

УДК 524.3-17

## ТРЕХМЕРНОЕ И ДВУМЕРНОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В ОПЫТЕ С ПЛОСКОЙ МИШЕНЬЮ НА ЛАЗЕРНОЙ УСТАНОВКЕ NOVA

*О. Г. Синькова, В. П. Стаценко, Ю. В. Третьяченко, Ю. В. Янилкин,  
Е. А. Новикова*

Российский федеральный ядерный центр –  
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров

В работе представлены результаты 1D численного моделирования по методике СНДП, а также 1D, 2D и 3D численного моделирования по методике ЭГАК опыта с плоской мишенью на лазерной установке NOVA (США). Результаты сравниваются с экспериментом, в котором реализуется режим турбулентного перемешивания. Такой эксперимент предназначался для проведения тестирования существующих феноменологических моделей турбулентности на задаче с высокой плотностью энергии.

Расчёты по методике ЭГАК проводились методом прямого 3D и 2D численного моделирования. 1D расчёты по методике СНДП и ЭГАК выполнены с использованием  $k - \epsilon$  модели турбулентности. Получено хорошее согласие результатов расчетов, как между собой, так и с экспериментальными данными и приближенным аналитическим решением задачи, также полученным в данной работе.

*Ключевые слова:* методика ЭГАК, турбулентное перемешивание, лазерный эксперимент, плоская мишень, рентгенография.

### Введение

Полуэмпирическая  $k - \epsilon$  модель турбулентности [1] оттестирована на наборе нескольких гидродинамических экспериментов: гравитационное перемешивание, сдвиговое перемешивание, цилиндрический опыт Мешкова, эксперимент с плавучей струей. На этих задачах подобран единый набор констант модели, пригодный для широкого класса задач.

Однако при моделировании опытов на лазерных установках большой мощности появляется необходимость в использовании данной модели в условиях высокой плотности энергии и температуры и, соответственно, тестирования модели в таких условиях.

Специально для измерения эффектов турбулентного перемешивания была подобрана постановка и геометрия в опытах с лазерными мишенями на установках OMEGA [2] и NOVA [3]. В настоящей работе рассматривается один из опытов на установке NOVA, который ранее численно моделировался в 1D и 2D приближениях в работе [4], однако там были получены только предварительные результаты, которые описывали опыты лишь на качественном уровне. В данной работе расчёты проводились как с  $k - \epsilon$  моделью турбулентности, так и методом прямого 2D и 3D численного моделирования. При этом постановка расчетов по сравнению с [4] была изменена, а именно, были учтены имеющиеся в опыте начальные случайные возмущения КГ, на которой происходит турбулентное перемешивание. Получено хорошее согласие расчетов в разной постановке между собой и с опытными данными.

Кроме того, в работе получено приближённое аналитическое решение для развития турбулентности на контактной границе (КГ), которое также согласуется с экспериментом.

## 1. Постановка эксперимента

Рассмотрим эксперимент, представленный в работе [3]. Ударная волна (УВ), вызванная взаимодействием рентгена с аблятором (рис. 1а), приводит к развитию неустойчивости Рихтмайера-Мешкова на границе аблятора и низкоплотного вещества (пены). В результате развития неустойчивости возникает слой перемешивания, который детектируется рентгенографией.

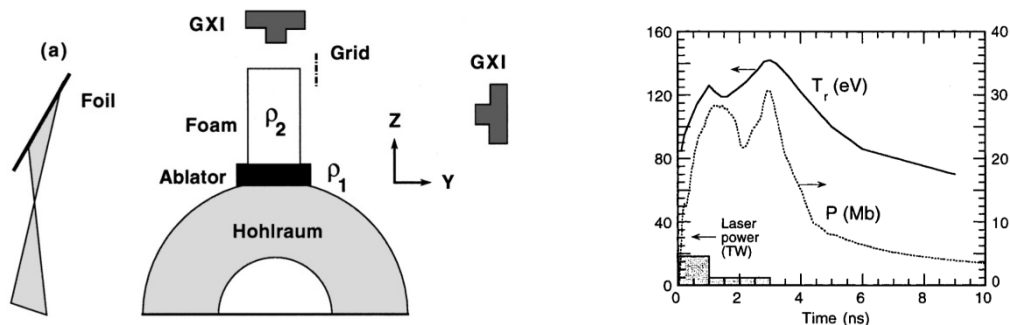


Рис. 1. Экспериментальные данные: а – схема эксперимента из работы [4], б – температура рентгена  $T_r$  и давление  $P$

Восемь лазерных лучей освещают внутреннюю поверхность цилиндрического хольраума. Полная энергия лазерного импульса 28 кДж, длина волны  $\lambda_{\text{las}} = 0,53$  мкм, длина импульса 3 нс. Зависимость мощности лазера от времени, так же как и измеренной температуры рентгена  $T_r$  и давления  $P$  на аблятор, рассчитанного по коду LASNEX [3], представлены на рис. 1,б.

Аблятор с вставкой из Halar пластика ( $\text{C}_4\text{H}_4\text{F}_3\text{Cl}$ ,  $\rho_1 = \rho_{\text{Halar}} = 1,65$  г/см<sup>3</sup>), размер вставки  $\delta X = 600$  мкм,  $\delta Y = 250$  мкм, размер вдоль  $Z$ :  $\delta Z = 120$  мкм.

Низкоплотное вещество (пена) – это CHO,  $\rho_2 = 0,12$  г/см<sup>3</sup>. Оно выполнено в форме прямоугольника размерами  $\delta X = 900$  мкм,  $\delta Y = 500$  мкм,  $\delta Z = 900$  мкм.

Halar непрозрачен для рентгенографии, а пена (CHO) прозрачна. Таким образом, по мере роста ширины зоны перемешивания (ЗТП) между ними возрастает ширина профиля пропускания диагностического рентгеновского импульса.

## 2. Постановка расчётов

Далее при сравнении с результатами измерений данные приведены в единицах мкм и нсек. В расчётах же использовались единицы: 1г, 1см,  $10^{-7}$ сек, КэВ – далее полагается, что величины измерены именно в этих единицах, если размерность величин не указана.

Эксперимент показал, что движение среды является с хорошей точностью одномерным (влияние конечных размеров  $\delta X$  и  $\delta Y$  слабо), что позволяет моделировать задачу в 1D приближении.

