

## Литература

1. Олесницкая К. К., Антипин И. А., Петрова М. А. Библиотека ЕФР как средство эффективного доступа к файловым данным на гибридных вычислительных системах и суперкомпьютерах // XV Международная конференция «Супервычисления и математическое моделирование»: сб. докл. Саров, 13-17 октября, 2014. С. 246 – 354.

2. Олесницкая К. К., Антипин И. А., Петрова М. А. EFR-Tools как средство модификации, верификации и валидации расчетных данных единого файлового разреза // XV Международная конференция «Супервычисления и математическое моделирование»: сб. докл. Саров, 13 – 17 октября, 2014. С. 355 – 367.

### NEW POSSIBILITIES OF EFR-TOOLS PROGRAM FOR MODIFICATION, VERIFICATION AND VALIDATION OF COMPUTATIONAL DATA OF THE UNIFIED FILE CUTSET

*M. A. Petrova, K. K. Olesnitskaya, I. A. Antipin*

Russian Federal Nuclear Center –  
All-Russian Research Institute of Experimental Physics, Sarov

This paper is devoted to the description EFR-tools software product Version 1.6.3 that provides a possibility to view, edit, analyze and process the calculation data of the unified file cutset (transliterated as EFR).

*Key words:* EFR, EFR library, EFR-Tools, data scanning, data modification, data verification, data validation.

УДК 550.83:550.8.05:517.955.8

### РЕКОНСТРУКЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ ГЛУБИННЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ЗЕМНОЙ СРЕДЫ ПО СЕЙСМИЧЕСКИМ ДАННЫМ («СЕЙСМИЧЕСКАЯ МИГРАЦИЯ»)

*А. Л. Плешкевич<sup>1</sup>, Д. М. Вишневский<sup>2</sup>, А. В. Иванов<sup>3</sup>, В. Д. Левченко<sup>3</sup>,  
В. В. Лисица<sup>2</sup>, Б. П. Мороз<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>АО «Центральная геофизическая экспедиция», «Росгеология», Москва

<sup>2</sup>Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, Новосибирск

<sup>3</sup>Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва

Рассмотрены математическая постановка и численные методы решения важнейшей прикладной задачи реконструкции 3D сейсмического изображения глубинных неоднородностей земной среды при разведке месторождений нефти и газа. Исходными данными являются результаты регистрации на дневной поверхности отраженных и рассеянных на глубинных неоднородностях сейсмических волн, возбуждаемых точечными источниками колебаний типа взрывов в мелких скважи-

нах. Методика наблюдений по системе многократных перекрытий предполагает использование порядка  $10^4$ - $10^5$  отдельных точечных источников колебаний, расположенных в узлах регулярной сети на дневной поверхности, и сходного числа приемников, выполняющих регистрацию сейсмических волн в 6-секундном интервале от момента каждого взрыва. Полный объем исходных цифровых сейсмических данных составляет от  $10^2$  ГБт до  $10^4$  ГБт. Представлен общий вид решения задачи миграции на основе обращенного волнового продолжения в виде 5-кратного интеграла по переменным координатам источников, приемников и временной частоте от произведения функций наблюдаемого поля отраженных/рассеянных волн и нормальных производных 3-D функций Грина. Рассмотрены экономичные методы решения задачи волнового продолжения на основе асимптотического многолучевого приближения, а также псевдоспектральной схемы решения «одностороннего» волнового уравнения. Приведены примеры результатов расчетов сейсмической миграции по комплектам реальных сейсмических данных, выполненных на вычислительных кластерах «Ломоносов-2» (МГУ им. М.В. Ломоносова) и РФЯЦ-ВНИИЭФ (г. Саров).

*Ключевые слова:* функция Грина, многолучевое асимптотическое приближение, псевдоспектральная схема, глубинная сейсмическая миграция.

## 1. Базовая формула сейсмической миграции на основе обращенного волнового продолжения

Реконструкция изображения глубинных неоднородностей земной среды по наблюдаемым на дневной поверхности сейсмическим данным является одной из важнейших прикладных задач в ходе геологоразведочных работ при поиске месторождений нефти и газа. Исходными данными для решения этой задачи, которую традиционно называют «сейсмической миграцией», являются результаты регистрации рассеянных и отраженных от глубинных неоднородностей сейсмических волн, возбуждаемых расположенными близ дневной поверхности точечными источниками колебаний типа взрывов в мелких скважинах. Сейсмические наблюдения проводят по специально спроектированной системе, называемой системой многократных перекрытий. Система многократных перекрытий предполагает наблюдение отраженных и рассеянных сейсмических волн от одних и тех же глубинных объектов для множества различных пар источники/приемники сейсмических колебаний, расположенных на дневной поверхности в узлах регулярной сетки. Формализуем сказанное.

Рассмотрим скалярный волновой процесс. Пусть единичное сейсмическое наблюдение соответствует решению задачи Коши в неоднородном полупространстве  $z > 0$  для волнового уравнения с нулевыми начальными условиями и правой частью, соответствующей мгновенному точечному источнику зондирующих волн, расположенному в произвольной точке  $\mathbf{s} = (x_s, y_s, 0)$  дневной поверхности  $z_s = 0$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) &= \rho u_{tt}'' - 4\pi \delta(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}), \\ u(\mathbf{r}, t)|_{t=0} &= u_t'(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k = k(\mathbf{r})$  и  $\rho = \rho(\mathbf{r})$  – заданные параметры среды, определяющие локальную скорость распространения колебаний  $v(\mathbf{r}) = \sqrt{k(\mathbf{r}) / \rho(\mathbf{r})}$ . В результате воздействия источника зондирующих волн на глубинных неоднородностях земной среды  $z > 0$  возникают отраженные и рассеянные волны, которые в ходе сейсмического эксперимента фиксируются расположенными на дневной поверхности приемниками  $\mathbf{g} = (x_g, y_g, 0)$ . Интервал времени наблюдений  $0 \leq t \leq T$  условимся отсчитывать от момента  $t = 0$  возбуждения колебаний каждым отдельным импульсным источником («отметка момента») вплоть до заданного конечного времени регистрации  $T$ , которое составляет, обычно, 6 с. Будем описывать полную совокупность результатов регистрации сейсмического волнового поля для произвольных расположенных на дневной поверхности источников и приемников функцией  $u_0 = u_0(\mathbf{s}, \mathbf{g}, t)$ , дис-

кретную выборку которой представляет собой исходный комплект наблюдаемых сейсмических данных многократных перекрытий. Введем новую функцию семи независимых переменных:

$$u = u(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_g, t), \quad (2)$$

описывающую результаты регистрации волн произвольно расположенными в полупространстве  $z > 0$  приемниками в точках  $\mathbf{r}_g = (x_g, y_g, z_g)$  от импульсных источников фиксированной силы в произвольных точках  $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s, z_s)$ . В соответствии с введенными обозначениями 4-мерная по пространственным переменным функция  $u_0 = u_0(\mathbf{s}, \mathbf{g}, t) = u(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_g, t)|_{z_s=z_g=0}$ , описывающая совокупность

