

Рассчитанный радиус общей ЗН стационарных источников не превышает 4400 м.

В дальнейшем будет осуществлена верификация и сравнение полученных результатов с экспериментальными данными, снятых с постов наблюдения.

«RUMB» CODE FOR THE DESIGN SUPPORT OF THE BOUNDARIES OF THE BUFFER AREAS AND OF THE OBSERVATION AREAS OF NUCLEAR FACILITIES

M. V. Zhuravleva, A. N. Bakhaev

Russian Federal Nuclear Center –
All-Russian Research Institute of Experimental Physics, Sarov

The report is devoted to the software support of the method to justify the boundaries of the buffer areas (BA) and observation areas (OA) of the radiation facilities in case of stationary sources of radioactive emissions into the air.

Key words: buffer areas (BA), observation areas (OA), radionuclides, atmospheric factor, computational justification of boundaries.

УДК 532.591, 531.5.031

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДИСКООБРАЗНЫХ ТРЕЩИН В ТРЁХМЕРНОМ УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

A. B. Zvyagin¹, A. B. Akulich², A. A. Шамина¹

¹МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

²Федеральный научный центр «Научно-исследовательский институт системных исследований РАН», Москва

Исследуется проблема взаимного влияния трехмерных дискообразных трещин, расположенных в параллельных плоскостях упругой среды. Среда находится под действием растягивающего напряжения в направлении перпендикулярном плоскостям трещин. Трещины моделируются математическими разрезами сплошной среды с возможностью сильного разрыва поля перемещений на берегах разреза. Решение строится численно с использованием метода разрывных смещений.

Ключевые *слова:* трёхмерное пространство, упругая среда, трещина, коэффициент интенсивности напряжений, метод граничных элементов, метод разрывных смещений.

1. Введение

Одной из актуальных задач современной механики разрушения является задача аналитических исследований концентрации напряжений в окрестности трещин в трёхмерном пространстве. В настоящее время существуют хорошо развитые эффективные методы решения двумерных задач

о трещинах. Одним из таких методов является метод разрывных смещений [1]. Преимуществом данного метода является возможности точного выполнения уравнений теории упругости. При этом граничные условия выполняются на дискретном множестве точек границы, которое можно сделать сколь угодно плотным. Для трёхмерных задач механики твёрдого деформируемого тела чаще всего используются методы конечных элементов. Но их использование для трещин в трёхмерном пространстве сталкивается с большими трудностями, поскольку построение полей напряжений и перемещений в окрестности трещин требует построения достаточно мелкой, адаптированной к геометрии трещин, сетки из конечных элементов. При наличии системы трещин сложной геометрии задача становится фактически невыполнимой. В данной работе предлагается численный метод граничных элементов, реализующий метод разрывных смещений в трёхмерном пространстве. Преимуществом данного метода является то, что на конечные элементы разбивается только поверхность трещин, моделирующая разрыв упругой среды. Это понижает размерности задачи на стадии её решения. С точки зрения математической теории, данный подход является одной из реализаций метода разложения решения по «не ортогональным» функциям [2]. После численного определения коэффициентов разложения мы имеем фактически аналитическое представление решения в виде конечного ряда внутри области. С точки зрения памяти, нам надо хранить только найденные коэффициенты разложения, позволяющие затем найти любые требуемые характеристики в любой точке области решения. Это существенно с точки зрения простоты практического использования полученного решения.

2. Постановка задачи

В принципе, предлагаемый метод решения позволяет решать задачу о любом количестве произвольно ориентированных трещин. Для определённости будем рассматривать, как основную задачу, систему двух трещин, расположенных в параллельных плоскостях в трёхмерном пространстве (рис 1). В начальном недеформированном состоянии трещины представляют собой бесконечно тонкие круглые математические разрезы сплошной среды. Под действием растягивающего напряжения, направленного перпендикулярно плоскостям разрезов упругая среда деформируется, деформируются и берега трещин. Требуется исследовать поля перемещений и напряжений, возникающие в упругой среде. Важную роль в механике трещин играет величина коэффициентов интенсивности напряжений [3] на краю трещины (КИН). Часто в качестве критерия начала роста трещины в данном направлении принимается достижение коэффициентом интенсивности (или комбинацией коэффициентов интенсивности напряжений) некоторого критического значения, характерного для данного конкретного упругого материала. Поэтому одной из составляющих задачи является проверка метода на возможность определения КИН и сравнение его численных значений с имеющимися аналитическими результатами.

Расположение трещин в пространстве

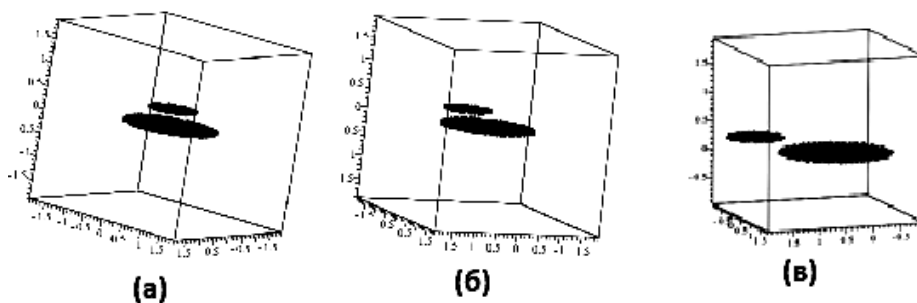


Рис. 1. Исследуемые типы расположения двух трещин в пространстве: а – центры основной и дополнительной (малой) трещины лежат на одной оси; б – малая трещина расположена над основной трещиной; в – малая трещина не затеняет основную трещину

Если совместить плоскость основной трещины с плоскостью xOy , то на берегах трещин должны быть выполнены условия равенства нулю компонент тензора напряжений $\sigma_{zx} = 0$, $\sigma_{zy} = 0$, $\sigma_{zz} = 0$, а на бесконечности задано одно ненулевое растягивающее напряжение $\sigma_{zz} = P > 0$.

