

УДК 519.6 + 533.6

ИСКУССТВЕННАЯ ВЯЗКОСТЬ В МЕТОДАХ ТИПА ГОДУНОВА ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ И СНИЖЕНИЯ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ЗА ЕЕ ФРОНТОМ

А. В. Родионов

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров

Для борьбы с численной неустойчивостью типа «карбункул» в методах сквозного счета недавно был предложен новый подход, основанный на добавлении искусственной вязкости. Этот подход прошел успешное тестирование на схемах первого порядка точности применительно к моделированию двумерных и трехмерных задач. В данной работе он обобщается на случай использования схем типа Годунова повышенного порядка точности. Для исследования проблемы выбирается несколько реализаций хорошо известных схем. Они включают в себя алгоритмы реконструкции данных по пространству, применяемые в схемах типа MUSCL и WENO, а также алгоритмы интегрирования по времени, такие как, методы Рунге-Кутты и процедура предиктор-корректор схемы Годунова-Колгана-Родионова. Многочисленные расчеты тестовых задач типа задачи Кёрка и других популярных тестов позволили протестировать и настроить предлагаемый подход (добавление искусственной вязкости) на отобранных схемах. В результате (1) был подобран базовый коэффициент в модели искусственной вязкости и (2) были сформулированы несколько рекомендаций, выполнение которых позволяет существенно уменьшить уровень осцилляции за фронтом ударной волны.

Ключевые слова: методы сквозного счета, схемы типа Годунова, «карбункул» неустойчивость, ударно-волновая неустойчивость, искусственная вязкость, решатели задачи Римана.

1. Введение

В настоящее время в вычислительной газовой динамике широко используются методы (схемы) сквозного счета, базирующиеся на точном или приближенном решении задачи Римана. Такие методы называют методами типа Годунова или (в более широком смысле) противопотоковыми методами. Обладая многими достоинствами, они имеют и изъяны, среди которых наиболее значительным является феномен «карбункула» [1, 2]. За 30 лет, прошедшие с момента обнаружения и идентификации этого феномена, опубликовано большое количество работ, посвященных его изучению и поискам способов борьбы с ним. (Заметим, что термин «carbuncle phenomenon» используется наравне с терминами «карбункул»-неустойчивость или ударно-волновая неустойчивость.)

В работах [3, 4] был предложен и опробован новый метод решения проблемы «карбункула», являющийся внешним по отношению к конкретной схеме и не меняющий алгоритм расчета «невязких» потоков. Идея метода заключается в следующем: на фронте УВ в базовый метод решения уравнений Эйлера добавляется некоторое количество диссипации в форме правых частей уравнений Навье-Стокса, но с заменой коэффициента молекулярной вязкости на коэффициент искусственной вязкости. Выражение для коэффициента искусственной вязкости согласуется с [5], но имеет отличительные черты: обобщение на многомерность, введение «пороговой» величины и добавление искусственной теплопроводности.

В последующих работах [6–8] новый метод подавления «карбункул»-неустойчивости (метод искусственной вязкости) нашел свое развитие: была скорректирована формула для коэффициента

искусственной вязкости и проведено всестороннее тестирование метода на модельных задачах типа задачи Кёрка [2]. В результате были выбраны входящие в формулу свободные коэффициенты, обеспечивающие подавление неустойчивости при использовании схем первого порядка точности в решении двумерных и трехмерных задач.

Данная работа посвящена адаптации метода искусственной вязкости к схемам типа Годунова повышенной точности.

2. Разностные схемы

К настоящему времени разработано огромное количество схем, которых можно отнести к классу схем типа Годунова повышенного порядка точности. В отличие от схем первого порядка они различаются не только способом решения задачи Римана, но и чрезвычайно разнообразными способами повышения точности по пространству и времени. Более того, результат применения конкретной схемы повышенного порядка к какой-либо тестовой задаче может зависеть и от некоторых второстепенных (непринципиальных) особенностей ее реализации. По этой причине не представляется возможным проведение всесторонней проверки эффективности нового способа подавления ударно-волновой неустойчивости для всего многообразия схем данного класса.

Вместо этого, в данной работе мы ограничимся рассмотрением некоторых реализаций хорошо известных схем. Результатом их всестороннего тестирования станет выработка общих рекомендаций, которые определенно окажутся полезными и для других схем из рассматриваемого класса (схем типа Годунова повышенного порядка точности). Далее в данном разделе приводится описание отобранных для тестирования схем.

2.1. Уравнения Эйлера

Описание используемых в данной работе схем проведем на примере решения двумерных уравнений газовой динамики, которые в декартовых координатах xu записываются как

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} = \mathbf{RHS}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho h_0 - P \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + P \\ \rho u_x u_y \\ \rho u_x h_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_y = \begin{bmatrix} \rho u_y \\ \rho u_x u_y \\ \rho u_y^2 + P \\ \rho u_y h_0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $\mathbf{RHS} = 0$ для уравнений Эйлера, $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ – вектор скорости и его компоненты, ρ – плотность, P – давление, h_0 – полная удельная энтальпия. Для политропного газа полная удельная энтальпия записывается как

$$h_0 = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + h, \quad h = \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho},$$

где h – удельная энтальпия, γ – показатель адиабаты.

2.2. Пространственно-временная дискретизация

Численное решение уравнений (1) будет осуществляться в рамках метода конечных объемов. При этом будет рассматриваться достаточно гладкая структурированная сетка, и использоваться криволинейные координаты $\xi\eta$, которые переводят сетку физического пространства xu в прямоугольную сетку вычислительного пространства с сеточными интервалами $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$. Следующие геометрические параметры сетки будут использоваться в качестве метрических величин (здесь и далее сеточные индексы i и j соответствуют координатам ξ и η): V_{ij} – объем ячейки, $(\mathbf{S}_\xi)_{i+1/2,j}$ и $(\mathbf{S}_\eta)_{i,j+1/2}$ – вектор-площади боковых граней ячейки в двух сеточных направлениях (каждая вектор-площадь направлена в сторону возрастания соответствующей координаты).