В задаче задаются следующие начальные данные (табл. 1):

Таблица 1

Начальные данные

$Z$ , мкм	Вещества	Начальная плотность
$0 < Z < 120$	Halar	$\rho = 1,65$ г/см <sup>3</sup>
$120 < Z < 1020$	CHO	$\rho = 0,12$ г/см <sup>3</sup>

Уравнения состояния веществ в расчётах по методике ЭГАК использовались те же, что и в работе [4], в расчётах по методике СНДП неравновесный состав среды рассчитывался по модели среднего иона [9].

На лагранжевой границе левого края аблятора ( $Z = 0$ ) задавалось давление согласно рис. 1,б из работы [4]. Такое условие для неподвижной сетки в методике ЭГАК реализовано заданием вспомогательного вещества («вакуума»), в котором поддерживается заданное давление. На нижней границе системы задавалось условие втекания, на верхней границе – условие свободного вытекания.

### Постановка 1D расчётов с $k - \varepsilon$ моделью по методике СНДП

Для интерпретации результатов проведённых экспериментов использовались физическая модель и численная методика СНДП, описанные в работах [8, 9]. В этой модели учитывались следующие физические процессы: двухтемпературная газодинамика, перенос спектрального излучения и его взаимодействие с веществом, электронная и ионная теплопроводности. Учитывался турбулентный перенос, описываемый с помощью  $k - \varepsilon$  модели [1].

На внешней границе ( $r = R_4$ ) ставилось условие свободного выхода излучения и условие типа «жёсткая стенка» по газодинамике, а также нулевые потоки ионной, электронной и турбулентной теплопроводности.

Граничные условия по процессам выбирались следующие. По газодинамике: на левой границе задавалось давление (согласно данным из работы [3]), соответствующее рис. 1,б; на правой границе задавалось условие свободного вытекания. Для переноса рентгеновского излучения: слева – температура излучения (согласно данным из работы [3]), справа – свободный выход излучения.

Начальные значения турбулентной энергии  $k_0$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon_0$  задавались во всех точках счётной области. Численные значения указанных величин приведены в табл. 2.

Таблица 2

Варианты расчётов

Номер варианта	Начальное значение турбулентной энергии $k_0$	Начальная скорость диссипации $\varepsilon_0$
1	$10^{-12}$	$10^{-16}$
2	$10^{-10}$	$10^{-13}$

**Постановка 1D расчётов с  $k - \varepsilon$  моделью по методике ЭГАК.** Расчёт проводился по 2D программе, однако в поперечном направлении взято минимальное количество счётных ячеек, то есть фактически расчёт одномерный. Начальные значения турбулентной энергии  $k_0$  и  $\varepsilon_0$  задавались во всех точках счётной области, за исключением вакуума. Численные значения указанных величин приведены в табл. 3. Отметим, что значения  $k_0$  и  $\varepsilon_0$  в варианте 2 получены с помощью аналитических оценок (см. раздел 5).

Таблица 3

Варианты 1D расчётов

№ варианта	$k_0$	$\varepsilon_0$
1	$10^{-3}$	0,05
2	$7,35 \times 10^{-3}$	0,0252

**Постановка 2D расчётов.** Решались невязкие уравнения гидродинамики (уравнения Эйлера) без использования каких-либо моделей турбулентности и молекулярной вязкости (то есть 2D ILES подход – implicit large eddy simulation).

В расчётах для области  $\delta X = 250$  мкм,  $\delta Z = 1050$  мкм использована квадратная неподвижная сетка с размером ячейки  $h = 1$  мкм (сетка  $250 \times 1050$  узлов). На боковых границах  $X = 0$  и  $X = 250$  мкм задавалось периодическое условие или «жёсткая стенка». В расчетах задавались начальные возмущения следующими способами:

1) на границах раздела с помощью генератора случайных чисел задавались малые возмущения плотности в одном слое ячеек на границе Halar-ЧНО;

- 2) во всей счётной области задавались малые возмущения амплитуды  $u_z$  – компоненты скорости, знак которой менялся с помощью генератора случайных чисел;
- 3) во всей счётной области задавались малые возмущения плотности, знак которой менялся с помощью генератора случайных чисел;
- 4) задавались случайные возмущения формы КГ Halar-СНО в соответствии с данными измерений работы [3], амплитуда возмущений составляла 3 мкм.
- Постановки 2D расчётов приведены в табл. 4.

Таблица 4

## Варианты 2D расчётов

№	Начальные условия
1	Случайные возмущения плотности $\rho = (1 \pm 0,1) \cdot 1,65$ в одном слое ячеек на невозмущённой КГ Halar-СНО
2	Случайные возмущения относительной плотности во всей области $\delta\rho/\rho = \pm 0,01$
3	Случайные возмущения относительной плотности во всей области $\delta\rho/\rho = \pm 0,1$ и случайно возмущённая КГ Halar-СНО, амплитуда возмущений 3мкм
4	Случайные возмущения относительной плотности во всей области $\delta\rho/\rho = \pm 0,01$ и случайно возмущённая КГ Halar-СНО, амплитуда возмущений 3мкм
5	Случайные возмущения КГ Halar-СНО, амплитуда возмущений 3мкм

**Постановка 3D расчётов.** Использовался тот же подход, что и для 2D случая, т. е. 3D ILES. Для области  $\delta X = \delta Y = 250$  мкм,  $\delta Z = 1050$  мкм использовалась кубическая сетка с размером ячейки  $h = 1$  мкм ( $250 \times 250 \times 1050$  узлов). Начальные возмущения, как и выше, задавались различными способами (см. табл. 5).

Таблица 5

## Варианты 3D расчётов

Вариант	Начальные условия
1	Случайные возмущения $\rho = (1 \pm 0,1) \cdot 1,65$ в одном слое ячеек на невозмущённой КГ Halar-СНО
2	$u_z = \pm 0,002$ во всей области
3	Случайные возмущения КГ Halar-СНО, амплитуда возмущений 3мкм

## 3. Результаты расчётов

## 3.1. Общая картина развития турбулентности

**2D расчёты.** Наиболее согласующиеся с экспериментальными данными результаты получены в расчете 5. На рис. 2 показано распределение величин в этом расчете на  $t = 3\text{нс}$ .