3. Построение системы функций разложения

Основой метода разложения решения по не ортогональным функциям является построение системы линейно независимых решений основной системы уравнений задачи. В статической теории упругости – это уравнения равновесия.

Введём следующие обозначения: (x_1, x_2, x_3) – декартовы координаты в некоторой системе координат с базисом e_1, e_2, e_3 ; $u_i(x_1, x_2, x_3)$, $(i = 1, 2, 3)$ компоненты вектора перемещений; λ, μ – упругие модули Ляме; $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) – матрицы компонент тензора деформаций и тензора напряжений; для упрощения записи воспользуемся следующим обозначением частной производной $\partial f / \partial x_k = f_{,k}$; повторяющийся индекс в любом выражении будет означать операцию свёртки; ∇ – оператор градиента функции; ∇^2 – оператор Лапласа.

Ограничимся случаем отсутствия массовых сил. Равновесие упругой среды описывается уравнениями Ляме

$$(\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,jj} = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Напряжения определяются обобщенным законом Гука

$$\sigma_{ji} = \lambda \delta_{ji} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ji}, \quad \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}). \quad (2)$$

В результате подстановки деформаций в закон Гука (2) получим представление напряжений с помощью перемещений

$$\sigma_{ji} = \lambda \delta_{ji} u_{k,k} + \mu(u_{j,i} + u_{i,j}). \quad (3)$$

Продифференцируем полученное уравнение (1) по переменной x_i с последующей свёрткой по индексу i . В результате получим, что дилатация $e = u_{i,i}$ является гармонической функцией $\nabla^2 e = 0$. Применим к уравнениям равновесия (1) оператор Лапласа и примем во внимание то, что дилатация является гармонической функцией. В результате приходим известному факту, что компоненты вектора перемещений являются бигармоническими функциями

$$\nabla^2 \nabla^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Воспользуемся теоремой Альманси [3] о представлении бигармонической функции в форме

$$\nabla^2 \nabla^2 u = 0, \quad u = \varphi + x_3 \psi, \quad \nabla^2 \varphi = 0, \quad \nabla^2 \psi = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим частное решение уравнений теории упругости в форме

$$u_1 = x_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad u_2 = x_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_3 = \varphi_3 + x_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \quad \Delta \varphi_3 = 0, \quad \Delta \psi = 0. \quad (6)$$

Подставим (6) в уравнения Ляме (1)

$$\begin{aligned} i = 1, \quad & (\lambda + \mu) \left(x_3 \psi_{,11} + x_3 \psi_{,22} + \varphi_{3,3} + (x_3 \psi_{,3})_{,3} \right)_{,1} + \mu \nabla^2 (x_3 \psi_{,1}) = 0; \\ i = 2, \quad & (\lambda + \mu) \left(x_3 \psi_{,11} + x_3 \psi_{,22} + \varphi_{3,3} + (x_3 \psi_{,3})_{,3} \right)_{,2} + \mu \nabla^2 (x_3 \psi_{,2}) = 0; \\ i = 3, \quad & (\lambda + \mu) \left(x_3 \psi_{,11} + x_3 \psi_{,22} + \varphi_{3,3} + (x_3 \psi_{,3})_{,3} \right)_{,3} + \mu \nabla^2 (x_3 \psi_{,3}) = 0. \end{aligned}$$

С учетом гармоничности функций φ_3, ψ , получим следующие соотношения $\left[(\lambda + \mu) \varphi_{3,3} + (\lambda + 3\mu) \psi_{,3} \right]_{,k} = 0$, $(k = 1, 2, 3)$. Данные равенства будут выполняться тождественно, если искомые функции связаны соотношением

$$\Psi = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \varphi_3. \quad (7)$$

Таким образом, уравнениям равновесия теории упругости удовлетворяет следующее поле перемещений

$$u_1 = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} x_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, \quad u_2 = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} x_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}, \quad u_3 = \varphi_3 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} x_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3}, \quad (8)$$

если $\Delta \varphi_3 = 0$.

