

the main tool, in which computer hardware and software is. And it is about the method of digitizing such production processes that will be discussed below.

Key words: digitalization, supercomputer technologists, structuring, automation, production process, intelligent digital environment.

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ЖЁСТКИМ ТЕЛОМ ПЛАСТИНЫ СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

*С. А. Кузнецов¹, С. В. Краснов¹, Я. В. Моренко¹,
Е. В. Сметанина¹, О. В. Старожилова²*

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

²Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара

На основе математически корректной постановки контактной задачи получено решение для лежащей на упругом основании прямоугольной пластины, взаимодействующей с плоским штампом в условиях цилиндрического изгиба. Предполагается, что контакт между пластиной и телом осуществляется только по нормали к поверхности. Задача ставится в рамках уточненной теории пластин Тимошенко с учетом поперечного обжатия в зоне контакта $-a \leq x \leq a$. Проведено систематическое исследование и установлено существенное влияние условий закрепления пластины на распределение контактных напряжений.

Ключевые слова: контактная задача, пластина, поперечный сдвиг, поперечное обжатие.

В работе представлены новые результаты традиционно ведущихся в Казанском федеральном университете исследований закономерностей контактного взаимодействия пластин и оболочек между собой и с жёсткими телами. Ранее, в работе [1] исследовалось влияние краевых условий на амплитудно-частотные характеристики при цилиндрическом изгибе прямоугольной пластины жёстким штампом, в работе [2] изучалось влияние ориентации прямоугольного штампа при контакте с круглой пластиной, а в [3] показано существенное влияние условий закрепления пластины на распределение контактных напряжений. Развитие метода решения интегральных уравнений контактных задач на многосвязные области дано в [4].

Постановка задачи.

Как известно, постановка контактных задач для тонкостенных элементов конструкций на основе классической теории Кирхгофа-Лява приводит к интегральным уравнениям контакта Фредгольма 1-го рода, задача отыскания решения которых является математически некорректной. Эта некорректность проявляется в различных механических противоречиях. Так при изгибе пластины параболическим штампом напряжения под штампом отсутствуют, а на границах они настолько велики, что сосредоточены в двух граничных точках, хотя из простых физических соображений понятно, что при гладкой форме взаимодействующих тел как раз на границе не должно быть нагрузок. Зависимость прижимающей штамп силы P от величины области контакта $2a$ имеет две особые точки: $a = 0$ и $a = L$. В нулевой точке решение даёт конечное значение силы P , т. е. бесконечно малому

приращению длины области контакта $2a$ соответствует конечное приращение прижимающей штамп силы P . А для того, чтобы область контакта распространилась на всю длину пластины, требуется бесконечно большое значение силы P .

Учет в области контакта сжимаемости нормали к срединной поверхности позволяет получить контактные напряжения, мало отличающиеся от напряжений, вычисляемых по точным уравнениям теории упругости [5]. Согласно математически корректной постановке контактных задач для тонкостенных элементов конструкций на основе теории Кирхгофа-Лява с учетом местного обжатия, условия контакта поверхности тела и пластины записываются [6] в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$k_0\sigma(x) + \int_{-a}^a G(x, \xi)\sigma(\xi)d\xi = \alpha - f(x), \quad b \leq x \leq c, \quad (1)$$

где $k_0 = h(1 + \nu)(1 - 2\nu) / (2E(1 - \nu))$ – коэффициент обжатия, $\sigma(x)$ – неизвестное контактное давление, $f(x)$ – функция формы подошвы штампа, α – жесткое смещение штампа (штамп движется поступательно, без поворота). Точно такой же вид имеет и условие контакта при решении задачи на основе уточнённой теории оболочек с учётом поперечного сдвига. Отличие заключается в том, что функция влияния $G(x, \xi)$, являющаяся прогибом пластинки под действием сосредоточенной силы, приложенной в произвольной точке $-L < \xi < L$, L – полуширина пластины, должна быть найдена из уравнения

$$G^{IV}(x, \xi) + 4\lambda^4 G(x, \xi) = \delta(x - \xi) / D - \delta''(x - \xi) / K \quad (2)$$

при соответствующих граничных условиях. Здесь $\delta(x - \xi)$ – δ -функция Дирака, D – цилиндрическая жёсткость пластины, $K = 5 Gh / 6$ – жёсткость на сдвиг, $4\lambda^4 = k_0 / D$.