Пусть на фиксированном временном слое n решение определено, т. е. в момент времени $t = t^n$ мы знаем осредненные по каждой ячейке величины $\mathbf{Q}_{i,j}^n \equiv (u_x, u_y, \rho, P)_{i,j}^n$. Чтобы получить решение

на следующем временном слое $n+1$ мы проинтегрируем (1) по ячейке и по времени между t^n и $t^{n+1} \equiv t^n + \Delta t$. В результате получим

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{V_{i,j}} \left[(F_\xi)_{i+1/2,j} - (F_\xi)_{i-1/2,j} + (F_\eta)_{i,j+1/2} - (F_\eta)_{i,j-1/2} \right], \quad (2)$$

где $U_{i,j}^n = U(Q_{i,j}^n)$, $U_{i,j}^{n+1} = U(Q_{i,j}^{n+1})$, $F_\xi = S_{\xi x} F_x + S_{\xi y} F_y$ и $F_\eta = S_{\eta x} F_x + S_{\eta y} F_y$ – вектора потоков через грани ячейки в двух сеточных направлениях.

Способ вычисления потоков определяется конкретной схемой. В схемах типа Годунова первого порядка точности используется предположение о постоянстве параметров газа внутри каждой ячейки, а потоки вычисляются с использованием одного из «Riemann solver» (RS) – точного или приближенного решения задачи Римана. Любое такое решение можно записать как

$$(F_\xi)_{i+1/2,j} = F^{RS}(Q_{i,j}^n, Q_{i+1,j}^n, (S_\xi)_{i+1/2,j}), \quad (F_\eta)_{i,j+1/2} = F^{RS}(Q_{i,j}^n, Q_{i,j+1}^n, (S_\eta)_{i,j+1/2}).$$

2.3. Реконструкции

В схемах типа Годунова повышение порядка аппроксимации по пространству обычно достигается процедурой реконструкции данных.

В схемах второго порядка вместо кусочно-постоянного распределения данных используется кусочно-линейное распределение, которое на каждом временном слое восстанавливается по известным величинам $Q_{i,j}^n$. В случае использования достаточно гладкой структурированной сетки задача

сводится к вычислению так называемых наклонов, $\Delta_\xi Q_{i,j}^n$ и $\Delta_\eta Q_{i,j}^n$, под которыми понимаются приращения параметров внутри ячейки по каждому из сеточных направлений. Тогда величины, экстраполированные на боковые грани ячейки, будут определяться как

$$\begin{aligned} Q_{i+1/2-,j}^n &= Q_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta_\xi Q_{i,j}^n, & Q_{i-1/2+,j}^n &= Q_{i,j}^n - \frac{1}{2} \Delta_\xi Q_{i,j}^n, \\ Q_{i,j+1/2-}^n &= Q_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta_\eta Q_{i,j}^n, & Q_{i,j-1/2+}^n &= Q_{i,j}^n - \frac{1}{2} \Delta_\eta Q_{i,j}^n, \end{aligned}$$

а потоки рассчитываются по соотношениям

$$(F_\xi)_{i+1/2,j} = F^{RS}(Q_{i+1/2-,j}^n, Q_{i+1/2+,j}^n, (S_\xi)_{i+1/2,j}), \quad (F_\eta)_{i,j+1/2} = F^{RS}(Q_{i,j+1/2-}^n, Q_{i,j+1/2+}^n, (S_\eta)_{i,j+1/2}).$$

Наклоны вычисляются по единому алгоритму для каждого сеточного направления независимо (одномерная реконструкция). Далее мы будем рассматривать три алгоритма реконструкции: minmod, vanLeer и MC (названия реконструкций соответствуют принятым в книге [9]; MC = monotonized central-difference reconstruction). Их можно записать как

$$\begin{aligned} \Delta f_i &= \min \text{mod}(\Delta f_{i-1/2}, \Delta f_{i+1/2}), & \min \text{mod}(a, b) &\equiv \begin{cases} a, & \text{если } |a| \leq |b| \text{ и } ab > 0, \\ b, & \text{если } |b| < |a| \text{ и } ab > 0, \\ 0, & \text{если } ab \leq 0, \end{cases} \\ \Delta f_i &= \text{vanLeer}(\Delta f_{i-1/2}, \Delta f_{i+1/2}), & \text{vanLeer}(a, b) &\equiv \begin{cases} \frac{2ab}{a+b}, & \text{если и } ab > 0, \\ 0, & \text{если и } ab \leq 0, \end{cases} \\ \Delta f_i &= \text{MC}(\Delta f_{i-1/2}, \Delta f_{i+1/2}), & \text{MC}(a, b) &= \min \text{mod}\left(\frac{a+b}{2}, 2 \min \text{mod}(a, b)\right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Delta f_{i-1/2} = f_i - f_{i-1}$ и $\Delta f_{i+1/2} = f_{i+1} - f_i$.

Все реконструкции (3) принадлежат к классу трехточечных реконструкций, удовлетворяющих свойству TVD. В этом классе реконструкция *minmod* обладает наибольшей диссипацией, а реконструкция *MC* – наименьшей.

Результат применения реконструкции зависит не только от выбранного алгоритма реконструкции, но и от того, по каким переменным реконструкция проводится. Наиболее простой способ – проводить реконструкцию по *примитивным переменным*, т. е. по компонентам вектора \mathbf{Q} . Однако этот способ часто приводит к плохим результатам. Более правильным является проведение реконструкции по *характеристическим переменным*.

В данной работе кроме кусочно-линейных реконструкций (3) будет использоваться реконструкция пятого порядка точности WENO5. Подробное описание этой реконструкции дается в [10].

2.4. Методы Рунге-Кутты

Перепишем разностное уравнение (2) в компактном виде

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n + \Delta t \mathbf{L}_{i,j}(\mathbf{Q}^n), \quad (4)$$

где пространственный оператор $\mathbf{L}_{i,j}$ выражает суммарный поток через все грани ячейки. Его вычисление подразумевает проведение реконструкции по каждому из сеточных направлений и решение задачи Римана на боковых гранях ячейки.