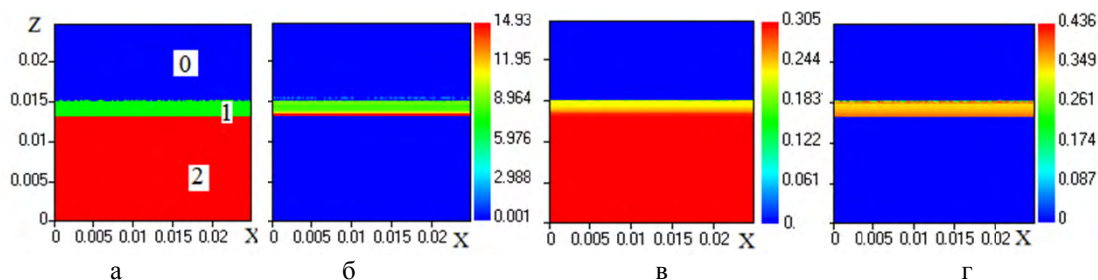


Рис. 2. Распределение величин в расчете 5 в плоскости  $z$ - $x$  на  $t = 3\text{нс}$ : а – веществ, б – плотности, в – давления, г –  $u_z$  компоненты скорости: 0 – СНО, 1 – Halar, 2 – вакуум

Из рис. 2 видно, что к моменту  $t = 3$  нсек область Halar сильно сжимается со стороны вакуума. Со стороны СНО она остаётся на месте, но возмущение давления и скорости практически доходит до КГ Halar-СНО. Плотность в области Halar сильно возрастает. Далее УВ, пришедшая на КГ Halar-СНО, вызывает рост возмущений на границе из-за неустойчивости Рихтмайера-Мешкова (рис. 3). К этому моменту область Halar уже заметно расширяется.

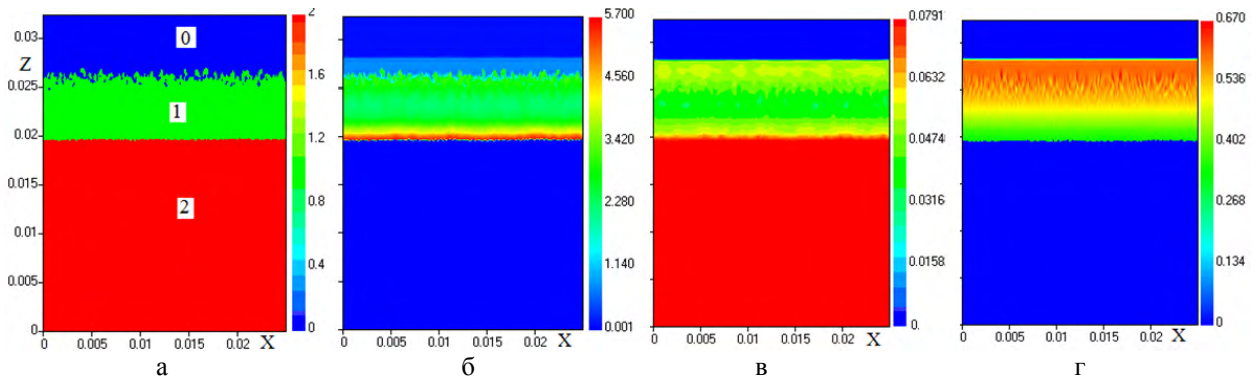


Рис. 3. Распределение величин в расчете 5 в плоскости  $z-x$  на  $t = 5$  нс: а – вещество, б – плотности, в – давления, г –  $u_z$  компоненты скорости: 0 – СНО, 1 – Halar, 2 – вакуум

Наконец, на  $t = 11$  нс УВ отходит далеко от КГ Halar-СНО в сторону СНО, а сама КГ сильно размывается.

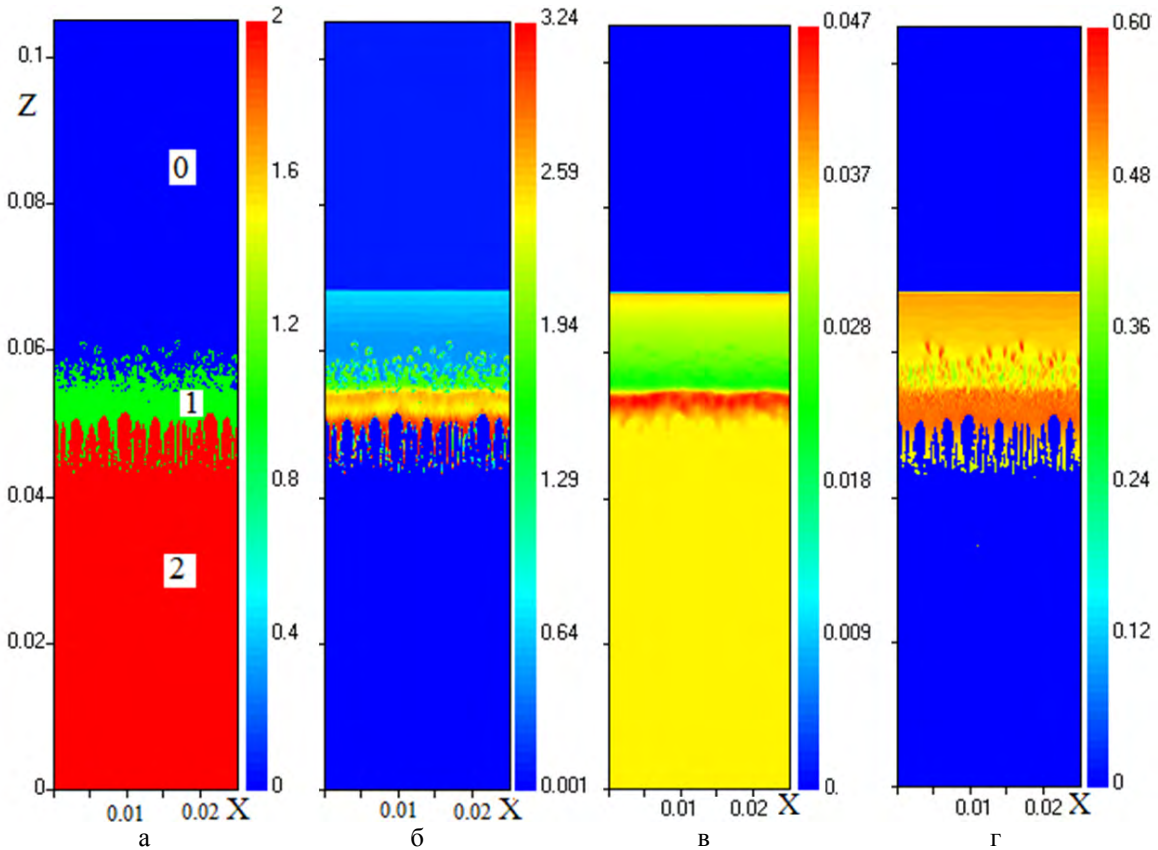


Рис. 4. Распределение величин в расчете 5 в плоскости  $z-x$  на  $t = 11$  нс: а – вещество, б – плотности, в – давления, г –  $u_z$  компоненты скорости: 0 – СНО, 1 – Halar, 2 – вакуум

Как видно, в расчёте возмущения растут не только на границе СНО-Halar, где развивается неустойчивость Рихтмайера-Мешкова из-за приходящей УВ, но и на границе вакуум-Halar. Здесь на  $t = 0$  имеет место неустойчивая ситуация: ускорение КГ, направленное от лёгкого вещества (вакуум) к тяжёлому (Halar).