Связь между прижимающей штамп силой и жёстким смещением штампа выражается очевидным условием статического равновесия штампа

$$P = \int_{-a}^a \sigma(x) dx. \quad (3)$$

Метод решения.

Для решения уравнения (1) применим разработанный ранее в Казанском университете Ю. П. Артюхиным метод сведения интегрального уравнения контактных задач к краевой задаче для вспомогательной функции, связанной с искомым контактным давлением простым дифференциальным соотношением.

Суть метода заключается [7] в следующем. Пусть функция влияния удовлетворяет некоторому уравнению

$$LG(x, \xi) = L_1\delta(x - \xi),$$

вид дифференциальных в общем случае операторов определяется теорией оболочек, используемой в каждом конкретном случае.

Поддействуем оператором L на уравнение (1)

$$k_0L\sigma(x) + \int_{-a}^a LG(x, \xi)\sigma(\xi)d\xi = L(\alpha - f(x)). \quad (4)$$

Используя фильтрующие свойства δ -функции приведём (4) к виду

$$k_0L\sigma(x) + L_1\sigma(x) = L(\alpha - f(x)). \quad (5)$$

Введём новую неизвестную функцию

$$L_1U(x) = \alpha - f(x) - k_0\sigma(x). \quad (6)$$

Тогда $L_1\sigma(x) = LL_1U(x)$. Отсюда

$$\sigma(x) = LU(x). \quad (7)$$

Подставим полученное соотношение в уравнение (5)

$$k_0LLU(x) + L_1LU(x) = L(\alpha - f(x)).$$

И, окончательно, получим дифференциальное уравнение для $U(x)$

$$(k_0L + L_1)U(x) = \alpha - f(x). \quad (8)$$

Подставляя (7) и (6) в (1), имеем

$$\int_{-a}^a G(x, \xi)LU(\xi)d\xi = L_1U(x).$$

Здесь оператор L берётся по переменной интегрирования ξ . Применяя обобщенное интегрирование по частям, получим

$$\int_{-a}^a LG(x, \xi)U(\xi)d\xi + \Psi(G, U)\Big|_{\xi=-a}^{\xi=a} = L_1U(x),$$

где $\Psi(G, U)$ – дифференциальное выражение, конкретный вид которого определяется оператором L .

Функция влияния в контактных задачах симметрична по переменным x и ξ . Поэтому интеграл в левой части тождественно равен $L_1U(x)$ и у нас остаётся краевое условие для $U(x)$

$$\Psi(G, U)\Big|_{\xi=-a}^{\xi=a} = 0. \quad (9)$$

Таким образом, проблема решения интегрального уравнения (1) сведена к решению краевой задачи (8), (9).

В нашем случае, т. е. при $L = d^4 / dx^4 + 4\lambda^4$

$$\Psi(G, U) = G(x, \xi)U'''(\xi) - G'_\xi(x, \xi)U''(\xi) + G''_{\xi\xi}(x, \xi)U'(\xi) - G'''_{\xi\xi\xi}(x, \xi)U(\xi).$$

Реализация метода.