Метод интегрирования по времени вида (4) представляет собой метод Эйлера, имеющий первый порядок аппроксимации. Для повышения точности интегрирования по времени используют методы Рунге–Кутты, базирующиеся на процедуре пересчета. В данной работе мы будем использовать методы Рунге–Кутты второго и третьего порядка [11] (методы RK2 и RK3, соответственно), имеющие следующий вид:

метод RK2

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i,j}^{(1)} &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \Delta t \mathbf{L}_{i,j}(\mathbf{Q}^n), \\ \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{2} \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{1}{2} \mathbf{U}_{i,j}^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{L}_{i,j}(\mathbf{Q}^{(1)}), \quad \mathbf{Q}_{i,j}^{(1)} = \mathbf{Q}(\mathbf{U}_{i,j}^{(1)}). \end{aligned}$$

метод RK3

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i,j}^{(1)} &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \Delta t \mathbf{L}_{i,j}(\mathbf{Q}^n), \\ \mathbf{U}_{i,j}^{(2)} &= \frac{3}{4} \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{1}{4} \mathbf{U}_{i,j}^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t \mathbf{L}_{i,j}(\mathbf{Q}^{(1)}), \quad \mathbf{Q}_{i,j}^{(1)} = \mathbf{Q}(\mathbf{U}_{i,j}^{(1)}), \\ \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{3} \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{2}{3} \mathbf{U}_{i,j}^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{L}_{i,j}(\mathbf{Q}^{(2)}), \quad \mathbf{Q}_{i,j}^{(2)} = \mathbf{Q}(\mathbf{U}_{i,j}^{(2)}). \end{aligned}$$

Заметим, что по сравнению с методом Эйлера методы RK2 и RK3 увеличивают объем вычислений при переходе от временного слоя n к слою $n + 1$, соответственно, в два и три раза.

2.5. Процедура типа предиктор-корректор

Второй порядок по времени может достигаться иными способами, например, при помощи процедуры типа предиктор-корректор, описанной в [12, 13]. Эта специфическая процедура является разновидностью (близким аналогом) предложенной ранее схемы Хэнкока [14, 15], поэтому в данной работе ее будем называть схемой Хэнкока-Родионова (или схемой HR).

Используемая в схеме Хэнкока-Родионова процедура предиктор-корректор в компактном виде записывается как

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{i,j}^{n+1} &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \Delta t \mathbf{L}_{i,j}^{\text{pred}}(\mathbf{Q}^n), \\ \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \Delta t \mathbf{L}_{i,j}^{\text{corr}}(\mathbf{Q}^{n+1/2}), \quad \mathbf{Q}_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_{i,j}^n + \tilde{\mathbf{Q}}_{i,j}^n), \quad \tilde{\mathbf{Q}}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{U}}_{i,j}^{n+1}). \end{aligned}$$

Здесь пространственные операторы $L_{i,j}^{\text{pred}}$ и $L_{i,j}^{\text{corr}}$ различны. В отличие от $L_{i,j}$, оператор $L_{i,j}^{\text{pred}}$ не включает в себя решение задачи Римана. Вместо этого, потоки вычисляются по тем граничным экстраполированным величинам, которые являются внутренними по отношению к интегрируемой ячейке. Таким образом, для ячейки (i, j) на этапе предиктор потоки вычисляются по простым соотношениям:

$$\begin{aligned} (F_{\xi})_{i-1/2,j} &= F\left(Q_{i-1/2+,j}^n, (S_{\xi})_{i-1/2,j}\right), & (F_{\xi})_{i+1/2,j} &= F\left(Q_{i+1/2-,j}^n, (S_{\xi})_{i+1/2,j}\right), \\ (F_{\eta})_{i,j-1/2} &= F\left(Q_{i,j-1/2+}^n, (S_{\eta})_{i,j-1/2}\right), & (F_{\eta})_{i,j+1/2} &= F\left(Q_{i,j+1/2-}^n, (S_{\eta})_{i,j+1/2}\right). \end{aligned}$$

На этапе корректор применяется оператор $L_{i,j}^{\text{corr}}$, который использует решение задачи Римана (как и в базовом операторе $L_{i,j}$), но реконструкцию не пересчитывает: на промежуточном временном слое $n + 1/2$ используются те же наклоны, что были получены на шаге предиктор ($\Delta_{\xi} Q_{i,j}^n$ и $\Delta_{\eta} Q_{i,j}^n$).

Заметим, что хотя схема HR по отношению к методу RK2 характеризуется меньшим объемом вычислений, но обычно она обеспечивает лучшую точность.

2.6. Модель искусственной вязкости

В схемах повышенного порядка точности мы будем использовать ту же модель искусственной вязкости, что была выбрана для схем первого порядка [6 – 8]. Согласно этой модели коэффициент искусственной вязкости определяется как

$$\mu_{AV} = \begin{cases} C_{AV} \rho h^2 \sqrt{(\nabla \mathbf{u})^2 - (C_{th} a/h)^2}, & \text{если } (\nabla \mathbf{u}) < -C_{th} a/h, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где a – скорость звука, h – характерный размер ячейки, C_{AV} – безразмерный параметр, $C_{th} = 0,05$ – коэффициент в пороговой интенсивности сжатия, которая ограничивает действие искусственной вязкости только фронтом ударной волны. В случае неквадратных ячеек характерный размер ячейки вычисляется как $h = \max(d_1, d_2) / \sqrt{2}$, где d_1 и d_2 – длины диагоналей ячейки. Для прямоугольных ячеек в декартовых координатах это выражение сводится к: $h = \sqrt{(h_x^2 + h_y^2)} / \sqrt{2}$.

Адаптация этой модели искусственной вязкости к схемам типа Годунова повышенного порядка точности будет заключаться в подборе подходящего коэффициента C_{AV} .

3. Тестирование и настройка метода

Тестирование проводилось с использованием схем, описанных в предыдущем разделе: HR-minmod, HR-vanLeer, HR-MC, RK2-MC и RK3-WENO5. Для решения задачи Римана обычно использовался точный решатель Годунова; выборочные расчеты с применением решателей Rou и HLLC давали близкие результаты (аналогично тому, что наблюдалось в схемах первого порядка).

Подавляющее большинство тестовых расчетов было проведено с использованием модификаций задачи Керка. Полученные данные отличались большим разнообразием. Здесь мы приведем наиболее важные выводы проделанной работы:

Из отобранных схем, схема HR-minmod демонстрирует наименьшую склонность к генерации паразитных колебаний за фронтом ударной волны.

При выполнении двух рекомендаций (даны ниже) значение коэффициента $C_{AV} = 0,5$ в модели искусственной вязкости обеспечивает подавление «карбункул»-неустойчивости для всех рассмотренных схем. Это значение можно рассматривать как универсальное, поскольку оно подходит для моделирования течений любой размерности в широком диапазоне значений показателя адиабаты газа.