**3D расчёты.** На рис. 5 приведены изоповерхности  $\beta_{\text{Halar}} = 0,5$  на контактной границе СНО-Halar на моменты  $t = 9$  нс и  $t = 14$  нс в 3D расчёте 3. Наблюдается расширение спектра размеров «пузырей» с течением времени.

### 3.2. Сравнение 1D и 2D расчётов

На рис. 6 показаны  $R-t$  диаграммы УВ, а также границ раздела Halar-СНО и Halar-вакуум, как измеренные в опыте [3], так и полученные в 2D и 1D расчётах. В расчётах принималось, что положение границ раздела СНО-Halar и вакуум-Halar определяется по точкам, в которых объёмная доля Halar составляет 0,5.

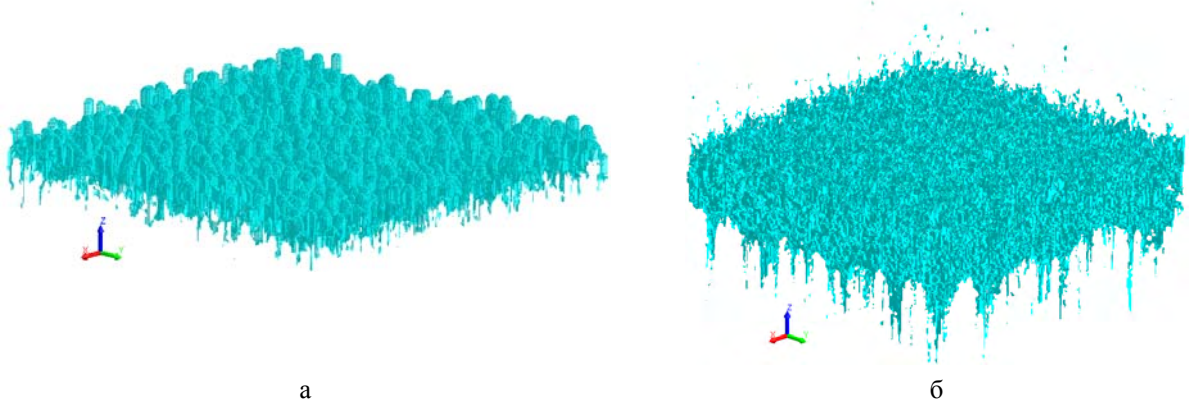


Рис. 5. Изоповерхность  $\beta_{\text{Halar}} = 0,5$  в 3D расчёте 3: а –  $t = 9$  нс, б –  $t = 14$  нс

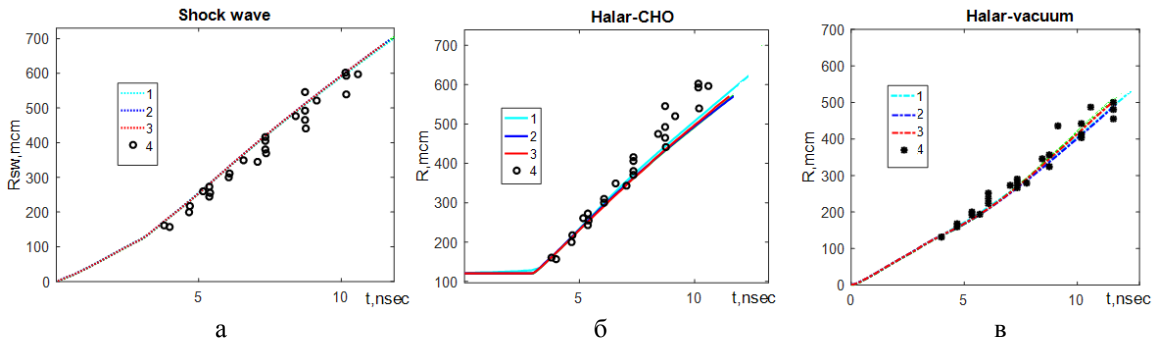


Рис. 6.  $R-t$  диаграммы УВ и КГ, расчёты по методике ЭГАК: 1 – 1D расчёт 1, 2D расчёты: 2 – 2D расчёт 1, 3 – 2D расчёт 5, 4 – опыт

Как видно из рис. 6, 2D расчёты, а также 1D расчёт, практически совпадают друг с другом по положению УВ и КГ и хорошо согласуются с опытом [3]. Отметим, что результаты расчётов по методике СНДП также весьма близки к приведённым на рис. 6, что показывает несущественную роль процессов переноса, электронной и ионной теплопроводности.

Для 2D расчёта 5, который мы считаем эталонным (как будет видно далее) на рис. 7 показаны  $R-t$  диаграммы УВ, а также границ раздела Halar-СНО и Halar-вакуум в сравнении с измерениями [3]. Из рис. 7 видно, что разброс экспериментальных точек такой большой, что величина, отнесённая в [3] к УВ, может относиться и к границе раздела СНО-Halar, в то время как interface однозначно относится к границе Halar-вакуум.