Возьмём в качестве гармонической функции φ_3 потенциал двойного слоя с плотностью $\mu(\xi_0)$

$$\begin{aligned} \varphi_3(\mathbf{x}) &= \iint_S \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} dS_\xi, \quad \Delta \varphi_3 = 0, \\ \varphi_3^+(\xi_0) - \varphi_3^-(\xi_0) &= 4\pi\mu(\xi_0), \quad \text{если } \xi_0 \in S, \\ S: \quad x_3 &= 0, \quad |x_1| \leq h_1, \quad |x_2| \leq h_2; \quad |\mathbf{x} - \xi| \rightarrow \infty, \quad \varphi_3 \sim \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Полученное поле перемещений

$$u_1 = -\Lambda x_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, \quad u_2 = -\Lambda x_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}, \quad u_3 = \varphi_3 - \Lambda x_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3}, \quad (10)$$

где $\Lambda = (\lambda + \mu)/(\lambda + 3\mu)$, удовлетворяет уравнениям равновесия упругой среды (1). Для поля перемещений (10) можно определить деформации:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= -\Lambda x_3 \varphi_{3,11}; \quad \varepsilon_{22} = -\Lambda x_3 \varphi_{3,22}; \quad \varepsilon_{33} = (1 - \Lambda) \varphi_{3,3} - \Lambda x_3 \varphi_{3,33}; \\ \varepsilon_{12} &= -\Lambda x_3 \varphi_{3,12}; \quad 2\varepsilon_{13} = (1 - \Lambda) \varphi_{3,1} - 2\Lambda x_3 \varphi_{3,13}; \\ 2\varepsilon_{23} &= (1 - \Lambda) \varphi_{3,2} - 2\Lambda x_3 \varphi_{3,23}; \quad e = \varepsilon_{kk} = (1 - \Lambda) \varphi_{3,3}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подстановка (11) в закон Гука (2) определяет напряжения:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}}{2\mu} &= \Lambda_1 (1 - \Lambda) \varphi_{3,3} - \Lambda x_3 \varphi_{3,11}; \quad \frac{\sigma_{22}}{2\mu} = \Lambda_1 (1 - \Lambda) \varphi_{3,3} - \Lambda x_3 \varphi_{3,22}; \\ \frac{\sigma_{33}}{2\mu} &= (1 + \Lambda_1) (1 - \Lambda) \varphi_{3,3} - \Lambda x_3 \varphi_{3,33}; \quad \frac{\sigma_{12}}{2\mu} = -\Lambda x_3 \varphi_{3,12}; \\ \frac{\sigma_{13}}{2\mu} &= \frac{(1 - \Lambda)}{2} \varphi_{3,1} - \Lambda x_3 \varphi_{3,13}; \quad \frac{\sigma_{23}}{2\mu} = \frac{(1 - \Lambda)}{2} \varphi_{3,2} - \Lambda x_3 \varphi_{3,23}. \end{aligned} \quad (12)$$

В формулах (12) использовано обозначение $\Lambda_1 = \lambda/(2\mu)$.

Отметим, что аналогичным образом можно построить ещё два частных решения уравнений упругости с полями перемещений:

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} x_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \quad u_2 = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} x_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, \quad u_3 = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} x_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}; \\ u_1 &= -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} x_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, \quad u_2 = \varphi_2 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} x_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, \quad u_3 = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} x_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Функции $\varphi_k(x_1, x_2, x_3)$ ($k = 2$), как в рассмотренном случае, являются потенциалами двойного слоя (9). Для них можно определить соответствующие поля деформаций и напряжений. В результате, для площадки S_0 с нормалью, направленной вдоль оси x_3 , мы имеем три линейно независимых решения уравнений упругости. Отметим, что в случае выбора плотности потенциала двойного слоя $\mu(\xi_1, \xi_2)$ в виде многочлена, функции (9) вычисляются аналитически, поскольку сводятся к вычислению интегралов вида

$$\iint_{S_0} \frac{\xi_1^m \xi_2^n}{|\mathbf{x} - \xi|^3} d\xi_1 d\xi_2. \quad (13)$$

Например, в случае постоянной плотности и прямоугольной площадки $S_0 : |\xi_1| < h_1, |\xi_2| < h_2$, аналитическое выражение интеграла (13) будет иметь следующий вид:

$$f(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2) = -\frac{x_1(x_1 - \xi_1)}{r(r + x_2 - \xi_2)} - \frac{x_3(x_2 - \xi_2)}{r(r + x_1 - \xi_1)} + \arctan\left(\frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{x_3 r}\right) - \frac{x_3(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_3^2 + r^2)}{r[r^2 x_3^2 + (x_1 - \xi_1)^2(x_2 - \xi_2)^2]},$$

где $r(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2} + x_3$, и выполнены условия

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi(x_1, x_2, x_3, h_1, h_2) = f(x_1, x_2, x_3, h_1, h_2) - f(x_1, x_2, x_3 - h_1, h_2) - f(x_1, x_2, x_3, h_1 - h_2) + f(x_1, x_2, x_3 - h_1 - h_2).$$

Для построения численной схемы обозначим поля перемещений и напряжений, соответствующие каждому из построенных решений, следующим образом:

$$U_i^{m(k)}, \sigma_{ij}^{m(k)}, \quad (i, j = 1, 2, 3), (m = 1, 2, \dots, N) \quad (14)$$

В выражениях (14) верхний индекс $k = 1, 2, 3$ означает номер решения. Например, номер $k = 3$ соответствует решению (8), (12). Индекс m – это номер граничного элемента.

