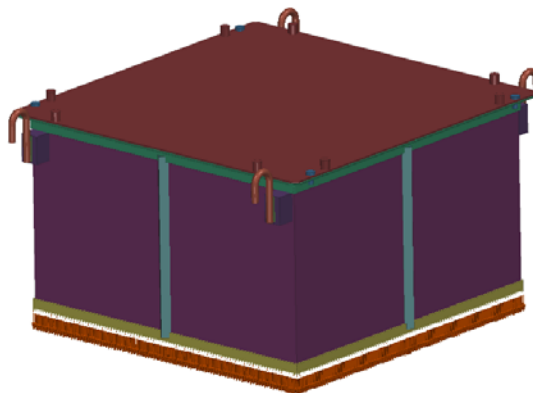


Рис. 7. Геометрия контейнера и места приложения нагрузки

На рис. 6 показана геометрия контейнера. Снизу рисунка показаны места закрепления контейнера.

На рис. 7 показано место и направление прикладываемой вертикальной нагрузки, заданной в виде вибрации, СПМ ускорения которой показана графически на рис. 8.

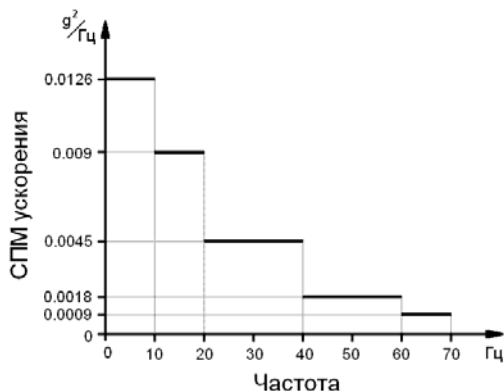


Рис. 8. СПМ вертикального ускорения, приложенного к закрепленному основанию контейнера

Контейнер стальной. Для материала использовалась модель линейной упругости с параметрами, приведенными в табл. 2.

Таблица 2

Параметры материала контейнера

Величина	Значение
ρ , кг/мм ³	$7,85e - 6$
E , Н/мм ²	$2e5$
ν , 1	0,3

Величина постоянного демпфирования бралась равной 3 %.

Конечно-элементная сетка состоит из 200616 элементов, 426212 узлов. Число незакрепленных степеней свободы равно 844815.

Для данной задачи рассчитывался отклик по ЛОГОС-ПА в четырех вариантах: численное интегрирование с густотой частотной сетки, эквивалентной пользовательскому параметру 20; численное интегрирование с густотой частотной сетки, эквивалентной 100; численное интегрирование с густотой частотной сетки, эквивалентной 1000; явное интегрирование.

На рис. 9 приведено среднеквадратичное отклонение для перемещения, полученное по явному интегрированию.

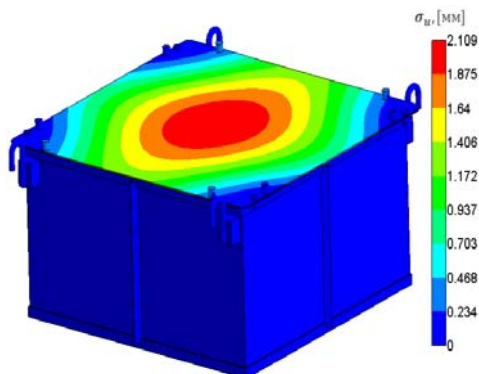


Рис. 9. Результирующее среднеквадратичное отклонение для перемещения, полученное с использованием явного интегрирования

В табл. 3 приведено сравнение максимального значения для динамической части среднеквадратичного отклонения.

Таблица 3

Сравнение максимального значения среднеквадратичного отклонения для перемещений

	ЛОГОС-ПА, численное, густота 20	ЛОГОС-ПА, численное, густота 100	ЛОГОС-ПА, численное, густота 1000	ЛОГОС-ПА, явное
$\sigma_{u,\max}, [\text{мм}]$	2,09794	2,10886	2,10961	2,10962

Из табл. 3 видно, что по мере сгущения частотной сетки результат численного интегрирования отклика конструкции сходится к результату явного интегрирования отклика. Однако, даже в случае достаточно грубой сетки по частоте, ошибка в решении не превышает 0,6 %.

Время работы обоих типов интегрирования на данной задаче схоже и мало относительно времени работы сервисных функций, однако в общем случае явное интегрирование быстрее, т. к. интегрирование ведется по числу отрезком СПМ, что, как правило, существенно меньше, чем число интервалов частотной сетки.