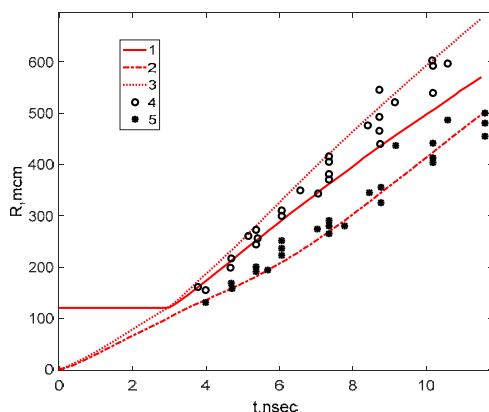


Рис. 7.  $R-t$  диаграммы в расчете 5: УВ (3); границы раздела Halar-CHO (1) и Halar-вакуум (2); 4 – измерения, отнесённые в [3] к УВ, 5 – измерения, отнесённые в [3] к КГ

Более детально в [3] измерены положения границ ЗТП на границе раздела CHO-Halar. Ширина ЗТП в расчётах определяется по точкам, в которых концентрации Halar достигают значений 0,01 и 0,99. При этом в 2D и 3D расчетах вначале производилось усреднение в поперечном к движению УВ направлении. Разность  $L$  координат этих точек (ширина ЗТП) приведена на рис. 8. В целом поведение ширины ЗТП в 2D расчётах 4–5 (и в определённой степени в расчете 3) близко к измерениям. Величина  $L$  в 1D расчётах также в целом согласуется с измерениями, учитывая их разброс.

Отметим, что не удаётся получить удовлетворительного согласия с измерениями в тех 2D расчетах, в которых не задается возмущение КГ CHO-Halar.

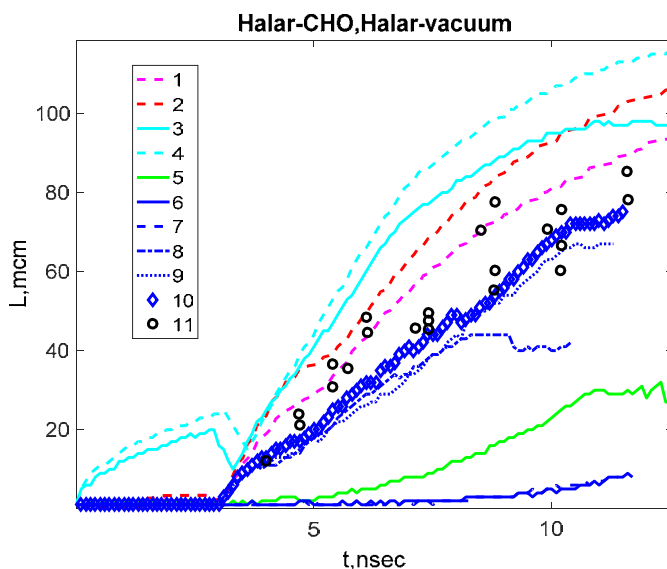


Рис. 8. Зависимости от времени ширины ЗТП. 1-2 – 1D расчёты по методике СНДП, варианты 1-2, соответственно; 3-4 – 1D расчёты ЭГАК, варианты 1-2, соответственно; 5 – 2D расчёт работы [4]; 2D расчёты ЭГАК: 6-10 – варианты 1-5, соответственно; 11 – измерения [3]

### 3.3. 3D расчёты и сравнение с 2D расчётами

Полученные в 3D расчетах  $R-t$  диаграммы границ раздела Halar-CHO и Halar-вакуум показаны на рис. 9 ( $R-t$  диаграммы УВ совпадают с другими расчетами). Там же приведены соответствующие величины, измеренные в опытах [3]. Как видно из рис. 9, все расчеты практически совпадают между собой и согласуются с соответствующими измерениями, а также с 1D и 2D расчетами.

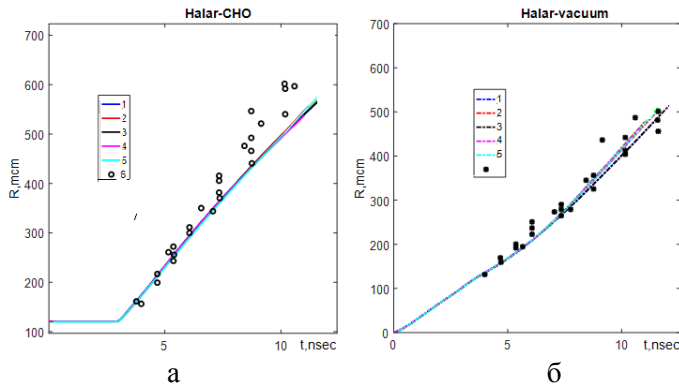


Рис. 9.  $R$ - $t$  диаграммы границы раздела в расчётах (1-5) и опыте (6): а – Halar-CHO; б – Halar-вакуум: 1-2 – 2D расчёты 1 и 5, соответственно; 3-5 – 3D расчёты 1, 2, 3, соответственно

Ширина ЗТП приведена на рис. 10. Отметим, что, как видно из рис. 10, в целом поведение этой величины по времени в 2D расчётах 4 и 5 (а также в некоторой степени расчете 3) близко к измерениям – как и в 3D расчете 3. Во всех указанных расчётах на  $t = 0$  возмущалась КГ Halar-CHO, мы полагаем эти расчёты эталонными.

В 3D расчёте 2 величина  $L$  занижена по сравнению с измерениями. Ещё в большей степени она занижена в 3D расчете 1 и в 2D расчете 1, в обоих случаях близка постановка расчётов: заданы случайные возмущения плотности в одном слое ячеек на невозмущённой границе. Соответственно близкими оказываются и результаты для ЗТП. Результат 2D расчёта 2 также близок к ним, в нём малые случайные возмущения плотности задавались во всей области.

В заключение отметим, что не удастся получить удовлетворительного согласия с измерениями в тех 2D и 3D расчётах, в постановке которых не учитывается возмущение КГ CHO-Halar.

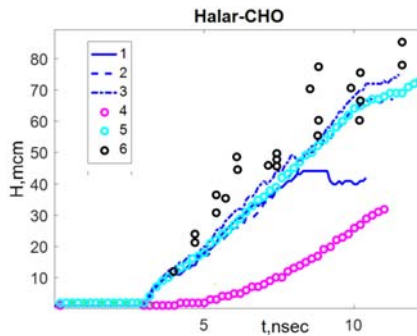


Рис. 10. Зависимости от времени ширины ЗТП на границе раздела Halar-CHO. Расчёты: 1-3 – 2D расчёты 3-5, соответственно; 4 – 3D расчёт 2, 5 – 3D расчёт 3; 6 – измерения [3]

#### 4. Аналитические оценки

В начале рассмотрим задачу о развитии 2D периодического возмущения на КГ CHO-Halar после прохождения через неё УВ со стороны Halar. Полагаем, что 2D периодическое возмущение имеет форму синусоиды (рис. 11,а), причём  $a_0 \ll \lambda$ . Сразу после прохождения УВ через КГ форма прошедшей и отражённой УВ приобретает вид, показанный на рис. 11,б. Очевидно, такая форма сохраняется в течение времени  $t_{c1,2} \ll \lambda/c_{1,2}$ , после чего возмущения на фронте сглаживаются (пунктирные линии на рис. 11,б). Такой же эффект наблюдается и в опытах [6]: после того, как прошедшая или отражённая УВ оказывается на расстоянии порядка  $\lambda$  от КГ, возмущения на фронте практически исчезают. При этом в зависимости от фазы возмущения соответствующему участку границы передаётся положительный или отрицательный импульс.