4. Численный метод решения краевой задачи

Рассмотрим типичную задачу механики трещин. В пространстве глобальной системы координат (X, Y, Z) с базисом $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ расположены несколько трещин, которые моделируются поверхностями разрыва перемещений (рис. 1). Будем, для определённости, ставить задачу в напряжениях. Это означает, что на берегу трещины задан вектор напряжений, как функция точек поверхности. Пусть (X_m, Y_m, Z_m) – координаты центра граничного элемента с номером m , (e_1^m, e_2^m, e_3^m) – локальный базис данного элемента. Введём в рассмотрение ортогональную матрицу a_{ij}^m позволяющую выразить локальные векторы в глобальном базисе

$$e_i^m = a_{ij}^m \varepsilon_j. \quad (15)$$

Для каждого граничного элемента с номером n в его локальном базисе e_i^n можно считать заданными три компоненты вектора напряжений на площадке с нормалью e_3^n :

$$\sigma_{31} = b_1^n, \sigma_{32} = b_2^n, \sigma_{33} = b_3^n. \quad (16)$$

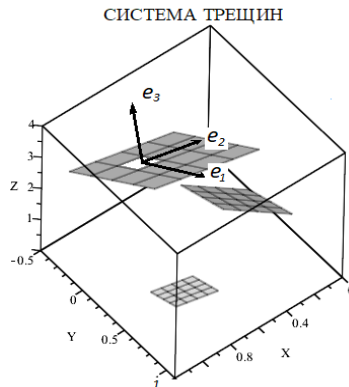


Рис. 2. Система трещин в глобальной системе координат (X, Y, Z) . На поверхности одной из трещин выделен граничный элемент со своей локальной системой координат (x_1, x_2, x_3) в базисе e_1, e_2, e_3

Рассмотрим следующее поле перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned} U_i^m &= D_1^m U_i^{m(1)} + D_2^m U_i^{m(2)} + D_3^m U_i^{m(3)}; \\ \Sigma_{ij}^m &= D_1^m \sigma_{ij}^{m(1)} + D_2^m \sigma_{ij}^{m(2)} + D_3^m \sigma_{ij}^{m(3)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Эти поля являются решениями уравнений теории упругости в локальном базисе e_1^m, e_2^m, e_3^m . Найдем координаты центра элемента с номером n в данном базисе с использованием матрицы перехода (15).

$$\begin{aligned} x_1^{mn} &= (X_n - X_m) a_{11}^m + (Y_n - Y_m) a_{12}^m + (Z_n - Z_m) a_{13}^m, \\ x_2^{mn} &= (X_n - X_m) a_{21}^m + (Y_n - Y_m) a_{22}^m + (Z_n - Z_m) a_{23}^m, \\ x_3^{mn} &= (X_n - X_m) a_{31}^m + (Y_n - Y_m) a_{32}^m + (Z_n - Z_m) a_{33}^m. \end{aligned} \quad (18)$$

Подстановка координат (18) в формулы (17) позволяет найти компоненты тензора напряжений от поля (17) в точке, соответствующей центру элемента с номером n

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij}^m(x_1^{mn}, x_2^{mn}, x_3^{mn}) &= D_1^m \sigma_{ij}^{m(1)}(x_1^{mn}, x_2^{mn}, x_3^{mn}) + \\ &+ D_2^m \sigma_{ij}^{m(2)}(x_1^{mn}, x_2^{mn}, x_3^{mn}) + D_3^m \sigma_{ij}^{m(3)}(x_1^{mn}, x_2^{mn}, x_3^{mn}). \end{aligned} \quad (19)$$

Полученные компоненты тензора (19) в базисе e_1^m, e_2^m, e_3^m позволяют найти их значения в базисе e_1^n, e_2^n, e_3^n

$$\sigma_{ij}^{mn} = D_1^m \sigma_{ij}^{mn(1)} + D_2^m \sigma_{ij}^{mn(2)} + D_3^m \sigma_{ij}^{mn(3)},$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{mn(1)} &= \sigma_{pq}^{m(1)} \left(a_{ps}^m a_{is}^n \right) \left(a_{qr}^m a_{jr}^n \right), \\ \sigma_{ij}^{mn(2)} &= \sigma_{pq}^{m(2)} \left(a_{ps}^m a_{is}^n \right) \left(a_{qr}^m a_{jr}^n \right), \\ \sigma_{ij}^{mn(3)} &= \sigma_{pq}^{m(3)} \left(a_{ps}^m a_{is}^n \right) \left(a_{qr}^m a_{jr}^n \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Выражения (20) принято называть коэффициентами влияния напряжений, которые вызывает соответствующее единичное решение для элемента с номером m в центре элемента с номером n . Причём напряжения (20) соответствуют базису e_1^n, e_2^n, e_3^n .