Первая рекомендация относится к процедуре реконструкции данных внутри в ячейки; здесь следует переходить на использование характеристических переменных. Использование примитивных переменных обычно приводит к заметным осцилляциям за ударной волной. Исключение составляет лишь реконструкция minmod , для которой можно использовать как характеристические, так и примитивные переменные.

Вторая рекомендация касается реконструкции данных внутри ячеек, расположенных внутри фронта ударной волны. В таких ячейках следует переходить на представление о линейном распределении данных и использовать реконструкцию minmod .

4. Численные примеры

В данном разделе на примере использования отобранных схем (HR- minmod , HR- vanLeer , HR- MC , RK2- MC и RK3- WENO5) для решения нескольких тестовых задач демонстрируется эффективность предложенного метода подавления возмущений, появляющихся за фронтом ударной волны, в том числе и тех, что вызваны «карбункул»-неустойчивостью. В сочетании с отобранными схемами применяются различные решатели задачи Римана (Riemann solvers = RS), такие как точный решатель (решатель Годунова), решатели Pou и HLLC . В дальнейшем предполагается, что (1) все процедуры реконструкции данных базируются на использовании характеристических переменных (рекомендация 1), если не указано иначе, и (2) модель искусственной вязкости применяется в том виде, как было описано выше, а именно, с базовым коэффициентом $C_{AV} = 0,5$ и с переключением на реконструкцию minmod в окрестности ударной волны (рекомендация 2).

4.1. Задача о двойном маховском отражении

Рассмотрим данные расчета одной хорошо известной тестовой задачи, а именно задачи о двойном маховском отражении [16].

На рис. 1 приведены данные расчета задачи методом HR- MC на квадратной сетке с разрешением $h = 1/480$. Представлены четыре варианта расчета, отличающиеся типом переменных, используемых в реконструкции, и наличием или отсутствием искусственной вязкости. Рис. 1,а соответствует варианту расчета с использованием примитивных переменных и без добавления искусственной вязкости. Стрелки на рисунке указывают на возмущения различных видов, заметно ухудшающие качество полученных данных. Возмущения, показанные стрелками 1 и 2, расположены за отраженной ударной волной слева от тройной точки. Можно с уверенностью сказать, что они не вызваны «карбункул»-неустойчивостью, так как в этой части течения линии тока не ориентированы вдоль линий сетки. Другие возмущения расположены на ножке маха (ударная волна между тройной точкой и пластиной $y = 0$). Здесь наблюдается пилообразное искажение ножки маха (стрелка 3) и ее искривление (стрелка 4), приводящее к нефизической структуре течения за ударной волной. Эти возмущения являются проявлением «карбункул»-неустойчивости.

На рис. 1,б представлены данные, полученные с использованием примитивных переменных, но с добавлением искусственной вязкости. Видно, что в этом варианте расчета проявления «карбункул»-неустойчивости полностью исчезли. Что касается возмущений первого и второго вида (стрелки 1 и 2), то они остались. Хотя первые из них заметно ослабли, вторые сохранились на прежнем уровне. Рис. 1,в соответствует варианту расчета с использованием характеристических переменных и без добавления искусственной вязкости. Сравнение с рис 1,а показывает, что отказ от использования примитивных переменных в пользу характеристических переменных приводит к полному исчезновению возмущений второго вида и заметному ослаблению возмущений первого вида; при этом проявления «карбункул»-неустойчивости остаются без изменений. Наконец, данные расчета с использованием характеристических переменных и с добавлением искусственной вязкости (рис. 1,г) демонстрируют наилучшее качество: все паразитические возмущения либо полностью устранены, либо ослаблены до пренебрежимо малого уровня.

Таким образом, мы приходим к выводу, что применительно к схемам повышенного порядка точности искусственная вязкость позволяет эффективно устранять паразитические возмущения, связанные с «карбункул»-неустойчивостью.

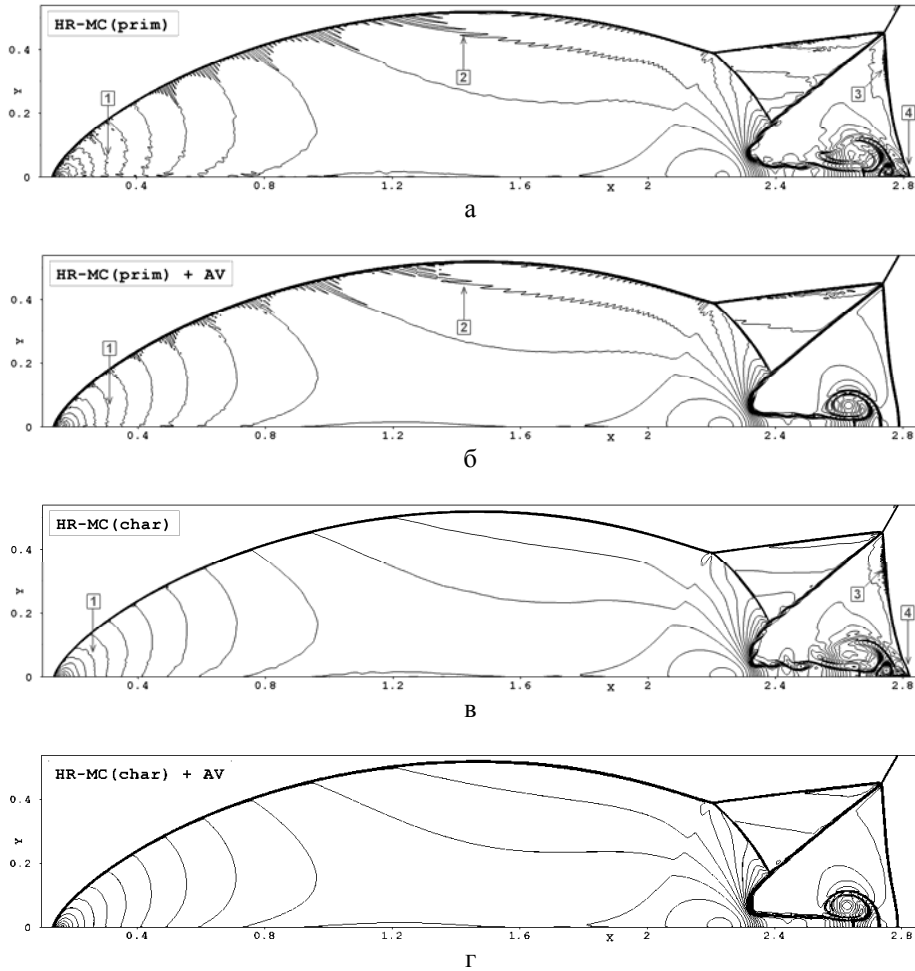


Рис. 1. Изолинии плотности в тестовой задаче о двойном маховом отражении (41 изолиния, равномерно распределенная между значениями 2.1 и 22). Расчеты по схеме HR-MC на сетке с $h = 1/480$: а и б – реконструкция по примитивным переменным; в и г – реконструкция по характеристическим переменным; б и г – расчеты с добавлением искусственной вязкости