Не останавливаясь подробно на процессе построения функции влияния, отметим, что в настоящей работе представлены результаты решения контактной задачи при трёх различных вариантах закрепления пластины:

1) оба края жёстко защемлены

$$G(\pm L, \xi) = G'_x(\pm L, \xi) = 0,$$

2) оба края шарнирно опёрты

$$G(\pm L, \xi) = G''_{xx}(\pm L, \xi) = 0,$$

3) оба края свободны

$$G(\pm L, \xi) = G'_x(L, \xi) = G''_{xx}(-L, \xi) = 0.$$

Ограниченный объём статьи не позволяет привести выражения для функций влияния полностью, поэтому ограничимся представлением структуры выражений

$$G(x, \xi) = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 C_{ki} Y_i(\lambda\xi) Y_k(\lambda x) + \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 B_{ki} Y_i(\lambda\xi) Y_k(\lambda x) H(x - \xi),$$

где $H(x - \xi)$ – единичная функция Хэвисайда, конкретный вид C_{ki} определяется граничными условиями, $Y_k(x)$ – балочные функции Крылова:

$$Y_1(x) = \operatorname{ch} x \cos x, \quad Y_2(x) = \operatorname{sh} x \sin x, \quad Y_3(x) = \operatorname{sh} x \cos x, \quad Y_4(x) = \operatorname{ch} x \sin x.$$

В случае плоского штампа $f(x) = 0$ и общее решение уравнения (8) имеет вид

$$U(x) = \sum_{k=1}^4 A_k V_k(x) + \alpha / k_0,$$

$V_1(x) = \operatorname{ch} a_1 x \cos a_2 x$, $V_2(x) = \operatorname{sh} a_1 x \sin a_2 x$, $V_3(x) = \operatorname{sh} a_1 x \cos a_2 x$, $V_4(x) = \operatorname{ch} a_1 x \sin a_2 x$ a_1, a_2 – действительная и мнимая части корней характеристического уравнения, соответствующего уравнению (8).

Подставляя $U(\xi)$ и $G(x, \xi)$ в условие (9), приведём его к виду

$$\sum_{k=1}^4 F_k(A_1, A_2, A_3, A_4, a) Y_k(x) = 0.$$

Так как это соотношение должно выполняться при любом $x \in (-a, a)$, то коэффициенты при $Y_k(x)$ должны равняться нулю. Таким образом, произвольные постоянные A_1, \dots, A_4 есть решение системы линейных алгебраических уравнений

$$F_k(A_1, A_2, A_3, A_4, a) = 0, \quad k = \overline{1, 4}$$

и может быть выписано в замкнутом виде. Конкретные выражения здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

Численные результаты

Далее представлены некоторые результаты расчётов относительного контактного давления $\sigma_0(x) = \sigma(x)/P$ в зависимости от x/L для пластины $L = 1$ различной толщины h при разных размерах штампа. В силу симметрии задачи графики построены только для правой половины штампа $0 \leq x \leq a$. Числами отмечены результаты, соответствующие различным относительным размерам штампа: $a/L = 0,1; 0,25; 0,5; 0,75; 0,9$. На рис. 1 и 2 показаны результаты для жёсткого защемления, на рис. 3 и 4 – для шарнирного опирания, на рис. 5 и 6 – для свободного края. Рис. 1, 3, 5 иллюстрируют распределение относительного контактного давления для тонких пластин $h = 0,1L$, рис. 2, 4, 6 – для пластин средней толщины $h = 0,5L$.