наблюдаемых сейсмических данных многократных перекрытий, представляет собой граничное условие Дирихле для 6-мерной по пространственным переменным функции (2). Получим интегральное выражение, позволяющее на основе заданного граничного условия  $u_0 = u_0(\mathbf{s}, \mathbf{g}, t)$  восстановить функцию  $u = u(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_g, t)$ . Поскольку нас интересует задача обращенного волнового продолжения [1] и связанная с ней сейсмическая миграция, введем обращенное время  $\tilde{t} = T - t$  и запишем в системе координат обращенного времени упомянутые функции  $u_0(\mathbf{s}, \mathbf{g}, t) = u_0(\mathbf{s}, \mathbf{g}, T - \tilde{t}) = \tilde{u}_0(\mathbf{s}, \mathbf{g}, \tilde{t})$  и, аналогично,  $\tilde{u} = \tilde{u}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_g, \tilde{t})$ . Для упрощения выкладок перейдем далее в частотную область, выполнив преобразование Фурье по обращенному времени функции  $\tilde{u}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_g, \tilde{t})$ , используя для ее фурье-образа сходное обозначение  $\tilde{u}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_g; \omega)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_g; \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int \tilde{u}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_g, \tilde{t}) e^{-i\omega\tilde{t}} d\tilde{t} = \frac{1}{2\pi} \int u(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_g, t) e^{-i\omega(T-t)} dt = e^{-i\omega T} u^*(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_g; \omega), \\ \tilde{u}_0(\mathbf{s}, \mathbf{g}; \omega) &= \tilde{u}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_g; \omega)|_{z_s=z_g=0}, \end{aligned}$$

где \* – знак комплексного сопряжения. Зафиксируем произвольный источник  $\mathbf{s}$ . Используя наблюдаемую функцию  $\tilde{u}_0 = \tilde{u}_0(\mathbf{s}, \mathbf{g}; \omega)$  в качестве заданного граничного условия применим известную интегральную формулу волнового продолжения граничного условия Дирихле [2, 3] и получим следующий результат обращенного волнового продолжения в полупространство  $z_g > 0$ :

$$\tilde{u}(\mathbf{s}, \mathbf{r}_g; \omega) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_g} \tilde{u}_0(\mathbf{s}, \mathbf{g}; \omega) k(\mathbf{g}) \frac{\partial G(\mathbf{g} | \mathbf{r}_g; \omega)}{\partial \mathbf{n}_g} d\mathbf{g}, \quad (3)$$

где  $d\mathbf{g}$  – элемент площади интегрирования;  $G(\mathbf{g} | \mathbf{r}_g; \omega)$  – функция Грина, связанная с расположенным в точке  $\mathbf{r}_g$  источником;  $\mathbf{n}_g$  – внешняя нормаль к поверхности наблюдений  $S_g$ . Полученное интегральное выражение представляет собой результат восстановления в произвольной точке  $\mathbf{r}_g$  полупространства  $z_g > 0$  волнового поля по его измеренным значениям на поверхности наблюдений  $S_g$  для произвольного сейсмического источника в точке  $\mathbf{s}$ . Для точечных источников фиксированной силы из соотношения взаимности следует  $\tilde{u}_0(\mathbf{s}, \mathbf{g}; \omega) = \tilde{u}_0(\mathbf{g}, \mathbf{s}; \omega)$ , а также  $\tilde{u}(\mathbf{s}, \mathbf{r}_g; \omega) = \tilde{u}(\mathbf{r}_g, \mathbf{s}; \omega)$  [2, 4].

Зафиксируем точку  $\mathbf{r}_g$  и рассмотрим продолженное волновое поле  $\tilde{u}(\mathbf{s}, \mathbf{r}_g; \omega)$  как функцию координат произвольного источника  $\mathbf{s}$ . На основании соотношения взаимности можно трактовать полученное выражение (3) при фиксированном  $\mathbf{r}_g$  как известное граничное условие – функцию координат источников  $\mathbf{s}$  для фиксированного приемника  $\mathbf{r}_g$ . Это позволяет продолжить указанное граничное условие в нижнее полупространство  $z_s > 0$ . Повторно применяя интегральную формулу типа (3) для переменных  $\mathbf{s}$  и фиксированного  $\mathbf{r}_g$  получим искомое интегральное выражение для продолженного поля  $\tilde{u}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_g; \omega)$  исходных данных многократных перекрытий  $\tilde{u}_0(\mathbf{s}, \mathbf{g}; \omega)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_g; \omega) &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_s} \tilde{u}(\mathbf{s}, \mathbf{r}_g; \omega) k(\mathbf{s}) \frac{\partial G(\mathbf{s} | \mathbf{r}_s; \omega)}{\partial \mathbf{n}_s} d\mathbf{s} = \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \iint_{S_s} \iint_{S_g} \tilde{u}_0(\mathbf{s}, \mathbf{g}; \omega) k(\mathbf{g}) k(\mathbf{s}) \frac{\partial G(\mathbf{s} | \mathbf{r}_s; \omega)}{\partial \mathbf{n}_s} \frac{\partial G(\mathbf{g} | \mathbf{r}_g; \omega)}{\partial \mathbf{n}_g} d\mathbf{g} d\mathbf{s}. \end{aligned} \quad (4)$$

Полученное интегральное выражение (4) позволяет выполнять пересчет исходных сейсмических данных многократных перекрытий в нижнее полупространство  $z > 0$  с поверхности наблюдений  $z = 0$  на произвольный фиксированный уровень  $z = const$ . На фиксированном глубинном уровне  $z = const$  сейсмическое изображение может быть построено следующим образом. Пусть исходное сейсмическое волновое поле  $u_0(\mathbf{s}, \mathbf{g}, t)$  представляет собой результат регистрации отраженных и рассеянных волн с элиминированной интенсивной прямой волной. В этом случае пара совмещенных источника с приемником регистрирует ненулевой сигнал отраженной или рассеянной волны в нулевой момент прямого физического времени  $t = 0$  в том и только том случае, если эти источник и приемник будут располагаться непосредственно на поверхности отражателя или рассеивателя. Из физических соображений ясно, что для калиброванных источников и приемников амплитуда зарегистрированного сейсмического сигнала будет при этом пропорциональна локальному коэффициенту отражения. Сказанное позволяет записать сейсмическое изображение  $f(\mathbf{r})$  в виде сечения продолженного поля (4), взятого в нулевой момент прямого физического времени  $t = 0$ , что соответствует  $\tilde{t} = T$ , в глубинных точках  $\mathbf{r}$  изучаемой неоднородной среды для совмещенных источников и приемников  $\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_g = \mathbf{r}$ :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int e^{i\omega T} d\omega \iint_{S_s} \iint_{S_g} \tilde{u}_0(\mathbf{s}, \mathbf{g}; \omega) k(\mathbf{g}) k(\mathbf{s}) \frac{\partial G(\mathbf{s} | \mathbf{r}; \omega)}{\partial \mathbf{n}_s} \frac{\partial G(\mathbf{g} | \mathbf{r}; \omega)}{\partial \mathbf{n}_g} d\mathbf{g} d\mathbf{s} = \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int d\omega \iint_{S_s} \iint_{S_g} u_0^*(\mathbf{s}, \mathbf{g}; \omega) k(\mathbf{g}) k(\mathbf{s}) \frac{\partial G(\mathbf{s} | \mathbf{r}; \omega)}{\partial \mathbf{n}_s} \frac{\partial G(\mathbf{g} | \mathbf{r}; \omega)}{\partial \mathbf{n}_g} d\mathbf{g} d\mathbf{s}. \end{aligned} \quad (5)$$

Особенности получаемого решения (5) при различных вариантах выбора параметра  $k = k(\mathbf{r})$  для фиксированной скоростной модели среды  $v = v(\mathbf{r})$  рассмотрены в работе [4]. Применительно к решению задачи сейсмической миграции целесообразно использовать  $k(\mathbf{r}) = cv(\mathbf{r})$  и, соответственно,  $\rho(\mathbf{r}) = c/v(\mathbf{r})$ , где  $c$  – произвольная размерная постоянная, отвечающие модели неоднородной среды с постоянной акустической жесткостью. Подбор сглаженной опорной скоростной модели среды, необходимой для выполнения сейсмической миграции, представляет собой отдельную неформальную задачу, связанную с технологией интерпретации результатов миграции опытным геологом-геофизиком. В ходе итеративного уточнения опорной скоростной модели среды анализируются промежуточные результаты миграции для оценки качества фокусировки сейсмических волн, на основе которой корректируются локальные величины скоростей с учетом скважинных данных.