Это позволяет найти вклад в граничные условия в напряжениях в форме девяти матриц размерности $(N \times N)$, где N – общее количество граничных элементов

$$\left. \begin{aligned} A_{mn}^{(k)} &= \sigma_{3k}^{mn(1)} = \sigma_{pq}^{m(1)} \left(a_{ps}^m a_{3s}^n \right) \left(a_{qr}^m a_{kr}^n \right), \\ B_{mn}^{(k)} &= \sigma_{3k}^{mn(2)} = \sigma_{pq}^{m(2)} \left(a_{ps}^m a_{3s}^n \right) \left(a_{qr}^m a_{kr}^n \right), \\ C_{mn}^{(k)} &= \sigma_{3k}^{mn(3)} = \sigma_{pq}^{m(3)} \left(a_{ps}^m a_{3s}^n \right) \left(a_{qr}^m a_{kr}^n \right), \end{aligned} \right\} k = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Коэффициенты D_1^m, D_2^m, D_3^m (их количество $3N$) определяются из граничных условий. Суммируя с неопределёнными коэффициентами вклады (21), которые вносит каждый элемент в центр элемента с номером n , и, используя граничные условия, получим

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1}^N A_{mn}^{(1)} D_1^m + \sum_{m=1}^N B_{mn}^{(1)} D_2^m + \sum_{m=1}^N C_{mn}^{(1)} D_3^m &= b_1^n, \\ \sum_{m=1}^N A_{mn}^{(2)} D_1^m + \sum_{m=1}^N B_{mn}^{(2)} D_2^m + \sum_{m=1}^N C_{mn}^{(2)} D_3^m &= b_2^n, \\ \sum_{m=1}^N A_{mn}^{(3)} D_1^m + \sum_{m=1}^N B_{mn}^{(3)} D_2^m + \sum_{m=1}^N C_{mn}^{(3)} D_3^m &= b_3^n, \end{aligned} \right\} n=1,2,\dots,N. \quad (22)$$

Введём общий вектор из коэффициентов и вектор правой части (22) в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= (D_1^1, D_1^2, \dots, D_1^N, D_2^1, D_2^2, \dots, D_2^N, D_3^1, D_3^2, \dots, D_3^N), \\ \mathbf{b} &= (b_1^1, b_1^2, \dots, b_1^N, b_2^1, b_2^2, \dots, b_2^N, b_3^1, b_3^2, \dots, b_3^N). \end{aligned} \quad (23)$$

Если сформировать глобальную матрицу коэффициентов влияния в виде

$$\widehat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} A_{mn}^{(1)} & B_{mn}^{(1)} & C_{mn}^{(1)} \\ A_{mn}^{(2)} & B_{mn}^{(2)} & C_{mn}^{(2)} \\ A_{mn}^{(3)} & B_{mn}^{(3)} & C_{mn}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

то система уравнений (22) переписывается в векторной форме

$$\widehat{\mathbf{M}} \mathbf{D}^t = \mathbf{b}^t, \quad (25)$$

где $\mathbf{D}^t, \mathbf{b}^t$ – транспонированные векторы (23).

Таким образом, задача сводится к решению линейной системы уравнений (25). Если эта задача решена, то определение перемещений и напряжений в любой точке (X, Y, Z) глобальной системы координат сводится к следующей последовательности действий:

В цикле по переменной $m = 1 \dots N$ определяем перемещения $u_i(X, Y, Z)$ и напряжения $\sigma_{ij}(X, Y, Z)$.

1) Находим координаты данной точки в локальной системе координат с базисом e_1^m, e_2^m, e_3^m с использованием матрицы перехода (5)

$$\begin{pmatrix} x_1^m \\ x_2^m \\ x_3^m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X - X_m \\ Y - Y_m \\ Z - Z_m \end{pmatrix}. \quad (26)$$

2) Вычислим величину перемещений и напряжений

$$U_i^m, \Sigma_{ij}^m, (i=1,2,3; j=1,2,3)$$

с помощью формул (17), (26).

3) После перехода в глобальную систему координат, получим вклад элемента с номером m в перемещения и напряжения в глобальной системе координат:

$$u_j^m = U_i^m a_{ij}^m, \quad \Sigma_{ij}^m a_{iq}^m a_{jp}^m = \sigma_{pq}^m.$$

4) Суммируем в цикле полученные вклады

$$u_i(X, Y, Z) = \sum_{m=1}^N U_i^m, \quad \sigma_{ij}(X, Y, Z) = \sum_{m=1}^N \Sigma_{ij}^m. \quad (27)$$

Таким образом, формулы (27) завершают определение перемещений и напряжений в произвольной точке области решения.

5. Результаты расчетов и тестирования

Изложенный метод был реализован в виде программы. Ниже приводятся численные результаты. В первую очередь, программа была оттестирована путём сравнения с известными аналитическими решениями. В качестве задач тестирования были выбраны следующие аналитические результаты:

1. Осесимметричная трещина в виде диска [5] – [8] которая находится под действием внутреннего давления. В цилиндрической системе координат r, φ, z (трещине соответствует диск $z = 0, 0 \leq r \leq R$) данной задаче соответствуют граничные условия: $z = 0, 0 \leq r \leq R, \sigma_{zz} = -p, \sigma_{rz} = 0$.

Основной характеристикой линейной механики разрушения является коэффициент интенсивности напряжений $K_I = \lim_{r \rightarrow R} \sigma_{zz} \sqrt{2\pi(r - R)}$. В аналитическом решении для круглой трещины его величина равна

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi R}} \int_0^R \frac{r \sigma_{zz}(r) dr}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Эта задача решалась численно в трёхмерной постановке для разных радиусов. Результаты сравнения приведены в табл. 1.

Таблица 1

Радиус трещины R (м)	20	25
Численное значение K_I/μ ($\text{м}^{1/2}$)	0,0063	0,0074
Теоретическое значение K_I/μ ($\text{м}^{1/2}$)	0,0051	0,0056

Проверялась степень выполнения симметрии задачи. На рис. 2 показано положение точек верхней поверхности трещины (точки соответствуют положению середин граничных элементов).