4.2. Сверхзвуковое обтекание цилиндра (двумерный случай)

В этой тестовой задаче расчетная область $[1, 3] \times [-75^\circ, 75^\circ]$ в полярных координатах $r\varphi$ покрывается регулярной сеткой с количеством ячеек $J \times I = 90 \times 160$. На границе $j = 0$ (поверхность цилиндра) задается непроницаемая стенка, а на границе $j = J$ задается втекающий поток с параметрами $(u_x, u_y, \rho, P) = (\sqrt{\gamma M_\infty}, 0, 1, 1)$. На нижней и верхней границах расчетной области ($i = 0$ и $i = I$) задается условие свободного вытекания.

Результаты расчетов задачи при $\gamma = 1.4$ и числе Маха набегающего потока $M_\infty = 3$ представлены на рис. 2. Для моделирования этих тестовых случаев были использованы все отобранные схемы в сочетании с различными решателями задачи Римана. Можно видеть, что все оригинальные схемы (т. е. без привлечения искусственной вязкости) в обоих тестовых случаях страдают от ударно-волновой неустойчивости (верхние ряды рисунков). Добавление искусственной вязкости (нижние ряды рисунков) приводит к исправлению решений, причем все схемы демонстрируют близкие результаты.

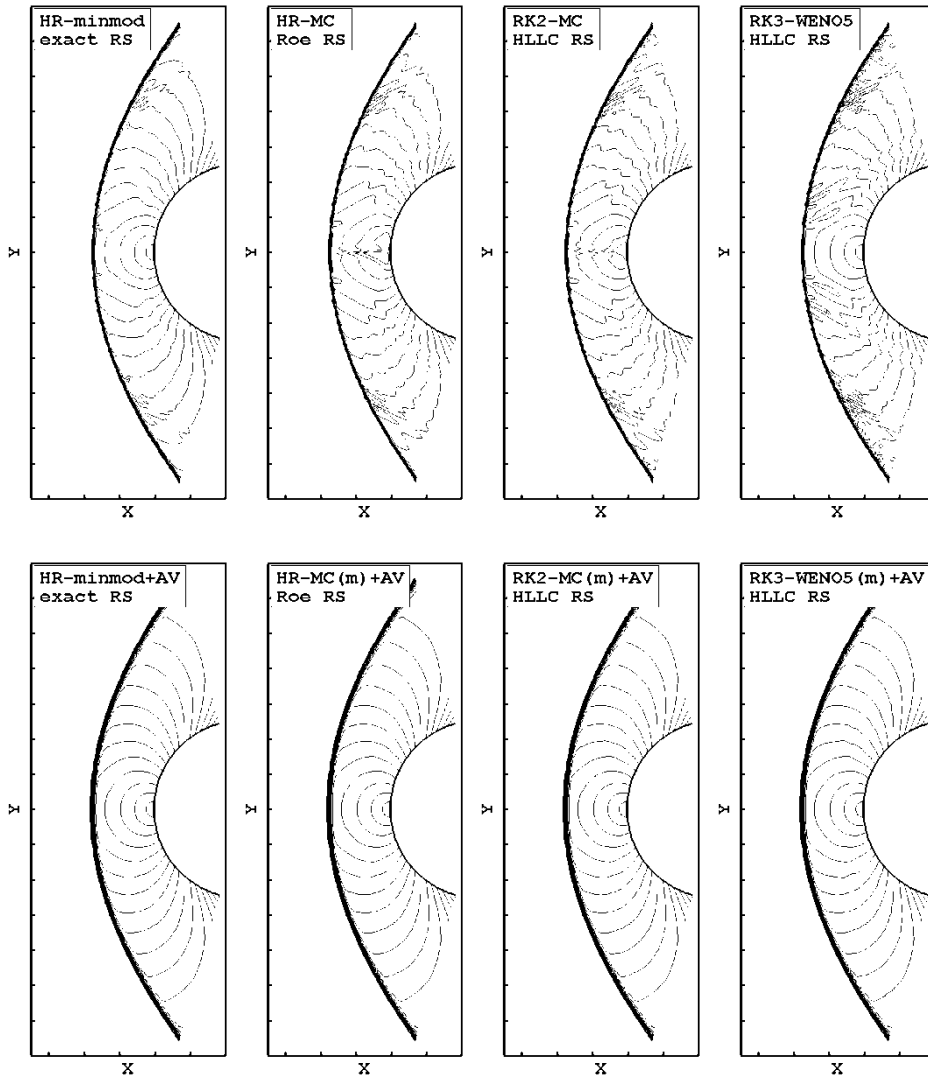


Рис. 2. Сверхзвуковое обтекание цилиндра при $M_\infty = 3$. Двадцать пять изолиний числа Маха, равномерно распределенные между 0,1 и 2,5. Верхний ряд: оригинальные схемы, нижний ряд: те же схемы с добавлением искусственной вязкости

4.3. Проблема нагрева (двумерный и трехмерный случаи)

Перейдем теперь к проблеме нагрева, которая возникает при моделировании *вязкого* гиперзвукового обтекания цилиндра. С этой целью будем решать уравнения Навье-Стокса, как в двумерной, так и в трехмерной постановках. В качестве начальных данных задачи возьмем те, что использовались в работе [17]: $M_\infty = 8.1$, давление набегающего потока $P_\infty = 370,6$ Па, температура набегающего потока $T_\infty = 63,73$ К, радиус цилиндра $r = 0,02$ м, число Рейнольдса $Re_r = 1,31 \times 10^5$, температура стенки $T_w = 300$ К. Рабочим газом является воздух в приближении идеального газа с $\gamma = 1,4$, коэффициент молекулярной вязкости вычисляется по формуле Сазерленда, число Прандтля $Pr = 0,72$.