## 2. Асимптотическое решение задачи волнового продолжения в лучевой параметрической системе координат и многолучевая миграция

Традиционные асимптотические методы решения задачи сейсмической миграции до суммирования используют фронты волн первых вступлений функций Грина. Это ограничение предполагает, что из произвольного точечного источника в произвольную точку среды попадает один единственный луч, соответствующий кратчайшему времени прихода. В неоднородных сложно-построенных средах это предположение не выполняется и часты случаи многолучевого распространения, когда в глубинную точку может прийти сразу несколько лучей из одного источника. С многолучевым распространением связана сложная конфигурация фронтов волн, образующих складки. В местах складок, отвечающих каустикам волн, происходит их фокусировка, схлопывание лучевых трубок и связанные с этим сингулярности, которым формально отвечают решения с неограниченными лучевыми амплитудами [5, 6]. Помимо этого, с каустиками связаны изменения формы волны. Поскольку значительная доля энергии волн может находиться за первыми вступлениями, их отбрасывание может негативно сказаться на качестве получаемого в ходе миграции сейсмического изображения неоднородной земной среды. В настоящее время широко известны два асимптотических метода решения при наличии многолучевого распространения и каустик: метод канонического оператора Маслова [6], а также метод суммирования Гауссовых пучков [7–10]. Применение метода Маслова в численных

реализациях осложнено отсутствием для него схем сквозного счета. Выполненные исследования позволили предложить удобный альтернативный метод асимптотического решения и основанную на нем сейсмическую миграцию, к рассмотрению которых перейдем.

В случае многозначности эйконала и присутствия каустик будем искать формальное асимптотическое приближение функции Грина в виде [3, 11]:

$$G(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*; \omega) \approx \sum_m |A_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)| e^{i\omega\tau_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)} e^{iInd_m \operatorname{sgn} \omega\pi/2},$$

где  $|A_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)| e^{i\omega\tau_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)} e^{iInd_m \operatorname{sgn} \omega\pi/2}$  – одно из слагаемых лучевой функции Грина, относящееся к непрерывному участку фронта волны – «лепестку» с номером  $m$ , связанному с пучком лучей, исходящих из глубинной точки  $\mathbf{r}_*$ , с фиксированной величиной накопленного индекса  $Ind_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)$ . Величина накопленного индекса  $Ind_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)$  отвечает полному числу обращений в ноль якобиана

$J(\mathbf{r}(\tau, \varphi, \theta) | \mathbf{r}_*) = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right)$  (с учетом кратности корня) вдоль соответствующей лучевой трубки

[5];  $A_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)$  представляет собой лучевую амплитуду  $m$  – лепестка в точке  $\mathbf{r}_0$  выхода соответствующей лучевой трубки на поверхность наблюдений, имеющую вид [4]:

$$A(\mathbf{r} | \mathbf{r}_*) = \frac{1}{k_*} \left( \frac{v_* \rho_* |\sin \theta|}{v \rho \left[ \frac{J(\mathbf{r} | \mathbf{r}_*)}{v} \right]} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*; \omega)}{\partial \mathbf{n}} &\approx \left( \sum_m i\omega |A_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)| e^{i\omega\tau_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)} e^{iInd_m \operatorname{sgn} \omega\pi/2} \nabla_{\mathbf{r}_0} \tau_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*), \mathbf{n} \right) = \\ &= i\omega \sum_m |A_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)| \frac{\cos \alpha_m}{v(\mathbf{r}_0)} e^{i\omega\tau_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)} e^{iInd_m \operatorname{sgn} \omega\pi/2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\alpha_m$  – угол между направлением выхода луча, принадлежащего  $m$  – лепестку, в точке  $\mathbf{r}_0$  поверхности  $S$  и нормалью  $\mathbf{n}$ . Выполнив подстановку (7) в (3), получим:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}_*; \omega) &\approx -\frac{1}{4\pi} \iint_S u_0 k_0 \sum_m i\omega |A_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)| \frac{\cos \alpha_m}{v(\mathbf{r}_0)} e^{i\omega\tau_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)} e^{iInd_m \operatorname{sgn} \omega\pi/2} d\mathbf{r}_0 \approx \\ &\approx -\frac{1}{4\pi} \sum_m \iint_{S_m} u_0 k_0 i\omega |A_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)| \frac{\cos \alpha_m}{v(\mathbf{r}_0)} e^{i\omega\tau_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)} e^{iInd_m \operatorname{sgn} \omega\pi/2} d\mathbf{r}_0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $d\mathbf{r}_0$  – элемент площади поверхности  $S$ ;  $S_m$  – участок поверхности, связанный с  $m$  – лепестком многозначного эйконала  $\tau_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)$ . Заметим, что входящая в (8) амплитуда  $|A_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)|$  в соответствии с (6) является неограниченной функцией в окрестности каустик. Перейдем в (8) от интегрирования по координатам  $(x_0, y_0)$  поверхности  $S$  к интегрированию по лучевым параметрическим переменным  $(\theta, \varphi)$ , где параметры  $\theta, \varphi$  задают направление (полярный и азимутальный углы) выхода луча из глубинной точки  $\mathbf{r}_*$ . Выполним замену переменных интегрирования вида:

$$\begin{cases} x_0 = x_0(\theta, \varphi) \\ y_0 = y_0(\theta, \varphi) \end{cases}. \quad (9)$$

Заметим, что заданным  $(\theta, \varphi)$  соответствует единственный луч и единственная точка  $(x_0, y_0)$  его выхода на поверхность наблюдений  $S$ . После замены переменных (9) получим в (8):

$$u(\mathbf{r}_*; \omega) = -\frac{i\omega}{4\pi} \iint_{\Omega(\varphi, \theta)} u_0 k_0 \frac{\cos \alpha}{v_0 k_*} \left( \frac{v_* \rho_* |\sin \theta|}{v_0 \rho_0 \left[ \frac{|J_0(\varphi, \theta)|}{v_0} \right]} \right)^{1/2} e^{i(\omega\tau_0(\varphi, \theta) + \text{Ind}(\varphi, \theta) \text{sgn} \omega\pi/2)} \left| \frac{D(x_0, y_0)}{D(\varphi, \theta)} \right| d\varphi d\theta, \quad (10)$$