Поверхность берега трещины после раскрытия

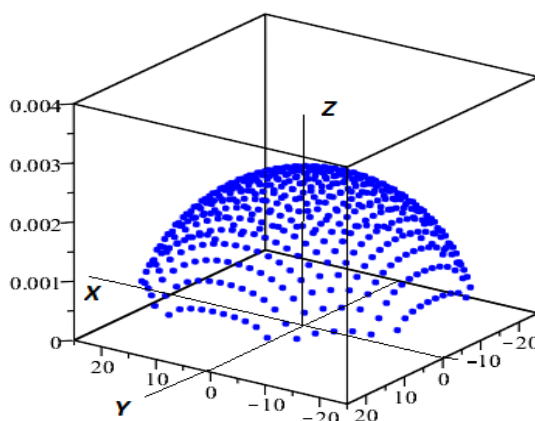


Рис. 3. Положение верхнего берега трещины радиуса $R = 20$ с прямоугольными граничными элементами $h_x \times h_y, h_x = h_y = 1$

Показанные примеры сравнения позволяют считать, что предлагаемый метод расчетов напряжённо-деформированного состояния упругой среды для системы трёхмерных трещин даёт возможность достаточно эффективно определять основные характеристики задачи механики трещин. Сравнение коэффициентов интенсивности с известными аналитическими результатами показало, что и количественные характеристики вполне приемлемы.

Предложенный метод был использован в задаче с двумя трещинами, которые расположены в параллельных плоскостях рис. 1. В работе [6] предложен аналитический способ решения в том случае, когда все трещины имеют одну ось симметрии, но результатов для сравнения нет.

Верхний и нижний берег трещин в сечении $y=0$

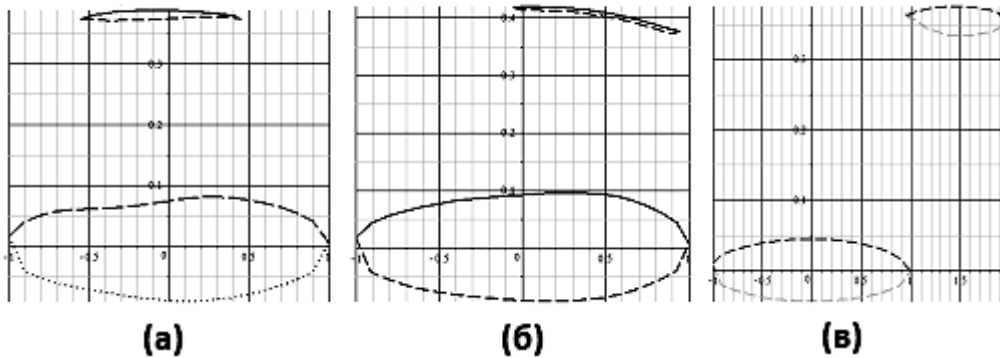


Рис. 4. Раскрытие берегов основной и дополнительной трещин в сечении $y = 0$

Были проведены расчёты в трёх случаях расположения двух трещин, соответствующих рис. 1. Во всех трёх случаях основная трещина имела радиус, равный $r_1 = 1$, а вторая малая трещина – радиус $r_2 = 0,5$. Начальное расстояние между плоскостями трещин было одинаковым $H = 0,35$. Напряжение, действующее на бесконечности по нормали к плоскости трещин, имело величину $\sigma_{zz}/\mu = 0,2$. На рис. 4 приведены расчётные положения верхнего и нижнего берегов трещин для трёх случаев взаимного расположения. В том случае, когда малая трещина находится в тени основной, её влиянием можно практически пренебречь (рис.4,а и б). В этих случаях раскрытие малой трещины мало. Наибольшее влияние малая трещина оказывает в случае, показанном на рис.4,в – малая трещина раскрыта. Для количественного сравнения влияния определялась величина отношения КИН основной трещины к её теоретическому значению в том случае, когда дополнительная (малая) трещина отсутствует. Координаты $x = -1$ и $x = 1$ соответствуют краям трещины в сечении $y = 0$.

Таблица 2

Отношение расчетного значения КИН к значению для одиночной трещины K_I/K_I^T

(а) $x = -1$	(а) $x = 1$	(б) $x = -1$	(б) $x = 1$	(в) $x = -1$	(в) $x = 1$
0,997	0,998	0,995	0,932	0,999	0,913

6. Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений

Для численного расчета коэффициентов интенсивности напряжений используются асимптотические формулы:

$$\begin{aligned}
 u_z &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right), \\
 u_x &= \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right), \\
 u_y &= \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

В нашем случае $\theta = \pi$. При вычислении получаются точки, которые наносятся на график и приближаются функцией $u_i = B_i \sqrt{L-x}$, где коэффициенты B_i определяются при помощи метода наименьших квадратов. Приравнявая в формулах левые и правые части, получим уравнения на K_I , K_{II} , K_{III} .