В двумерном случае используется расчетная сетка с количеством ячеек $J \times I = 150 \times 160$, равномерная в окружном направлении и неравномерная, с использованием геометрической прогрессии, в радиальном направлении: $h_{j+1}/h_j = 1,05$, $h_1 = 5 \times 10^{-5} r$ (как показано на рис. 3). В трехмерном случае сетка приобретает $K = 45$ равномерных интервалов в координатном направлении z ; в этом направлении расчетная область представляет собой сегмент $0 \leq z \leq r$ с условием периодичности на концах.

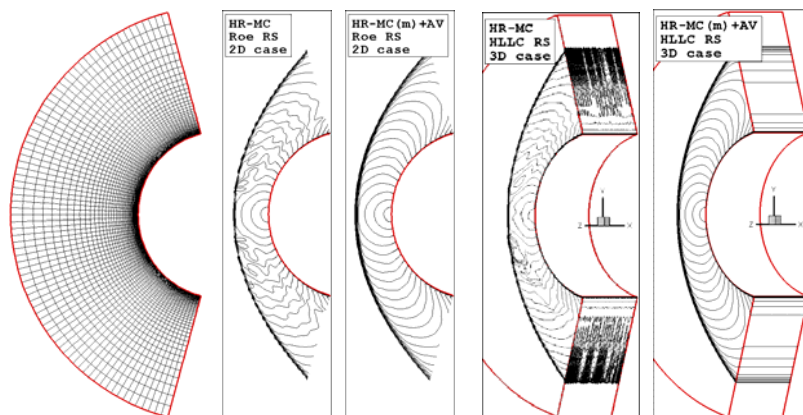


Рис. 3. Вязкое гиперзвуковое обтекание цилиндра при $M_\infty = 8,1$; $Re_r = 1,31 \times 10^5$ (двумерный и трехмерный случаи). Расчетная сетка (каждая вторая линия сетки) и изолинии числа Маха (от 0,1 до 2,5 через 0,1)

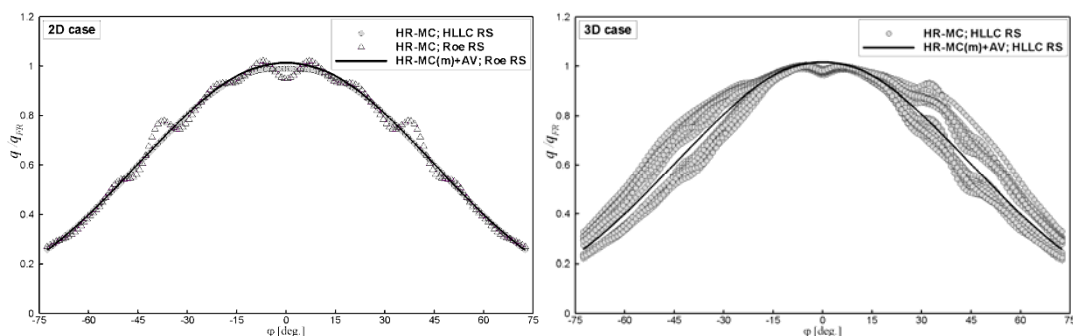


Рис. 4. Распределение теплового потока по поверхности цилиндра при $M_\infty = 8,1$; $Re_r = 1,31 \times 10^5$ (двумерный и трехмерный случаи)

На рис. 3 приведены изолинии числа Маха, полученные по схеме HR-MC с двумя решателями задачи Римана (решателями Roe и HLLC) в двумерном и трехмерном случаях. Можно видеть значительные искажения течения во всех расчетах, полученных без использования искусственной вязкости; в то же время применение искусственной вязкости полностью устраняет искажения. Рис. 4 демонстрирует соответствующие профили тепловых потоков на поверхности цилиндра, нормированные к величине в точке торможения: $q_{FR} = 17,5 \text{ W/cm}^2$ (Fay–Riddell’s stagnation value). Рисунок ясно показывает влияние осцилляций за ударной волной на распределение теплового потока на стенке. Хотя профиль, полученный без искусственной вязкости с решателем HLLC, в двумерном случае искажен не слишком сильно, переход на трехмерный расчет приводит к значительному ухудшению решения. Применение искусственной вязкости позволяет получать качественные решения во всех расчетных случаях.

4.4. Задача о седовском взрыве (двумерный случай)

В этой тестовой задаче одномерный сферически-симметричный взрыв (седовский взрыв) рассчитывается в двумерной осесимметричной постановке. Расчетная область $[0, 1.1] \times [0, 1.1]$ в координатах xr (x – ось симметрии) покрывается регулярной сеткой с $J \times I = 220 \times 220$. Начальное состояние идеального газа с $\gamma = 1.4$ в расчетной области следующее: $(u_x, u_r, \rho, P) = (0, 0, 1, 10^{-6})$; исключение составляет лишь ячейка, примыкающая к началу координат, где давление равно 4.334474×10^5 . На нижней и левой границах расчетной области задается условие симметричности течения; на верхней и правой границах задается непроницаемая стенка. Такая постановка задачи соответствует полной энергии сферически-симметричного взрыва $E_0 = 0,8510719$, при которой фронт ударной волны достигает радиуса $R_{\text{shock}} = 1$ на момент времени $t = 1$.

На рис. 5 представлены результаты расчета задачи с использованием схем HR-MC и RK3-WENO5 в сочетании с решателем Roe RS. Как можно видеть, данные, полученные по оригинальным схемам (левые графики), искажены карбункуло-подобными изъятиями вблизи обеих осей симметрии. Однако добавление искусственной вязкости в каждую из расчетных схем (правые графики) полностью устраняет проблему.