где  $\Omega(\varphi, \theta)$  – область лучевых параметров, отвечающих всем лучам, выходящим на поверхность наблюдения  $S$ ;  $v_* = v(\mathbf{r}_*)$ ,  $\rho_* = \rho(\mathbf{r}_*)$ ,  $k_* = k(\mathbf{r}_*)$ ,  $\tau_0(\varphi, \theta)$  – время выхода луча с параметрами  $\varphi, \theta$  на поверхность наблюдения  $S$  из точки  $\mathbf{r}_*$ ;  $v_0 = v(\mathbf{r}_0)$ ,  $\rho_0 = \rho(\mathbf{r}_0)$ ;  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\varphi, \theta) = \mathbf{r}(\tau, \varphi, \theta)|_S$  – координаты выхода луча на поверхность наблюдения;  $\alpha = \alpha(\varphi, \theta)$  – угол между направлением луча в точке его выхода на поверхность наблюдений и нормалью;  $J_0(\varphi, \theta) = J(\mathbf{r}(\tau, \varphi, \theta) | \mathbf{r}_*)|_S$  – якобиан в точке выхода лучевой трубки на поверхность наблюдений. Рассмотрим величину модуля якобиана:

$$|J(\mathbf{r}(\tau, \varphi, \theta) | \mathbf{r}_*)| = \left| \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right) \right| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right] \right| = v \left| \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right] \right| = v \frac{\Delta s}{d\varphi d\theta},$$

где  $\Delta s$  – площадь поперечного сечения элементарной лучевой трубки. В точке выхода  $(x_0, y_0)$  лучевой трубки на поверхность наблюдений имеем:

$$\left| \frac{D(x_0, y_0)}{D(\varphi, \theta)} \right| = \frac{|J_0(\varphi, \theta)|}{v_0 \cos \alpha}. \quad (11)$$

После подстановки (11) в (10) получим:

$$u(\mathbf{r}_*; \omega) \approx -\frac{i\omega}{4\pi} \iint_{\Omega(\varphi, \theta)} u_0(\mathbf{r}_0; \omega) \frac{1}{v_0} \left( \frac{k_0}{v_* k_*} \right)^{1/2} |\sin \theta|^{1/2} |J_0(\varphi, \theta)|^{1/2} e^{i(\omega\tau_0(\varphi, \theta) + \text{Ind}(\varphi, \theta) \text{sgn} \omega\pi/2)} d\varphi d\theta, \quad (12)$$

Исключительно ценным свойством (12) является то, что подынтегральное выражение более не содержит особенностей. Далее, умножив левую и правую части (12) на  $e^{i\omega t}$  и выполнив обратное преобразование Фурье, получим решение нестационарной задачи:

$$u(\mathbf{r}_*, t) \approx -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega(\varphi, \theta)} \frac{1}{v_0} \left( \frac{k_0}{v_* k_*} \right)^{1/2} |\sin \theta|^{1/2} |J_0|^{1/2} H^{\text{Ind}(\varphi, \theta)}(u_0)'_t(\mathbf{r}_0, t + \tau_0) d\varphi d\theta, \quad (13)$$

где  $Hu(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} u_F(\omega) e^{i \text{sgn} \omega\pi/2} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)}{t - \xi} d\xi$  – преобразование Гильберта функции  $u$ , где

$u_F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt$ . Свойства этого преобразования и его сеточная аппроксимация требуют

отдельного рассмотрения. Здесь отметим важное свойство его периодичности:

$H^{\text{Ind}} u = \int_{-\infty}^{+\infty} u_F(\omega) e^{i \text{sgn} \omega(\text{Ind}\pi/2)} e^{i\omega t} d\omega = (-1)^{(\text{Ind}-1)/2} Hu$  – для нечетных  $\text{Ind} = 2k + 1, k = 0, 1, 2, \dots$ ;

и  $H^{\text{Ind}} u = (-1)^{\text{Ind}/2} u$  – для четных величин  $\text{Ind} = 2k, k = 0, 1, 2, \dots$ . В заключение приведем более компактную запись основного результата (13), инвариантную относительно используемой системы лучевых параметрических координат:

$$u(\mathbf{r}_*, t) \approx -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega(\varphi, \theta)} \frac{1}{v_0} \left( \frac{k_0}{v_* k_*} \right)^{1/2} \left| \frac{J_0}{|\sin \theta|} \right|^{1/2} H^{\text{Ind}(\varphi, \theta)}(u_0)'_t(\mathbf{r}_0, t + \tau_0) \sin \theta d\varphi d\theta =$$

$$= -\frac{1}{4\pi v_* k_*} \iint_{\Omega} [A(\tau_0, \Omega)]^{-1} H^{\text{Ind}(\varphi, \theta)}(u_0)'_t(\mathbf{r}_0, t + \tau_0) d\Omega, \quad (14)$$

где  $d\Omega = \sin\theta d\varphi d\theta$  – элемент телесного угла, отвечающего элементу площади единичной сферы, окружающей глубинную точку  $\mathbf{r}_*$ ;  $[A(\tau_0, \Omega)]^{-1}$  – обратная величина лучевой амплитуды в точке выхода лучевой трубки на поверхность наблюдений, являющаяся ограниченной функцией.

Используя полученный результат (13) – (14) и общий вид решения задачи миграции данных многократных перекрытий (5), можно сразу записать его асимптотическое приближение:

$$f(\mathbf{r}_*) \approx \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \iint_{\substack{\Omega_s(\varphi_s, \theta_s) \\ \Omega_g(\varphi_g, \theta_g)}} \frac{1}{v_s} \left(\frac{k_s}{v_* k_*}\right)^{1/2} \frac{1}{v_g} \left(\frac{k_g}{v_* k_*}\right)^{1/2} \left|\frac{J_s}{\sin\theta_s}\right|^{1/2} \left|\frac{J_g}{\sin\theta_g}\right|^{1/2} \times \\ \times H^{\text{Ind}(\varphi_s, \theta_s) + \text{Ind}(\varphi_g, \theta_g)}(u_0)''(\mathbf{s}, \mathbf{g}, \tau_s + \tau_g) \sin\theta_s d\theta_s d\varphi_s \sin\theta_g d\theta_g d\varphi_g = \quad (15) \\ = \left(\frac{1}{4\pi v_* k_*}\right)^2 \iint_{\Omega_s \times \Omega_g} [A_s]^{-1} [A_g]^{-1} H^{\text{Ind}(\varphi_s, \theta_s) + \text{Ind}(\varphi_g, \theta_g)}(u_0)''(\mathbf{s}, \mathbf{g}, \tau_s + \tau_g) d\Omega_s d\Omega_g,$$

где  $f(\mathbf{r}_*)$  – искомое сейсмическое изображение в глубинной точке  $\mathbf{r}_*$ ;  $u_0(\mathbf{s}, \mathbf{g}, t)$  – исходные данные многократных перекрытий для источников и приемников с координатами  $(\mathbf{s}, \mathbf{g})$ ;  $\tau_s + \tau_g$  – сумма времен пробега из  $\mathbf{r}_*$  до источников и приемников;  $(\theta_s, \varphi_s)$  и  $(\theta_g, \varphi_g)$  – лучевые параметры, относящиеся к источникам и приемникам соответственно;  $v$  и  $k$  – заданные параметры среды, входящие в волновое уравнение (1);  $\text{Ind}(\varphi_s, \theta_s)$  и  $\text{Ind}(\varphi_g, \theta_g)$  – накопленные индексы лучей, относящиеся к источникам и приемникам;  $H$  – преобразование Гильберта;  $J_s$  и  $J_g$  – якобианы в точках выхода лучевых трубок из  $\mathbf{r}_*$  на поверхность, относящиеся к источникам и приемникам соответственно;  $[A_s]^{-1}$  и  $[A_g]^{-1}$  – обратные величины лучевых амплитуд для источников и приемников;  $\Omega_s$  и  $\Omega_g$  – области телесных углов, относящиеся к источникам и приемникам.