7. Результаты расчетов при разных углах между трещинами

Ниже приведены результаты расчётов КИН для двух круглых дискообразных трещин при наличии угла между их плоскостями. Основная трещина располагалась в плоскости $z = 0$ с центром в начале координат и радиусом $R_1 = 1$ м. Вторая трещина имеет радиус $R = 0,5$ м и располагалась под различными углами к первой, при этом расстояние между краем первой трещины и центром второй сохранялось неизменным и равным $0,6$ м. Графическое изображение трещин представлено на рис. 5. Коэффициенты интенсивности вычислялись для первой трещины в сечении $y = 0$.

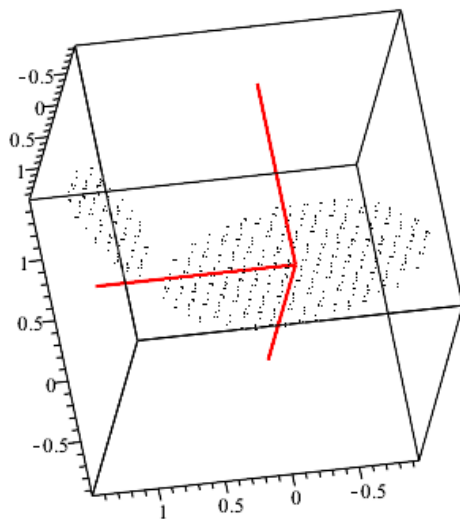


Рис. 5. Расположение трещин в пространстве

На графиках представлена зависимость различных КИН от угла между трещинами.

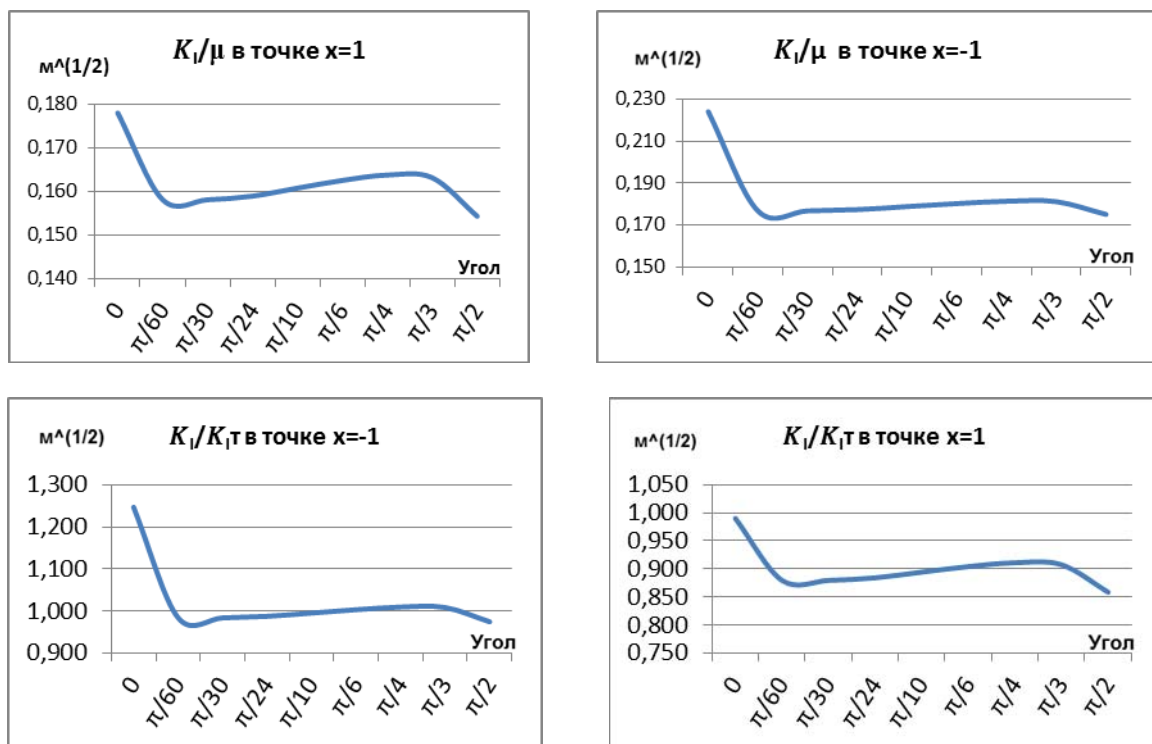
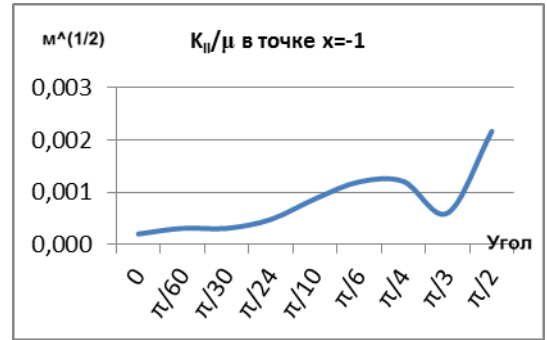
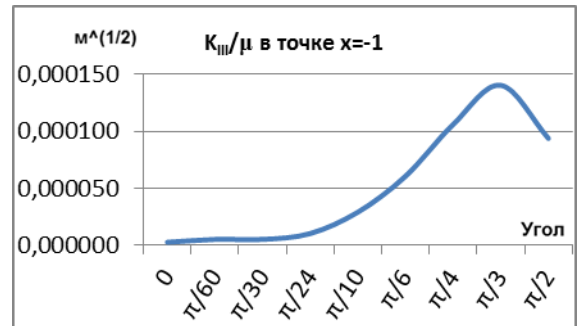
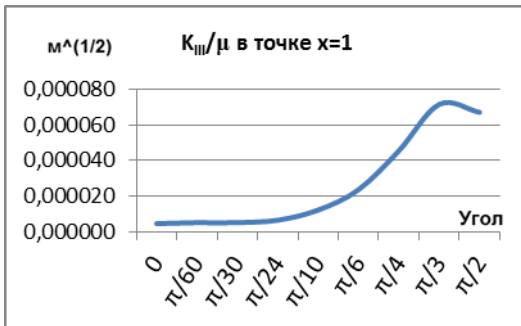