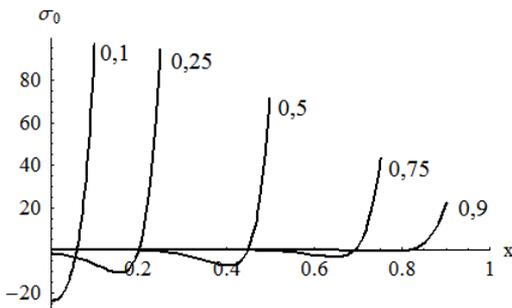


Рис. 1. $\sigma_0(x)$ при $h = 0,1$

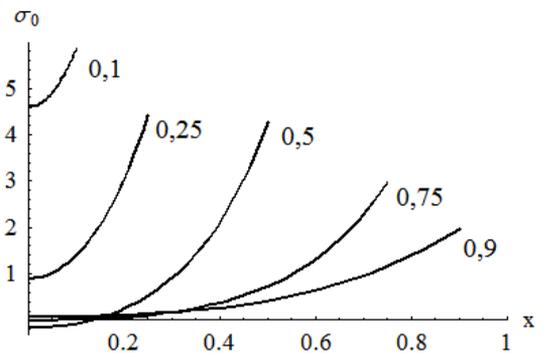


Рис. 2. $\sigma_0(x)$ при $h = 0,5$

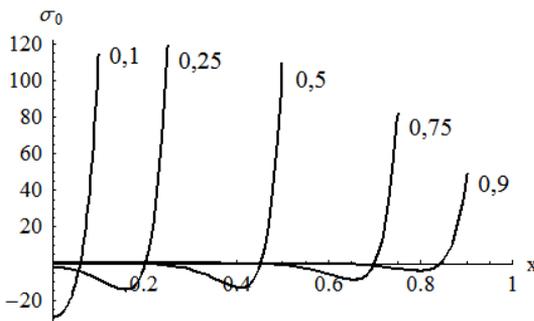


Рис. 3. $\sigma_0(x)$ при $h = 0,1$

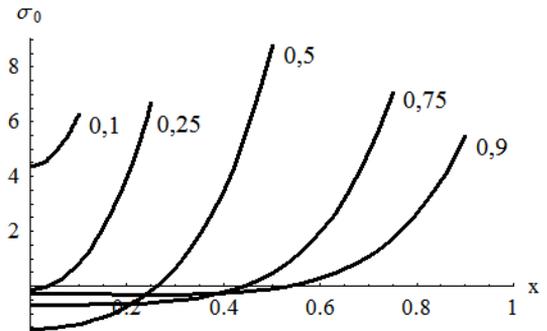


Рис. 4. $\sigma_0(x)$ при $h = 0,5$

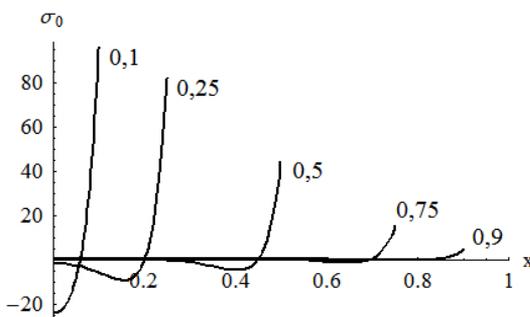


Рис. 5. $\sigma_0(x)$ при $h = 0,1$

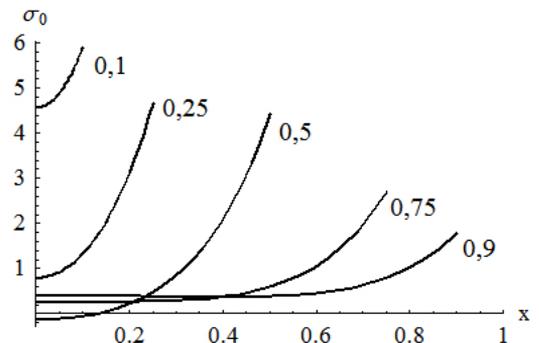


Рис. 6. $\sigma_0(x)$ при $h = 0,5$

Хорошо виден различный характер распределения контактных напряжений при разной толщине пластин. Для тонких пластин результаты совпадают с полученными ранее решениями на основе теории Кирхгофа-Лява. Для пластин средней толщины при малых областях контакта напряжения только положительные, в отличие от тонких пластин. При увеличении размера штампа в центральной зоне области контакта появляются отрицательные напряжения, то есть в случае одностороннего взаимодействия в этой зоне будет происходить отрыв поверхности пластины от штампа. Размер этих зон зависит от условий закрепления краёв пластины.

Заключение

Получено аналитическое решение контактной задачи о взаимодействии пластины с плоским штампом с учётом деформаций поперечного сдвига. Анализ численных результатов показал существенную зависимость распределения контактных напряжений от толщины пластин и условий закрепления пластины, не только для больших относительных размеров штампа, но и для малых, при значительном удалении границ области контакта от краёв пластины.

Результаты исследования могут быть использованы при верификации алгоритмов и программ численного решения задач контактного взаимодействия.