По ряду причин при обработке и интерпретации предпочтение отдается модифицированному результату миграции (15), состоящему в замене  $(u_0)''$  на  $(u_0)'_t$ . Такая замена связана с желаемой формой импульса сигнальной составляющей результатов миграции до суммирования, соответствующая общепринятой, получаемой при стандартной сигнальной обработке и при миграции данных после суммирования. Рекомендуемый выбор модели среды с постоянной акустической жесткостью в ходе миграции отвечает  $k = cv$  – где  $c$  – произвольная размерная постоянная [4].

### 3. Особенности асимптотического решения в декартовых координатах

Следует обратить внимание на тот факт, что исходный вид асимптотического решения задачи (8) в декартовой системе координат, содержащий сингулярную подынтегральную функцию, и полученный на его основе результат (13) – (14) в лучевой параметрической системе координат, не содержащий особенностей, равносильны. Это означает, что (8) содержит интегрируемые особенности и также может использоваться в практических приложениях. Рассмотрим подробнее асимптотическое решение в декартовой системе координат, отвечающее интегрированию заданного граничного условия по координатам поверхности наблюдения. Выполнив обратное преобразование Фурье (8) по времени получим решение задачи волнового продолжения во временной области в декартовой системе координат:

$$u(\mathbf{r}_*, t) \approx -\frac{1}{4\pi} \sum_m \iint_{S_m} k_0 |\tilde{A}_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)| \frac{\cos\alpha_m}{v(\mathbf{r}_0)} H^{\text{Ind}_m}(u_0)'_t(x_0, y_0; t + \tau_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)) dx_0 dy_0, \quad (16)$$

где  $S_m$  –  $m$ -лепесток эйконала  $\tau_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)$ ,  $\text{Ind}_m$  – накопленный индекс. Лучевая амплитуда  $|\tilde{A}_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)|$  в (16) является сингулярной неограниченной функцией в окрестности нулевых значений якобиана.

Рассмотрим типичные случаи поведения якобиана в окрестности каустик на примере прохождения фронта сферической волны через низкоскоростное включение [3].

Как функция координат дневной поверхности якобиан в окрестности своих нулевых значений, в одном случае, плавно изменяется, пересекая нулевые значения и меняя свой знак с «+» на «-», а индекс с «0» на «1». Здесь якобиан может быть локально приближен линейной функцией  $J \approx c_1 \xi$ , где  $c_1 = const$  определяет наклон, а  $\xi$  – координата вдоль направления градиента якобиана. В этом случае связанная с обращением в ноль якобиана сингулярная функция лучевой амплитуды  $|A_m(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_*)|$  имеет на краях «лепестков» интегрируемую особенность типа  $\xi^{-1/2}$  в точке ноль.

В другом случае при смене индекса с «1» на «2» якобиан имеет вертикальную асимптоту в окрестности своих нулевых значений и многозначен. Такое поведение может быть аппроксимировано зависимостью типа  $J^2 \approx c_2^2 \xi$ , которая отвечает интегрируемой особенности лучевой амплитуды типа  $\xi^{-1/4}$  в точке ноль.

Выпишем асимптотическое решение задачи 3-D миграции до суммирования данных многократных перекрытий в декартовой системе координат. Переходя в (15) от интегрирования по телесным углам к интегрированию по поверхности наблюдений, после замены переменных получим формулу:

$$f(\mathbf{r}_*) \approx \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \sum_{m,n} \int_{S_m} \int_{S_n} k_s k_g \frac{\cos(\alpha_s)_m \cos(\alpha_g)_n}{v_s v_g} [A_s]_m [A_g]_n \times \\ \times H^{\text{Ind}_m + \text{Ind}_n} (u_0)'_t(\mathbf{s}, \mathbf{g}; (\tau_s)_m + (\tau_g)_n) ds dg, \quad (17)$$

где  $S_m$  и  $S_n$  – участки площади поверхности, связанные с лепестками  $m, n$  и отвечающими им участкам фронта волны с постоянным индексом для расположенного в  $\mathbf{r}_*$  точечного источника. Суммирование выполняется по всем возможным сочетаниям лепестков для источников и приемников. Как было сказано выше, входящие в подынтегральное выражение лучевые амплитуды  $[A_s]_m$  и  $[A_g]_n$  оказываются в общем случае сингулярными интегрируемыми функциями, имеющими на краях лепестков особенности типа  $\xi^{-1/2}$  или  $\xi^{-1/4}$  в точке ноль. Отметим, что несмотря на очевидные неудобства решения в декартовой системе координат (16) – (17) в сравнении с лучевой параметрической (14) – (15), оно сопряжено с существенно меньшим объемом расчетов пучков лучей и допускает поэтому более экономичную численную реализацию. По этой причине для программной реализации был выбран этот путь.

#### 4. Волновое продолжение на основе псевдоспектрального решения «одностороннего» волнового уравнения

Альтернативой асимптотического решения задачи волнового продолжения и сейсмической миграции является сеточный расчет функций Грина и затем непосредственное использование их в базовом интеграле (5) для получения искомого численного решения. Помимо решения скалярного волнового уравнения вида (1) для расчета функций Грина может также использоваться сеточное решение т. н. «одностороннего» волнового уравнения, к краткому описанию которого мы перейдем.

Односторонние волновые уравнения стали широко известны с начала 1970-х г. прошедшего века благодаря пионерским работам Клаербоута [12] и Газдага [13]. Несмотря на формальные отличия в математической формулировке и методах численной реализации альтернативные подходы обоих авторов имеют общую основу, связанную с понятием глубинной волновой экстраполяции. Последняя допускает возможность пересчета волнового поля с предыдущего глубинного уровня на последующий вдоль оси глубин с помощью решения некоторой корректно поставленной задачи на распространение волн, включая случай распространения монохроматических колебаний.



Считая среду локально однородной и подставляя в однородное волновое уравнение (1) пробное решение в виде плоской гармонической волны  $u(t, \mathbf{r}) = e^{i(\omega t - (\mathbf{k}, \mathbf{r}))}$ , где  $\omega$  – циклическая временная частота,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор,  $t$  – время,  $\mathbf{k}$  – волновой вектор; получим известное дисперсионное соотношение:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = (\omega / v)^2. \quad (18)$$

Гармонические плоские волны произвольной частоты  $\omega$ , удовлетворяющие (18) и распространяющиеся в направлении оси глубин  $OZ$ , имеют вид:  $u(t, \mathbf{r}) = e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$ , где

$$k_z = \text{sgn } \omega \sqrt{(\omega / v)^2 - k_x^2 - k_y^2}. \quad (19)$$

Рассматривая (19) как дисперсионное соотношение одностороннего псевдодифференциального волнового уравнения, можно формально записать его через операторный корень в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \sqrt{\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}} u = 0,$$

либо в частотном представлении:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \sqrt{-\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}} u = 0. \quad (20)$$

С учетом (19) символическая запись (20) фактически означает следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (F_{k_x, k_y}^{-1} i \text{sgn } \omega \sqrt{(\omega / v)^2 - k_x^2 - k_y^2} F_{x, y}) u, \quad (21)$$

где  $F_{x, y}$  и  $F_{k_x, k_y}^{-1}$  – операторы прямого и обратного 2D преобразования Фурье по латеральным переменным  $(x, y)$ . В области неоднородных волн  $(\omega / v)^2 - k_x^2 - k_y^2 < 0$  выбирается корень, отвечающий ограниченному решению, экспоненциально убывающему с ростом глубины. Для случая однородной среды  $v = \text{const}$  решение задачи (20) – (21) имеет следующий вид:

$$u(x, y, z + \Delta z, \omega) = F_{k_x, k_y}^{-1} e^{ik_z \Delta z} F_{x, y} u(x, y, z, \omega), \quad (22)$$