Рис. 6. Зависимость коэффициента K_I от угла между трещинами

Рис. 7. Зависимость коэффициента K_{II} от угла между трещинами

Вблизи малой трещины самое большое значение K_{II} достигается при угле $\frac{\pi}{3}$. При малых углах K_{II} мал. В отдалении от малой трещины K_{II} мал при малых углах, а также имеет локальный минимум при угле $\frac{\pi}{3}$ и локальный максимум при углах $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{6}$.

Рис. 8. Зависимость коэффициента K_{III} от угла между трещинами

Вблизи и в отдалении от малой трещины K_{III} мал при малых углах и достигает локального максимума при угле $\frac{\pi}{3}$.

Одним из критериев разрушения является значение комбинации $K = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2 + K_{III}^2}$. Зависимость представлена на рис. 9.

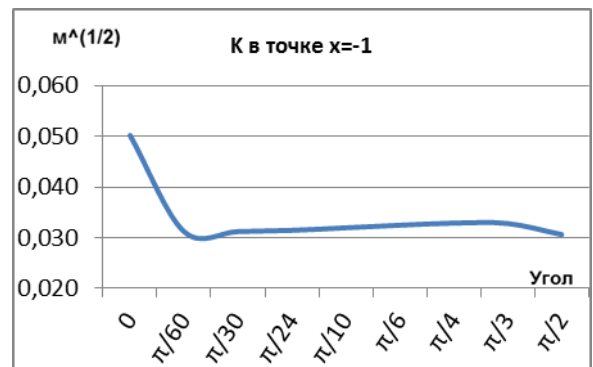
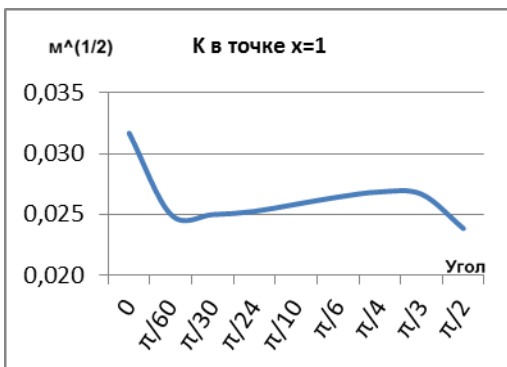


Рис. 9. Зависимость комбинации коэффициентов от угла между трещинами

Значение данной комбинации коэффициентов практически не меняется при изменении угла между трещинами.

8. Выводы

Вычислены коэффициенты интенсивности напряжений в задаче с двумя по-разному ориентированными трещинами.

Показано, что для каждого коэффициента интенсивности существует угол, соответствующий максимуму коэффициента интенсивности.

Показано, что для углов больших 6° , влияние изменения угла мало, и главным образом, определяется расстоянием между трещинами.

(Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-07-00513).

Литература

1. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир, 1987.
2. Алекеидзе М.А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. – М.: Наука 1978.
3. Слепян Л.И.. Механика трещин. – Л.: Судостроение, 1990.
4. Almansi E. Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^{2m}u=0$ // Ann. Mat. – 1899. – (3), 2. – 1-51.
5. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967.
6. Кузьмин Ю.Н. Осесимметричная деформация упругого слоя, содержащего соосные круговые щели // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1972. – № 6. – С. 121-130.
7. Гольдштейн Р.В. Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1979. – № 3. – С. 111-126.
8. Kassir M.K., Sih G.C. External crack in elastic solid // The international Journal of Fracture Mechanics. – 1968. – V. 4, no. 4, – P. 347-356.

NUMERICAL SIMULATION OF THE INTERACTION OF DISK-SHAPED CRACKS IN THREE-DIMENSIONAL ELASTIC SPACE

A. V. Zvagin¹, A. V. Akulich², A. A. Shamina¹

¹Lomonosov Moscow State University, Moscow

²Federal Science Center Scientific Research Institute for System Analysis
Russian Academy of Sciences, Moscow

Explores the problem of mutual influence of three-dimensional disc-shaped cracks located in parallel planes of an elastic medium. The medium is under tensile stress in the direction perpendicular to the crack planes. The cracks are modeled by mathematical cuts of the continuous medium with the possibility of a strong rupture of the displacement field on the banks of the cut. The solution is constructed numerically using the discontinuous displacement method.

Keywords: Three-dimensional space, elastic medium, crack, stress intensity factor, boundary element method, discontinuous displacement method.