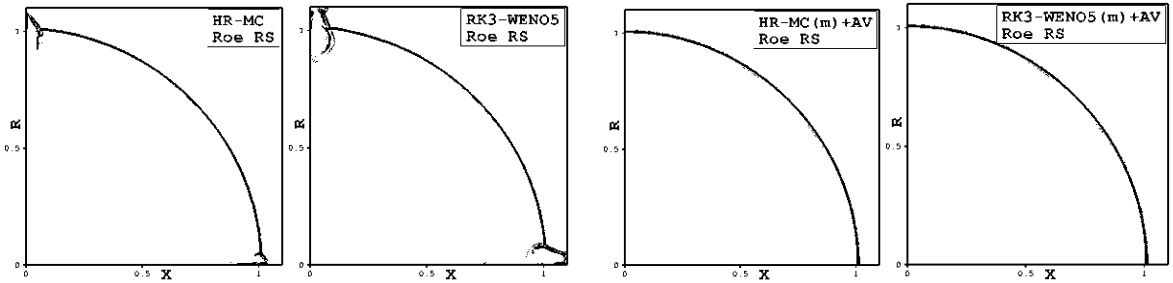


Рис. 5. Задача о седовском взрыве на момент времени $t = 1$. Пятнадцать изолиний плотности, равномерно распределенные между значениями 0,4 и 6. Слева: оригинальные схемы; справа: те же схемы с добавлением искусственной вязкости

4.5. Задача Ноха (двумерный случай)

В заключение обратимся к решению тестовой задачи Ноха [21] в двумерной постановке, как это было описано в работе [22]. Здесь в плоскости xu начальное состояние идеального газа с $\gamma = 5/3$ следующее: $\rho = 1$, $P = 0$ (в расчетах заменяется на 10^{-6}), в каждой точке вектор скорости газа имеет единичную длину и направлен к началу координат. Точное решение задачи представляет собой ударную волну, отраженную от начала координат и имеющую круговую форму: скорость ударной волны равна $1/3$; за ударной волной $\rho = 16$, $P = 16/3$ и $\mathbf{u} = 0$; перед ударной волной $\rho = \left(1 + t/\sqrt{x^2 + y^2}\right)$, тогда как скорость и давление остаются неизменными.

Расчетная область на плоскости представляет собой квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$. На нижней и левой границах расчетной области задается условие симметричности течения; на верхней и правой границах задаются параметры точного решения (зависят от времени и радиуса).

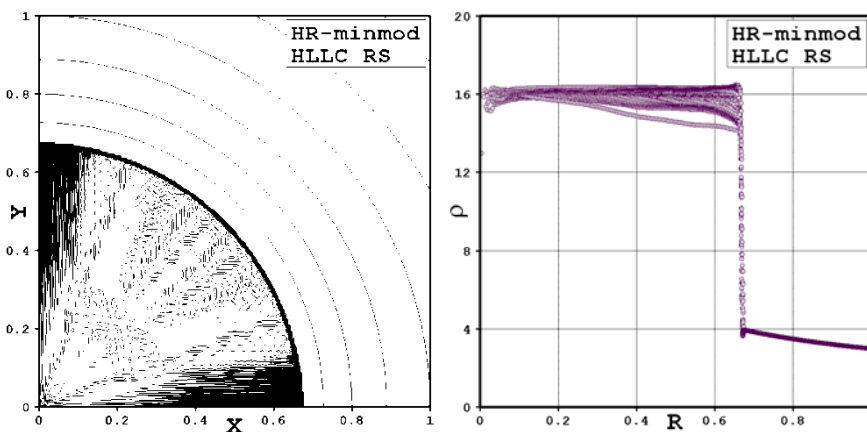


Рис. 6. Результаты расчета задачи Ноха для $t = 2$ по различным схемам. Изолинии плотности (от 2,5 до 17 через 0,25) в расчетной области и график рассеяния плотности в зависимости от радиуса

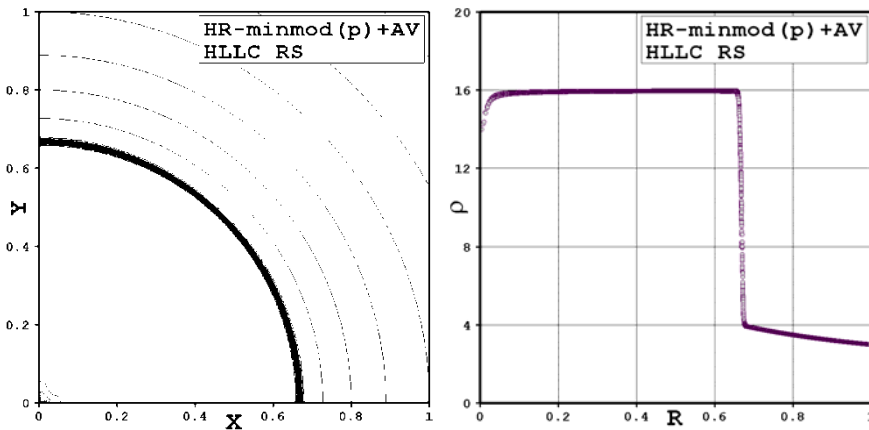


Рис. 6. Окончание

Результаты расчета задачи Ноха на сетке, состоящей из $J \times I = 200 \times 200$ ячеек, показаны на рис. 6. Можно видеть, что схема HR-minmod с решателем HLLC без искусственной вязкости (верхние графики) дает сильную ударно-волновую неустойчивость. С добавлением искусственной вязкости (нижние графики) возмущения за ударной волной исчезают.

5. Заключение

Методика борьбы с неустойчивостью типа «карбункул», базирующаяся на модели искусственной вязкости, апробирована на схемах типа Годунова повышенного порядка точности. Тестирование проводилось на примере использования нескольких отобранных схем (HR-minmod, HR-vanLeer, HR-MC, RK2-MC и RK3-WENO5) для решения тестовых задач типа задачи Кёрка и других популярных тестов. Основные положения проведенного исследования можно сформулировать следующим образом.

1. Рассматриваемая методика показала свою эффективность применительно к схемам повышенного порядка точности. В качестве безразмерного базового коэффициента в модели искусственной вязкости было выбрано значение $C_{AV} = 0,5$, обеспечивающее подавление «карбункул»-неустойчивости для любой из рассмотренных схем (при выполнении двух рекомендаций, перечисленных ниже). Это значение можно рассматривать как универсальное, поскольку оно подходит для моделирования течений любой размерности в широком диапазоне значений показателя адиабаты газа.

2. Первая рекомендация (Предложение 1) относится к процедуре реконструкции данных внутри ячейки; здесь следует переходить на использование характеристических переменных. Использование примитивных переменных обычно приводит к заметным осцилляциям за ударной волной. Исключение составляет лишь реконструкция minmod, для которой можно использовать как характеристические, так и примитивные переменные.