где  $k_z$  имеет вид (19). Для модели горизонтально-слоистой среды соотношение (22) позволяет выполнять экономичный пересчет волнового поля с кровли однородного слоя на его подошву, обеспечивая непрерывность решения задачи волнового продолжения граничного условия Дирихле от поверхности наблюдений вглубь среды. В общем случае входящая в уравнения (20) – (21) локальная скорость волн в среде  $v = v(\mathbf{r})$  является достаточно произвольной функцией пространственных координат. Хотя в этом случае (22) более не является точным решением (21), оно обеспечивает его локальную аппроксимацию [14]. Преимущество аппроксимации вида (22) для случая  $v = v(\mathbf{r})$  состоит в том, что отвечающая ей сеточная схема является явной и устойчивой, поскольку спектральная норма оператора перехода со слоя на слой равна единице в области однородных волн, и меньше единицы в области неоднородных волн. Иным исключительно ценным свойством аппроксимации решения вида (22) является то, что она обеспечивает «точное» решение в случае постоянной скорости в среде, не приводит к дисперсии сеточных гармоник и по этой причине позволяет получать высококачественные решения при использовании разреженных сеток по пространственным переменным. К числу основных недостатков схемы (22) относится ее неэкономичность, связанная с невозможностью использования алгоритма быстрого (обратного) преобразования Фурье  $F_{k_x, k_y}^{-1}$  (БПФ)

в случае среды с переменной скоростью. Газдагом была предложена эвристическая схема PSPI [15], основанная на интерполяции решений, полученных для заданных узловых значений постоянной скорости, которые охватывают полный диапазон изменения ее величины. Например, с помощью 2-точечной интерполяции решений найденных для скоростей  $v_1$  и  $v_2$ , можно получить оценку решения для промежуточного значения  $v_1 < v < v_2$ , используя результат интерполяции для тех  $(x, y)$ , которым соответствует значение  $v$ . В работах [14, 16] предложен метод построения явных аддитивных

псевдоспектральных схем заданного порядка аппроксимации, обеспечивающих высокую точность и экономичную численную реализацию при параллельных расчетах. Метод основан на аппроксимации оператора глубинной волновой экстраполяции отрезком ряда по заданным базисным функциям с подлежащими определению коэффициентами. В качестве важного практического примера рассмотрим частный случай аппроксимации оператора глубинной экстраполяции отрезком ряда по заданным базисным функциям вида:

$$e^{i\omega\Delta z \sqrt{\frac{1}{v^2} - \xi}} \approx \alpha_0 + \alpha_1 e^{i\omega\Delta z \sqrt{\frac{1}{v_1^2} - \xi}} + \alpha_2 e^{i\omega\Delta z \sqrt{\frac{1}{v_2^2} - \xi}}, \quad (23)$$

где  $\xi = (k_x^2 + k_y^2) / \omega^2 \equiv n_r^2 = (\sin \theta / v)^2$ ,  $\theta$  – угол падения;  $v_1 \leq v \leq v_2$ ;  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  – подлежащие определению коэффициенты. Неизвестные  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  найдем из условий совпадения левой и правой частей (23), а также величин их первых и вторых производных в точке  $\xi = 0$ . Выполнив необходимое число операций дифференцирования левой и правой частей (23), и составив равенства в точке  $\xi = 0$ , получим невырожденную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} e^{i\frac{\omega\Delta z}{v}} = \alpha_0 + e^{i\frac{\omega\Delta z}{v_1}} \alpha_1 + e^{i\frac{\omega\Delta z}{v_2}} \alpha_2 \\ v e^{i\frac{\omega\Delta z}{v}} = v_1 e^{i\frac{\omega\Delta z}{v_1}} \alpha_1 + v_2 e^{i\frac{\omega\Delta z}{v_2}} \alpha_2 \\ v^3 \left[ -1 \left( i \frac{\omega\Delta z}{v} \right) \right] e^{i\frac{\omega\Delta z}{v}} = v_1^3 \left[ -1 \left( i \frac{\omega\Delta z}{v_1} \right) \right] e^{i\frac{\omega\Delta z}{v_1}} \alpha_1 + v_2^3 \left[ -1 \left( i \frac{\omega\Delta z}{v_2} \right) \right] e^{i\frac{\omega\Delta z}{v_2}} \alpha_2 \end{cases},$$

откуда находятся искомые  $\alpha_0, \alpha_1$  и  $\alpha_2$ , обеспечивающие аппроксимацию 6-го порядка:

$$e^{i\omega\Delta z \sqrt{\frac{1}{v^2} - n_r^2}} - \left( \alpha_0 + \alpha_1 e^{i\omega\Delta z \sqrt{\frac{1}{v_1^2} - n_r^2}} + \alpha_2 e^{i\omega\Delta z \sqrt{\frac{1}{v_2^2} - n_r^2}} \right) = O(n_r^6).$$

Оператор в правой части (23) экономичен, поскольку реализуется с помощью 2-кратного быстрого преобразования Фурье. Важным свойством найденного оператора с аппроксимацией  $O(n_r^6)$  является то, что его модуль не превышает единицы внутри интервала  $v_1 \leq v \leq v_2$ . Поскольку в конечных точках интервала оператор точен, можно весь диапазон изменения скоростей  $v$  разбить на сопрягающиеся сегменты  $v_{\min} < v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_{\max}$  и на каждом сегменте использовать полученную аппроксимацию, что в целом будет соответствовать использованию непрерывного составного оператора во всем диапазоне изменения скоростей. В работе [14] подробно изложена технология разбиения полного диапазона изменения локальных величин скоростей на сопрягающиеся сегменты и табулирована сетка узловых значений, обеспечивающая заданную точность результатов волнового продолжения и сейсмической миграции.

## 5. Технология реализации миграции «с сохранением амплитуд»

Важным требованием к результатам сейсмической миграции является условие «сохранения амплитуд», означающее, что ее результаты могут использоваться для анализа локальных коэффициентов отражения, а также их зависимостей от угла падения зондирующих волн на отражатель. Кратко опишем практическую реализацию этого требования.

Выполним замену переменных в базовом интеграле (5) и введем так называемые «биновые» координаты средних точек и половинных удалений:  $\mathbf{m} = (\mathbf{s} + \mathbf{g}) / 2$ ,  $\mathbf{h} = (\mathbf{s} - \mathbf{g}) / 2$ . Средние точки  $\mathbf{m} = \mathbf{m}(m_x, m_y)$  образуют регулярную биновую сетку; обычно, 25 м x 25 м. Назовем совокупность исходных сейсмических трасс, привязанных к этой биновой сетке и обладающих фиксированным

вектором половинного удаления  $\mathbf{h} = \mathbf{h}(h_x, h_y) = \text{const}$ , «покрытием». Общее число покрытий соответствует номинальной кратности сейсмической съемки, которая составляет, обычно, от нескольких десятков до первых сотен. Запишем следующую аппроксимацию (4):

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) &= \int d\omega \iint u_0^*(\mathbf{s}, \mathbf{g}, \omega) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \omega) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{g}, \mathbf{r}, \omega) d\mathbf{g} d\mathbf{s} = \\ &= 4 \int d\omega \int d\mathbf{h} \int u_0^*(\mathbf{m} + \mathbf{h}, \mathbf{m} - \mathbf{h}; \omega) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{m} + \mathbf{h}, \mathbf{r}; \omega) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{m} - \mathbf{h}, \mathbf{r}; \omega) d\mathbf{m} = \\ &\approx 4 \sum_{h_j} \Delta h_j \left[ \int d\omega \int u_0^*(\mathbf{m} + \mathbf{h}_j, \mathbf{m} - \mathbf{h}_j; \omega) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{m} + \mathbf{h}_j, \mathbf{r}; \omega) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{m} - \mathbf{h}_j, \mathbf{r}; \omega) d\omega \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Результат интегрирования заключенный во внутренних квадратных скобках соответствует миграции фиксированного покрытия  $\mathbf{h}_j$ , а внешний интеграл по координатам удалений  $(h_x, h_y)$  вырождается в обычную сумму по таким покрытиям. Формула (24) непосредственно используются для получения результатов миграции с предварительно выполненным псевдоспектральным расчетом нормальных производных функций Грина.