Обозначим:  $\tilde{D}_3$  – скорость падающей УВ,  $\tilde{D}_1$  – прошедшей,  $\tilde{D}_2$  – отражённой и соответствующие массовые скорости  $\tilde{u}_i$ , измеренные относительно невозмущённой среды. Скорости без тильды измерены в системе отсчёта, в которой КГ после прохождения УВ покоится. Соответственно,  $\rho_i$  – плотности в области  $i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$  – см. рис. 11б).

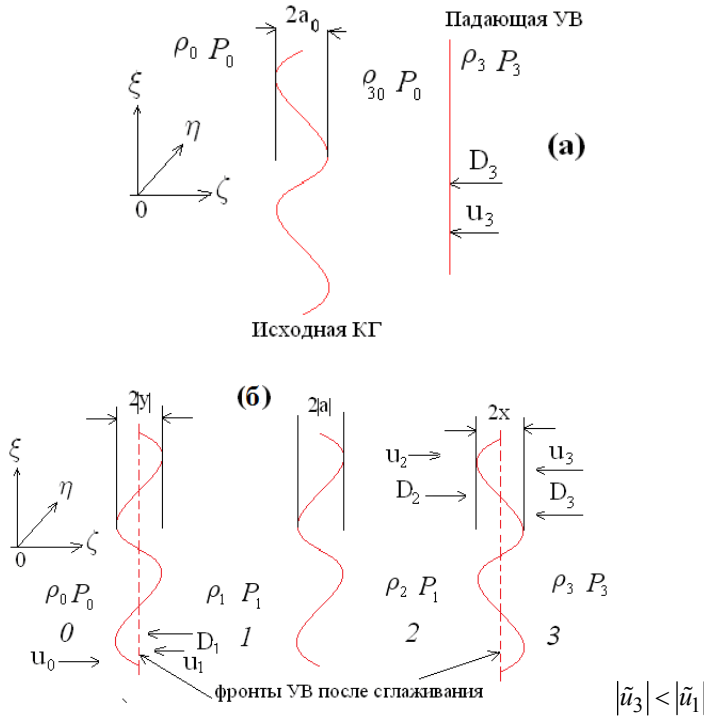


Рис. 11. Схема прохождения УВ

Очевидно,  $u_1 = u_2 = 0$ . Величина  $u_1 - u_2 = u_0$  скорости движения невозмущённого газа в области 0 относительно сжатого в областях 1 и 2

$$u_0 = -\tilde{u}_1 = \sqrt{(P_1 - P_0) \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} \right)}. \quad (1)$$

Скорость  $u_3$  в падающей волне относительно сжатого в области 1 и 2 газа

$$u_3 - u_1 = \tilde{u}_3 - \tilde{u}_1 \quad (2)$$

см. далее

Рассматриваем случай  $|\tilde{u}_3| < |\tilde{u}_1|$  ( $|\tilde{D}_3| < |\tilde{D}_1|$ ).

Дистанцию  $2a_0$  на участке КГ с координатами  $\xi$  в интервале  $(\lambda/2, \lambda)$  падающая УВ со скоростью  $\tilde{D}_3$  проходит за время  $r_3 = \frac{2a_0}{|\tilde{D}_3|}$ , после чего, как и на соседнем участке,  $(0, \lambda/2)$ , устанавливается

прошедшая волна со скоростью  $\tilde{D}_1$ . При этом амплитуда возмущения на фронте прошедшей волны (рис. 11,в) составит:

$$2y = (|\tilde{D}_3| - |\tilde{D}_1|) \cdot r_3 = 2a_0 \cdot \left( 1 - \frac{|\tilde{D}_1|}{|\tilde{D}_3|} \right) < 0, \quad (3)$$

т. е., возмущения на фронте прошедшей волны «переворачиваются» по сравнению с начальной фазой возмущения на КГ.

Амплитуда возмущения на фронте отражённой волны

$$2x = 2a_0 + |\tilde{D}_2| \cdot r_3 = 2a_0 \cdot \left( 1 + \left| \frac{\tilde{D}_2}{\tilde{D}_3} \right| \right). \quad (4)$$

В то же время амплитуда возмущений на КГ будет

$$2a = (|\tilde{u}_3| - |\tilde{u}_1|) \cdot \frac{2a_0}{|\tilde{D}_3|} < 0. \quad (5)$$

Это означает, что возмущения и на КГ «переворачиваются» (11,б).

В результате сглаживания фронтов УВ за время  $t_{c1,2} \sim \lambda/c_{1,2}$  участки фронтов УВ  $(0, \lambda/2)$  потеряют, а участок КГ приобретёт (участок  $(\lambda/2, \lambda)$  потеряет) импульс на единицу длины в направлении  $\eta$ , поперечном к плоскости рис. 11:

$$\delta\Pi_1 = -\rho_0 \cdot u_0 \cdot |y| \cdot \lambda/\pi - \rho_3 \cdot u_3 \cdot x \cdot \lambda/\pi = -\frac{a_0 \cdot \lambda}{\pi} \cdot \left[ \rho_0 \cdot u_0 \cdot \left( \left| \frac{\tilde{D}_1}{\tilde{D}_3} \right| - 1 \right) + \rho_3 \cdot u_3 \cdot \left( 1 + \left| \frac{\tilde{D}_2}{\tilde{D}_3} \right| \right) \right]. \quad (6)$$

Каждый из указанных участков синусоиды  $(0, \lambda/2)$  и  $(\lambda/2, \lambda)$  далее движется при  $\tilde{t} > t_{c1,2}$  как тело с присоединённой массой (на единицу длины в направлении  $\eta$ )  $\delta m$ . Оценим эту массу, учитывая, что в приближении несжимаемости и малости амплитуды гармоника решение в области  $\zeta > 0$  имеет вид:

$$u_\zeta = u_{\zeta 0}(t) \cdot \sin(k \cdot \xi) e^{-k \cdot \zeta}, \quad (7)$$

$$u_\zeta = -u_{\zeta 0}(t) \cdot \cos(k \cdot \xi) e^{-k \cdot \zeta}, \quad (8)$$