3. Вторая рекомендация (Предложение 2) касается реконструкции данных внутри ячеек, расположенных внутри фронта ударной волны. В таких ячейках следует переходить на представление о линейном распределении данных и использовать реконструкцию minmod.

4. Использование рассматриваемой методики в сочетании с выполнением указанных рекомендаций позволяет не только подавлять численную неустойчивость типа «карбункул», но и существенно снижает уровень осцилляций параметров потока за фронтом ударной волны. Одним из практически важных результатов применения предлагаемой методики является решение проблемы нагрева, которая возникает иногда при моделировании вязкого гиперзвукового обтекания затупленного тела.

Литература

1. Peery K. M., Imlay S. T. Blunt body flow simulations // AIAA Paper. – 1988. – 88. – 2924.
2. Quirk J. J. A contribution to the great Riemann solver debate // Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 1994. – V. 18. – P. 555 – 574.
3. Родионов А. В., Тагирова И. Ю. Искусственная вязкость в схемах типа Годунова как метод подавления «карбункул»-неустойчивости // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 2015. – Вып.2. – С. 3-11.
4. Тагирова И. Ю., Родионов А. В. Применение искусственной вязкости для борьбы с «карбункул»-неустойчивостью в схемах типа Годунова // Математическое моделирование. – 2015. – Том 27, № 10. – С. 47 – 64.
5. von Neumann J., Richtmyer R. D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // J. Appl. Phys. – 1950. – V. 21. – P. 232 – 237.
6. Rodionov A. V., Artificial viscosity in Godunov-type schemes to cure the carbuncle phenomenon // J. Comput. Phys. – 2017. – V. 345. – P. 308 – 329.
7. Rodionov A. V., Artificial viscosity to cure the carbuncle phenomenon: the three-dimensional case // J. Comput. Phys. – 2018. – V. 361. – P. 50 – 55.
8. Родионов А. В. Применение искусственной вязкости для борьбы с численной неустойчивостью типа «карбункул» – Препринт РФЯЦ-ВНИИЭФ № 115 – 2017. – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2017.
9. LeVeque R. J. Finite volume methods for hyperbolic problems. – Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
10. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. – 1996. – V. 126. – P. 202 – 228.
11. Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes // J. Comput. Phys. – 1988. – V. 77. – P. 439 – 471.
12. Родионов А. В. Монотонная схема второго порядка аппроксимации для сквозного расчета неравновесных течений // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. – 1987. – Том 27, № 4. – С. 585 – 593.
13. Родионов А. В. Повышение порядка аппроксимации схемы С.К. Годунова // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. – 1987. – Том 27, № 12. – С. 1853 – 1860.
14. van Albada G.D., van Leer B., Roberts W.W. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics // Astron. Astrophysics – 1982. – V. 108. – P. 76 – 84.
15. van Leer B. On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist–Osher and Roe // SIAM J. Sci. Stat. Comput. – 1984. – V. 5, No. 1. – P. 1 – 20.
16. Woodward P. R., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comput. Phys. – 1984. – V. 54. – P. 115 – 173.
17. Kitamura K., Shima E. Towards shock-stable and accurate hypersonic heating computations: A new pressure flux for AUSM-family schemes // J. Comput. Phys. – 2013. – V. 245. – P. 62 – 83.

ARTIFICIAL VISCOSITY IN GODUNOV-TYPE METHODS TO SUPPRESS THE SHOCK WAVE INSTABILITY AND REDUCE THE OSCILLATIONS BEHIND ITS FRONT

A. V. Rodionov

Russian Federal Nuclear Center –
All-Russian Research Institute of Experimental Physics, Sarov

To fight numerical instability of «carbuncle» type in shock-capturing computational methods a new approach has been recently suggested which is based on adding artificial viscosity. This method was successfully tested on the schemes of the first order of accuracy for the simulation of 2D and 3D problems.

In this paper it is generalized for case of Godunov-type schemes of higher order of accuracy. Several realizations of the well-known schemes are selected for the research on the problem. They comprise the algorithms of the data reconstruction by space implemented in MUSCL-type and WENO-type schemes, as well as algorithms of integration by time, such as Runge-Kutta method and the predictor-corrector procedure of the Godunov-Kolgan-Rodionov scheme. Many computations on benchmark problems of Quirk-type and other popular tests made it possible to test and align the new method (adding an artificial viscosity) using the selected schemes. As a result, the basic coefficient in the artificial viscosity model was selected for the schemes of higher order of accuracy (1) and there were formulated some recommendations, following which it will make it possible to reduce the oscillation level behind the shock-wave front considerably (2).

Key words: shock-capturing computational methods, Godunov-type schemes, «carbuncle» instability, shock-wave instability, artificial viscosity, Riemann problem solvers.

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НАРУЖНОГО КОЛЬЦА ШАРИКОПОДШИПНИКА НА ОСНОВЕ ПП ЛОГОС-ПА

А. А. Рябов, В. И. Романов, Ю. А. Вяткин, В. А. Барышев

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров

В работе представлены результаты численных исследований деформирования наружного кольца радиально-упорного шарикового подшипника 84-126208РЯУ-ТУ3900-А под воздействием радиальной силы. Численные исследования проведены на основе пакета программ ЛОГОС-ПА. Выполнен сравнительный анализ численных результатов с эталонным аналитическим решением.

Ключевые слова: численное моделирование, шарикоподшипник, контактная задача, аналитический расчет, напряженно-деформированное состояние (НДС), конечно-элементная модель, граничные условия, напряжения, перемещения.

Введение

В конструкциях с вращающимися частями подшипники являются ответственными деталями, которые зачастую определяют прочность и ресурс конструкции в целом. При анализе возможных причин перегрева и износа подшипников весьма важным является вопрос разрушения дорожек качения колец. Дорожки качения могут повреждаться в результате возникновения зон локальных пластических деформаций материала колец, вмятин на кольцах, вызываемых высокими нагрузками на шарик. Для выявления природы повреждения колец подшипника проводятся расчетно-экспериментальные оценки его несущей способности, направленные на определение допустимых нагрузок на шарик. При проектировании изделия, работающего при высоких скоростях вращения, на предприятии-изготовителе возникла задача определения напряженно-деформированного состояния радиально-упорного шарикового подшипника 84-126208РЯУ-ТУ3900-А предназначенного для восприятия комбинированной радиально-осевой нагрузки.