Использование асимптотического приближения (7) позволяет взять интеграл по временной частоте, что приводит (24) к виду:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) &\approx \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \sum_{m,n} \int_{S_m} \int_{S_n} k_s k_g \frac{\cos(\alpha_s)_m \cos(\alpha_g)_n}{v_s v_g} [A_s]_m [A_g]_n H^{\text{Ind}_m + \text{Ind}_n} (u_0)_t'(\mathbf{s}, \mathbf{g}; (r_s)_m + (r_g)_n) ds dg = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int d\mathbf{h} \left( \sum_{m,n} \int_{S_m} \int_{S_n} k_s k_g \sum_{m,n} \int_{S_m} \int_{S_n} k_s k_g \frac{\cos(\alpha_s)_m \cos(\alpha_g)_n}{v_s v_g} [A_s]_m [A_g]_n H^{\text{Ind}_m + \text{Ind}_n} (u_0)_t' \times \right. \\ &\left. \times (\mathbf{m} + \mathbf{h}, \mathbf{m} - \mathbf{h}; (r_s)_m + (r_g)_n) d\mathbf{m} \right), \end{aligned}$$

где лучевые амплитуды имеют указанные ранее интегрируемые особенности.

Подобная технология разбиения исходных данных и результатов миграции на покрытия имеет в настоящее время широкую апробацию. Анализ и сравнение результатов миграции отдельных покрытий имеет важное практическое значение как для оценки качества скоростной модели и ее уточнения, обеспечивающего лучшее качество фокусировки сейсмических волн и результатов миграции, так и для решения ряда важных обратных задач. Подобные свойства миграции дало основание называть ее «миграцией с сохранением амплитуд».

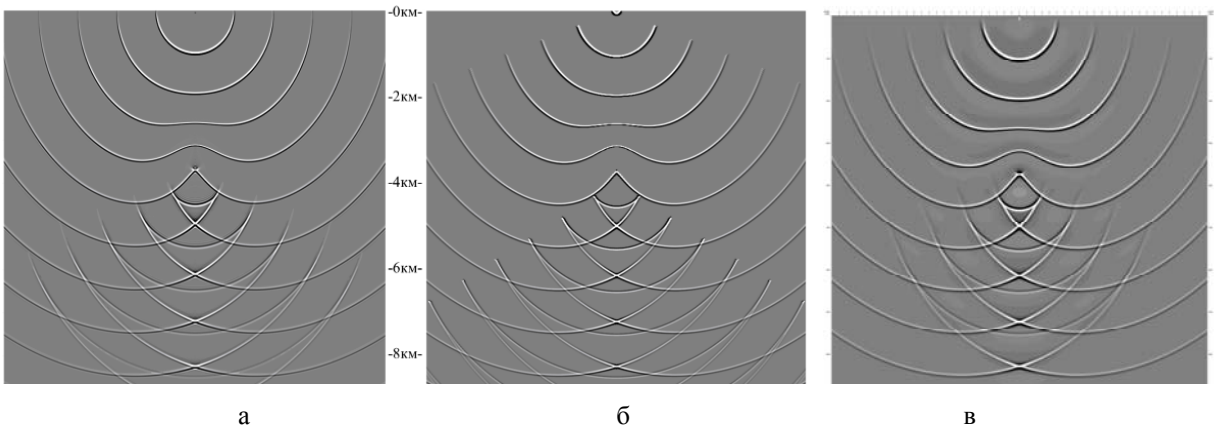


Рис. 1. Волны от точечного источника в последовательные моменты времени, проходящие низкоскоростную неоднородность: а – конечно-разностное решение волнового уравнения с шагом сетки 2,5 м; б – асимптотическое многолучевое решение; в – псевдоспектральное решение с шагом сетки 25 м

## 6. Тестирование результатов волнового продолжения

На рис.1,а,б,в представлены результаты расчета волн в последовательные моменты времени от расположенного на дневной поверхности импульсного точечного источника типа  $u|_{z=0} = \delta(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{s})$ , проходящих низкоскоростную неоднородность. Указанная низкоскоростная неоднородность, действующая как фокусирующая линза, приводит к появлению складок фронтов волн и каустик, в которых волны меняют свои амплитуду и фазу. В качестве эталона на рис.1,а представлено конечно-разностное решение 3-D скалярного волнового уравнения для случая среды с постоянной акустической жесткостью  $\rho(\mathbf{r})v(\mathbf{r}) = \text{const}$ . На рис. 1,б представлена аналогичная волновая картина, полученная с помощью многолучевого асимптотического приближения на основе формул (13) – (14). На рис.1,в представлены результаты расчета с помощью псевдоспектральной схемы (22) – (23). Наблюдается хорошее качественное и количественное соответствие всех полученных решений. Заметим, что из соображений точности конечно-разностный расчет решения потребовал использовать пространственную кубическую сетку с длиной ребра 2,5 м. Использование псевдоспектральной схемы позволило использовать кубическую расчетную сетку с длиной ребра 25 м и последующей интерполяцией результатов с помощью оператора «тонкой линзы» [14] на желаемую глубинную сетку 5 м при сохранении достаточной точности решения. Характерной особенностью асимптотического решения на рис.1,б является обнуление результатов расчета за границами каустики, что связано с отсутствием учета неоднородных волн в асимптотическом решении. Заметим, что неоднородные волны могут играть важную роль в контрастных мелкослоистых средах [14, 16].

## 7. Тестирование многолучевой и псевдоспектральной миграций на реальных сейсмических данных

На основе общей постановки задачи сейсмической миграции и с помощью выполненных асимптотической и псевдоспектральной реализаций волнового продолжения были разработаны соответствующие программы 3D- глубинной сейсмической миграции, предназначенные для обработки реальных сейсмических данных многократных перекрытий. Программа многолучевой миграции использует параллельные расчеты на SMP-вычислителях или кластерах традиционной архитектуры с числом ядер от нескольких десятков до нескольких тысяч в среде MPI. Чрезвычайно трудоемкие расчеты псевдоспектральной миграции, связанные с многократным выполнением прямого и обратного 2-мерного БПФ, требуют использования кластеров гибридной архитектуры с десятками и сотнями узлов, имеющих графические ускорители расчетов по технологии CUDA, а также средства MPI. В качестве иллюстрирующих примеров практического использования разработанных программ на рис. 2,а представлен результат многолучевой миграции по комплекту сейсмических данных многократных перекрытий, полученных в одном из районов Тимано-Печоры. На рис. 2,б представлен результат псевдоспектральной миграции в районе Астраханской впадины. Земная среда характеризуется здесь максимально сложным строением, связанным с наличием мощных соляных тел и сопутствующей тектоникой.