а в области  $\zeta < 0$ :

$$u_\zeta = u_{\zeta 0}(t) \cdot \sin(k \cdot \xi) e^{k \cdot \zeta}, \quad (9)$$

$$u_\zeta = -u_{\zeta 0}(t) \cdot \cos(k \cdot \xi) e^{k \cdot \zeta}. \quad (10)$$

Здесь  $k = 2\pi/\lambda$ . Импульс в области  $(0, \lambda/2)$ ,  $\zeta > 0$ :

$$P_{\zeta+} = \rho_2 \cdot \int_{\zeta=0}^{\infty} d\zeta \int_{\xi=0}^{\lambda/2} u_\zeta \cdot d\xi = 2 \cdot \frac{\rho_2 \cdot u_{\zeta 0}(t)}{k^2}. \quad (11)$$

В области  $(0, \lambda/2)$ ,  $\zeta < 0$  в силу симметрии  $u_\zeta$  относительно  $\zeta$  выражение для импульса имеет вид

$$P_{\zeta-} = \rho_1 \cdot \int_{-\infty}^{\zeta=0} d\zeta \int_{\xi=0}^{\lambda/2} u_\zeta \cdot d\xi = 2 \cdot \frac{\rho_1 \cdot u_{\zeta 0}(t)}{k^2}. \quad (12)$$

Итак, полный импульс участка  $(0, \lambda/2)$  равен:

$$P_\zeta = 2 \cdot \frac{(\rho_1 + \rho_2) \cdot u_{\zeta 0}(t)}{k^2}. \quad (13)$$

Аналогично, кинетическая энергия в области  $(0, \lambda/2)$ ,  $\zeta > 0$

$$T_+ = \rho_2 \cdot \int_{\zeta=0}^{\infty} d\zeta \int_{\xi=0}^{\lambda/2} \frac{u_\zeta^2}{2} \cdot d\xi = \rho_2 \cdot \frac{u_{\zeta 0}^2(t)}{2} \cdot \int_{\zeta=0}^{\infty} e^{-2k\zeta} d\zeta \int_{\xi=0}^{\lambda/2} d\xi = \frac{\lambda \cdot \rho_2 \cdot u_{\zeta 0}^2(t)}{8 \cdot k}, \quad (14)$$

а кинетическая энергия в области  $(0, \lambda/2)$ ,  $\zeta < 0$ :

$$T_- = \rho_1 \cdot \int_{\zeta=-\infty}^{\zeta=0} d\zeta \int_{\xi=0}^{\lambda/2} \frac{u_\zeta^2}{2} \cdot d\xi = \frac{\lambda \cdot \rho_1 \cdot u_{\zeta 0}^2(t)}{8 \cdot k}. \quad (15)$$

Итак, полная кинетическая энергия участка  $(0, \lambda/2)$  равна

$$T = \frac{\lambda \cdot (\rho_1 + \rho_2) \cdot u_{\zeta 0}^2(t)}{8 \cdot k}. \quad (16)$$

Из соотношения

$$T = \frac{P_\zeta^2}{2 \cdot \delta m} \quad (17)$$

находим присоединённую массу  $\delta m$

$$\delta m \approx 2 \cdot (\rho_1 + \rho_2) \cdot \frac{\lambda^2}{\pi^3}, \quad (18)$$

поэтому приобретённая скорость равна

$$\delta v_i \approx \frac{\Pi_i}{\delta m}. \quad (19)$$

Отсюда и из (6) – (18) получим

$$\delta v_1 \approx \frac{\pi^2 \cdot a_0}{2 \cdot \lambda \cdot (\rho_1 + \rho_2)} \cdot \left[ \rho_0 \cdot u_0 \cdot \left( 1 - \left| \frac{\tilde{D}_1}{\tilde{D}_3} \right| \right) - \rho_3 \cdot u_3 \cdot \left( 1 + \left| \frac{\tilde{D}_2}{\tilde{D}_3} \right| \right) \right], \quad (20)$$

**Для 3D возмущений скорости роста возмущений будет отличаться лишь множителем порядка единицы.**

Как можно видеть, оценка для турбулентной скорости

$$k \approx \frac{1}{2} \sum_i (\delta v_i - \langle \delta v \rangle)^2, \quad (21)$$

где  $\delta v_2 = -\delta v_1$

$$\langle \delta v \rangle = \frac{\delta v_1 + \delta v_2}{2} = 0. \quad (22)$$

Тогда из (8) – (11) следует:

$$k \approx \delta v_1^2. \quad (23)$$

Мы рассматриваем случай распространения УВ из тяжёлой среды в лёгкую (из HALAR в СНО). В этом случае отражённая волна есть волна разрежения, а её массовая скорость  $U$  и скорость распространения в области 2:

$$\tilde{D}_2 = \sqrt{\frac{\gamma P_3}{\rho_3}} + \tilde{u}_3, \quad (24)$$

$$U = |\tilde{u}_1 - \tilde{u}_3|. \quad (25)$$

Соотношения для плотностей и давлений по обе стороны «фронта» (учтём, что  $P_1 = P_2$ ) имеют следующий вид (см. [7]):

$$\frac{\rho_2}{\rho_3} = \left[ 1 - \frac{(\gamma - 1)}{2} \cdot \frac{|u_1 - u_3|}{\sqrt{\gamma P_3 / \rho_3}} \right]^{2/\gamma - 1}, \quad (26)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_3} = \left[ 1 - \frac{(\gamma - 1)}{2} \cdot \frac{|u_1 - u_3|}{\sqrt{\gamma P_3 / \rho_3}} \right]^{2/\gamma - 1}. \quad (27)$$

Далее:

$$\tilde{u}_1 = -\sqrt{(P_1 - P_0) \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} \right)}, \quad (28)$$

$$\tilde{D}_1 = -\sqrt{\frac{(\gamma_i - 1) \cdot P_0 + (\gamma_i + 1) \cdot P_1}{2\rho_0}}, \quad (29)$$

$$\rho_1 = \rho_0 \cdot \frac{(\gamma_i + 1) \cdot P_1 + (\gamma_i - 1) \cdot P_0}{(\gamma_i - 1) \cdot P_1 + (\gamma_i + 1) \cdot P_0}. \quad (30)$$

Решение (27) и (28) можно получить итерациями, задавая в качестве первого приближения  $P_{10} = P_3$  для (28) и (30). Далее из (27) получаем промежуточное значение  $P_1$ , следующее приближение в итерации:  $P_{10} = (P_1 - P_{10})/3 + P_{10}$ . В результате находим  $P_1 = 0,0491 < P_3 = 0,2723$ .