Литература

1. Кузнецов С. А., Точкасова М. А. Исследование влияния краевых условий на амплитудно-частотные характеристики прямоугольной пластины с жестким штампом при цилиндрическом изгибе // II Международная конференция «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела»: сб. науч. тр. – Казань: Казанский государственный университет, 2009. – С. 394 – 396.
2. Егоров Д. Л., Кузнецов С. А. Влияние ориентации прямоугольного штампа при контакте с круглой пластиной // XII Международный семинар «Супервычисления и математическое моделирование»: сб. докл. Саров, 11–15 октября, 2010. – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2011. – С. 173 – 181.
3. Кузнецов С. А., Зиганшина Г. Г., Лотфуллина Э. Р., Старожилова О. В., Хусаинова А. Н. Влияние граничных условий на распределение контактных напряжений при взаимодействии пластин с жёсткими телами // XV Международная конференция «Супервычисления и математическое моделирование»: сб. науч. тр. / под ред. Р. М. Шагалиева. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2015. – С. 279 – 282.
4. Кузнецов С.А. Об одном методе решения многосвязных контактных задач теории пластин и оболочек // II Международная научно–практическая конференция «Научные исследования: от теории к практике»: сб. науч. тр. / редкол.: О. Н. Широков [и др.]. – Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2015.
5. Карасев С. Н., Артюхин Ю. П. Влияние поперечного сдвига и обжатия на распределение контактных напряжений // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1976. – № 12. – С. 68 – 76.
6. Кузнецов С. А. Неосесимметричная контактная задача для тонкой пластины, лежащей на упругом основании, при наличии износа // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1984. – № 17, Ч. II. – С. 96 – 103.
7. Артюхин Ю. П. Одномерные контактные задачи для тонкостенных трансверсально-изотропных элементов // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1978. – № 13. – С. 62 – 82.

CONTACT PROBLEM OF INTERACTION BETWEEN A MEDIUM-THICKNESS PLATE LYING ON AN ELASTIC BASE AND A RIGID BODY

*S. A. Kuznetsov*¹, *S. V. Krasnov*¹, *Y. V. Morenko*¹, *E. V. Smetanina*¹,
*O. V. Starozhilova*²

¹Kazan Federal University, Kazan

²Volga state University of Telecommunications and Informatics, Samara

Based on a mathematically correct formulation of the contact problem, we obtain a solution for a rectangular plate lying on an elastic base interacting with a flat stamp under cylindrical bending conditions. We assume that the contact between the plate and the body occurs only in the normal direction to the surface. The problem is posed within the framework of the refined theory of Tymoshenko plates taking into account the transverse compression in the contact zone. In the course of a systematic research, we found that the plate thickness and fixation conditions exert a significant effect on the distribution of contact stresses.

Keywords: Contact problem, plate, transverse shear, transverse compression.

УДК 519.6

РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ЛУЧИСТОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ SPH

A. A. Лазарев, С. Н. Полищук

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров

Работа посвящена программной реализации и распараллеливанию вычислений численного решения уравнения лучистой теплопроводности методом сглаженных частиц (SPH). Распараллеливание вычислений выполнено с использованием смешанной модели: на верхнем уровне реализуется распараллеливание по MPI-процессам на распределенной памяти с использованием интерфейса MPI, на нижнем уровне – распараллеливание по OMP-потокам внутри MPI-процесса на общей памяти с использованием стандарта OpenMP. На примере тестовой задачи распространения излучения от постоянно действующего источника проведена оценка показателей эффективности распараллеливания при использовании различных предоблавателей (метод блочного Якоби и алгебраический многосеточный метод селективного типа) для решения СЛАУ.

Ключевые слова: метод сглаженных частиц (метод SPH), лучистая теплопроводность, неявная схема, смешанная модель распараллеливания MPI + OpenMP, эффективность распараллеливания.

Введение

Метод сглаженных частиц (метод SPH) [1, 2] является бессеточным лагранжевым методом, развитие которого в первую очередь связано с численным моделированием астрофизических про-