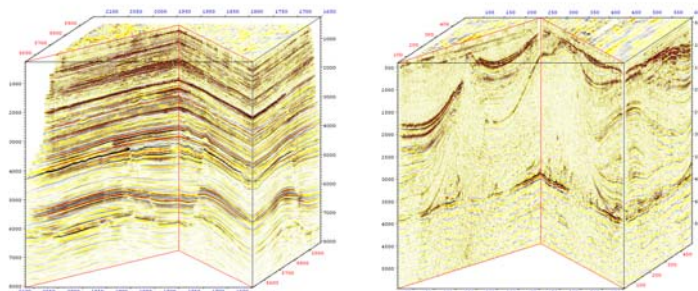


Рис. 2. Примеры результатов миграции по реальным сейсмическим данным:

а – многолучевая миграция, Тимано-Печора; б – псевдоспектральная миграция, Астраханский свод

## Заключение

Важнейшее прикладное значение имеют экономичные асимптотические методы сейсмической миграции. Разработан новый асимптотический метод решения задачи волнового продолжения граничного условия Дирихле в лучевой параметрической системе координат, на основе которого создана экономичная программа многолучевой 3-D глубинной сейсмической миграции до суммирования с сохранением амплитуд.

Разработана явная экономичная псевдоспектральная схема повышенного порядка точности для решения одностороннего волнового уравнения с целью волнового продолжения граничного условия Дирихле и расчета функций Грина, на основе которой реализована программа псевдоспектральной 3-D глубинной сейсмической миграции до суммирования с сохранением амплитуд.

Выполнено успешное тестирование разработанных программ на комплектах синтетических и реальных данных.

Проведенные исследования и разработки профинансированы Центральной геофизической экспедицией холдинга «Росгеология». Работа выполнена с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М. В. Ломоносова. Часть расчетов проведена на вычислительном кластере РФЯЦ-ВНИИЭФ (г. Саров).

## Литература

1. Петрашень Г. И., Нахамкин С. А. Продолжение волновых полей в задачах сейсморазведки. – Л.: Наука, 1973.
2. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, Т.1. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
3. Плешкевич А. Л., Иванов А. В., Левченко В. Д., Хилков С. А. Многолучевая 3D-глубинная сейсмическая миграция до суммирования с сохранением амплитуд // Геофизика. – 2017. – № S (спец. выпуск). – С. 76 – 84.
4. Плешкевич А. Л. Соотношение взаимности, амплитуда и энергия волн от точечных источников в неоднородной изотропной среде // Геофизика. – 2012. – № S (спец. выпуск). – С. 38 – 48.
5. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. – М.: Наука, 1980.
6. Вайнберг Б. Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
7. Попов М. М., Семченко Н. М., Вердел А. Р., Попов П. М. Метод суммирования гауссовых пучков в задачах сейсмической миграции // Докл. РАН. – 2007. – Т. 416, № 6. – С. 822 – 825.
8. Hill N. R. Prestack Gaussian-beam depth migration // Geophysics. – 2001. – V. 22. – P. 1240 – 1250.
9. Gray S. H., Bleistein N. True-amplitude Gaussian-beam migration // Geophysics. – 2009. – V. 74, no. 2. – P. 11 – 23.
10. Popov M. M., Semtchenok N. M., Popov P. M., Verdel A. R. Depth migration by the Gaussian beam summation method // Geophysics. – 2010. – Vol. 75, no. 2. – P. 81 – 93.
11. Pleshkevich A. L., Ivanov A. V., Khilkov S. A. Asymptotic solution of wavefield continuation problem in the ray parametric coordinates // SEG Technical Program Expanded Abstracts, Houston, USA. – 2017. – P. 5551 – 5555.
12. Клаербоут Д. Ф. Теоретические основы обработки геофизической информации с приложением к разведке нефти: пер. с англ. – М.: Недра, 1981.
13. Gazdag, J. Wave equation migration with phase-shift method // Geophysics. – 1978. – V. 43. – P. 1342 – 1351.
14. Плешкевич А. Л., Вишневикий Д. М., Лисица В. В. Разработка волновой псевдоспектральной 3D-глубинной сейсмической миграции до суммирования с сохранением амплитуд // Геофизика. – 2017. – № S (спец. выпуск). – С. 94 – 101.
15. Gazdag, J., and Sguazzero, P. Migration of seismic data by phase shift plus interpolation // Geophysics. – 1984. – V. 49. – P. 124 – 131.
16. Pleshkevich A. L., Vishnevskiy D. M., Lisitsa V. V. Explicit additive pseudospectral schemes of wavefield continuation with high-order approximation // SEG Technical Program Expanded Abstracts, Houston, USA. 2017. – P. 5546 – 5550.

**IMAGE RECONSTRUCTION OF DEPTH INHOMOGENEITIES IN EARTH MEDIUM FROM SEISMIC DATA («SEISMIC MIGRATION»)**

*A. L. Pleshkevich<sup>1</sup>, D. M. Vishnevsky<sup>2</sup>, A. V. Ivanov<sup>3</sup>, V. D. Levchenko<sup>3</sup>,  
V. V. Lisitsa<sup>2</sup>, B. P. Moroz<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>JSC Central Geophysical Expedition / Rosgeo, Moscow

<sup>2</sup>Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics of SB RAS, Novosibirsk

<sup>3</sup>Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow

Based on downward wave continuation a mathematical formulation and numerical methods are discussed for solving the highly important problem of reconstructing a 3D seismic image of inhomogeneous earth medium in gas and oil prospecting, traditionally called as «seismic migration». The input data are the results of registration of the reflected and scattered seismic waves from the depth earth inhomogeneities, generated by point sources and recorded by receivers located at the nodes of a quasi-regular dense grid on the surface. The total volume of digital seismic data set ranges from  $10^2$  GB to  $10^4$  GB. A general formula for solving the problem in the form of a multiple integral over the coordinates of sources and receivers is obtained, containing the product of the Fourier transform over the reversed time of the recorded wave field and normal derivatives of Green functions for sources and receivers. The methods for calculating Green's functions are presented, based on a new asymptotic solution in the ray parametric coordinates and on a new high-order approximation of pseudospectral solution of the «one-way» pseudodifferential wave equation, which were used to develop the corresponding computational programs. Intensive supercomputer calculations for seismic migration are parallel implemented on clusters of classical or hybrid architectures using GPU computing accelerators. Practical examples of seismic migration results obtained on supercomputers Lomonosov (Moscow State University) and RFNC-VNIIEF are given.

*Keywords:* Green function, multipath asymptotic approximation, pseudospectral scheme, depth seismic migration.

УДК 52-626

**ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ ЗАЖИГАНИЯ ДТ-КАПСУЛЫ В СКВОЗНЫХ РАСЧЕТАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ БОКСЕ-КОНВЕРТОРЕ В УСЛОВИЯХ РАБОТЫ ЛАЗЕРНО-ФИЗИЧЕСКИХ УСТАНОВОК**

*В. Ю. Резчиков, В. Ю. Морозов, А. А. Бусалов, Н. А. Вершинина*

Российский федеральный ядерный центр-  
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров

В докладе приведены результаты первых расчетов по комплексу программ ЛАСМ сжатия и неравновесного горения криогенной капсулы, содержащей термоядерное топливо, в полной сквозной постановке. В качестве начальной постановки выбрана редакция опыта Low-foot № 111215 для лазерно-физической установки NIF [1]. Моделируемые физические процессы, учиты-