Из всего выше сказанного можно сделать вывод, что оба метода дополняют друг друга и могут быть успешно применены на практике. Явное интегрирование быстрее, как правило, точнее, но требовательнее к задаваемой СПМ ввиду использования ее полиномиальной аппроксимации, из-за чего требуется дополнительное внимание со стороны конструктора. Численное интегрирование, как правило, менее точное, требует исследования сходимости по количеству разбиений частотного диапазона. Однако, оно менее чувствительно к виду СПМ, т. к. использует его в исходно заданном виде без каких либо приближений.

Заключение

В работе приведено описание методики расчета отклика конструкции при действии ШСВ. Доклад содержит описание теоретических основ данного типа анализа. Описываются два метода расчета отклика конструкции, которые сравниваются между собой на задаче о получении отклика контейнера при действии вертикальной ШСВ. По результатам сравнения дается заключение о применимости обоих методов интегрирования.

Литература

1. Вибрации в технике: справочник / ред. В. Н. Челомей (пред). – М.: Машиностроение, 1980 – Т. 3. Колебания машин, конструкций и их элементов / под ред. Ф. М. Диментберга и К. С. Колесникова. 1980.
2. Timoshenko S. Vibration Problems in Engineering. New York: D. Van Nostrand Company, Inc., 1937.
3. Прочность, устойчивость, колебания: справочник / под ред. Биргера И. А., Пановко Я. Г. – М.: Машиностроение, 1968.
4. Воробьев Ю. С., Шепель А. И., Романенко Л. Г., Водченко В. Н., Сапелькина З. В. Конечно-элементный анализ собственных колебаний статически напряжённых лопаток турбомашин // Проблемы прочности. – 1990. – №7. – С. 88–94.
5. Petyt M. Introduction to Finite Element Vibration Analysis. New York: Cambridge University Press, 2010.
6. Clough R. W., Penzien J. Dynamics of Structures. Berkley: Computers & Structures Inc., 2003.

7. Дерюгин Ю. Н., Козелков А. С., Спиридонов В. Ф., Циберев К. В., Шагалиев Р. М. Многофункциональный высокопараллельный пакет программ ЛОГОС для решения задач тепломассопереноса и прочности // С.-Петербургский научный форум «Наука и общество»: сб. тез. С.-Пб: Изд-во Политех. ун-та, 2012.

8. Речкин В. Н., Спиридонов В. Ф., Циберев К. В. и др. Пакет программ ЛОГОС. Модуль решения квазистатических задач прочности и модального анализа // XIII Международный семинар «Супервычисления и математическое моделирование»: сб. докл. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2011.

9. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973.

10. Chen M.-T., Ali A. An efficient and robust integration technique for applied random vibration analysis // Computers & Structures. – 1998. – V. 66, no. 6. – P. 785 – 798.

11. Narichandran R. Random vibration under propagating excitation: closed-form solutions // Journal of Engineering Mechanics. – 1992. – V. 118. – P. 575 – 586.

LOGOS SOFTWARE PACKAGE. COMPUTATIONAL METHOD FOR THE RESPONSE OF STRUCTURES UNDER BROAD-BAND RANDOM VIBRATION

A. Yu. Yeremenko, S. S. Kosarim, A. O. Naumov, V. N. Rechkin, A. I. Chembarov

Russian Federal Nuclear Center –
All-Russian Research Institute of Experimental Physics, Sarov

The paper describes a computational method for the response of a structure under the effect of the broad-band random vibration. We describe the computations of the response of the structure to the loading applied both to the fixed and not-fixed parts of the structure. We provide basic ratios to calculate the response of the structure as for travel, velocities and acceleration, and stresses. The realized methods of the response integration are described and compared. The solution of practical problems is shown.

Key words: LOGOS software package, broad-band random vibration, probabilistic load, structure response computation.

УДК 519.6

ПРОТОКОЛ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ КОМАНД СИСТЕМНОГО АДМИНИСТРИРОВАНИЯ НА УЗЛАХ МНОГОПРОЦЕССОРНОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО КОМПЛЕКСА

Е. В. Ерёмин, Н. Н. Залялов

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров

Предложен протокол и набор программ удалённого доступа к вычислительным узлам многопроцессорного вычислительного комплекса. Традиционные средства удалённого доступа, такие как SSH или PDSH выполняют запрос к n узлам последовательно, что имеет асимптотическую сложность $O(n)$. Сократить сложность до $O(\log n)$ можно, используя так называемое дерево запроса – способ разделить исходное множество узлов на части и работать