Оценка возмущения  $\delta v_1$  скорости сразу после прохождения УВ имеет вид (20), в нашей задаче  $\lambda = 0,003$  (30 мкм),  $a_0 = 0,0003$  (3 мкм). Значение  $\tilde{D}_3 = 0,445$ , после чего:

$$P_3 = \frac{2 \cdot \rho_{30} \cdot \tilde{D}_3^2 - (\gamma - 1) \cdot P_0}{\gamma + 1}, \quad (31)$$

$$\rho_3 = \rho_{30} \cdot \frac{(\gamma + 1) \cdot P_3 + (\gamma - 1) \cdot P_0}{(\gamma - 1) \cdot P_3 + (\gamma + 1) \cdot P_0}. \quad (32)$$

Из (20) следует  $\delta v_1 = -0,1214 < 0$ . В соответствии с рис. 11 это означает, что амплитуда возмущения на КГ растёт после первоначального «опрокидывания». Начальная величина турбулентной энергии на КГ СНО-Halar  $k_0 \approx \delta v_1^2 / 2 \approx 0,00735$ . Начальный масштаб турбулентности  $\lambda_0 \approx 3 \cdot 10^{-3}$  (30 мкм). Учти-

тывая, что коэффициент турбулентной вязкости  $D \approx \lambda \cdot \sqrt{k} = c_D \cdot \frac{k^2}{\varepsilon}$ , где  $c_D = 0,12$  (см. [1]), получим

начальное значение скорости диссипации  $\varepsilon_0 = c_D \cdot \frac{k^{3/2}}{\lambda} \approx 0,0252$ . Полученные таким образом оценки

использовались в качестве начальных данных в 1D расчёте 2 (см. раздел 2.1).

Начальное значение ширины ЗТП  $L_0 \approx 2a_0 = 0,0006$  (6 мкм). Будем полагать, что затухание турбулентности происходит так же, как для однородного случая изотропной турбулентности. Со-

гласно [1] для турбулентного пространственного масштаба:  $\frac{\lambda}{\lambda_0} = \left( \frac{t + t_0}{t_0} \right)^\delta$ , где  $t_0 = m \cdot \frac{k_0}{\varepsilon_0}$ ,  $m = 10/7$ ;

$\delta = 2/7$ . Аналогично для ширины ЗТП

$$\frac{L}{L_0} = \left( \frac{t + t_0}{t_0} \right)^\delta, \quad (33)$$

Здесь время отсчитывается от момента  $t_1$  прихода УВ на КГ Halar-СНО, которое, как видно из рис. 8, 10, составляет около 3 нс.

Соотношение (33) имеет место для несжимаемой среды, в нашем случае имеет место адиабатическое (с  $\gamma \approx 1,4$ ) падение плотности со временем из-за падения давления  $P(t)$  после момента  $t_1 \approx 3$  нсек (см. рис. 16). То есть вместо (33) будем полагать

$$\frac{L}{L_0} = \left( \frac{t + t_0}{t_0} \right)^\delta \cdot \left( \frac{P(t)}{P_1} \right)^{-1/\lambda}, \quad (34)$$

где  $P_1 = P(t)$ .

Результаты вычислений по (34) приведены на рис. 12. Наблюдается удовлетворительное согласие как с эталонными 2D и 3D расчётами, так и с измерениями.

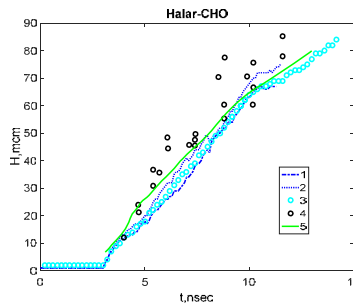


Рис. 12. Зависимость от времени ширины ЗТП на границе раздела Halar-СНО. Расчёты: 1-2 – 2D расчёты 4-5, соответственно; 3 – 3D расчёт 3; 4 – измерения [3]; 5 – приближённое аналитическое рассмотрение

## Заключение

Расчёты опытов [3] на установке NOVA (Ливермор) для плоской геометрии в случае аблятора Halar показали:

1)  $R - t$  диаграммы УВ и границ раздела очень слабо зависят от постановки расчётов, в частности:

а) Все 3D и 2D варианты практически совпадают между собой по положению УВ и границы раздела СНО-Halar. Эти величины довольно близки и к результатам 1D расчётов, а также к данным измерений. Однако разброс экспериментальных точек такой большой, что эта величина может относиться и к границе раздела СНО-Halar.

б) Все 2D и 3D варианты близки между собой по положению КГ вакуум-Halar, и согласуются с измерениями.

2) Наиболее информативны экспериментальные данные [3] по ширине ЗТП на границе СНО-Halar. Все 2D и 3D варианты расчётов, в которых в начальных условиях случайно возмущалась КГ Halar-СНО (в соответствии с данными [3]) показывают удовлетворительное согласие с измерениями. Следует также отметить, что не удаётся получить такого согласия с измерениями в тех 2D и 3D расчётах, в постановке которых не задавалось возмущение КГ СНО-Halar.

3) Получено приближённое аналитическое решение для ширины ЗТП, согласующееся с эталонными 2D и 3D расчётами и с измерениями.

В целом, полученные результаты указывают на необходимость дальнейшего развития используемых физических моделей плазмы и ТП. В то же время видно, что экспериментальные данные требуют уточнения и дополнения.

## Литература

1. Гужова А. Р., Павлунин А. С., Стаценко В. П. Уточнение констант  $k - \varepsilon$  модели турбулентности на основе результатов прямого численного моделирования простейших турбулентных течений и измерений // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Теоретическая и прикладная физика. – 2005. – Вып.3. – С. 37 – 48.
2. Barnes C. W. et al. Observation of mix in a compressible plasma in a convergent cylindrical geometry // Physics of Plasmas. – 2002. – V. 9. – P. 4431.
3. Dimonte G., Schneider M. Turbulent Richtmyer-Meshkov instability experiments with strong radiatively driven shocks // Physics of Plasmas. – 1997. – V. 4. – P. 4347 – 4357.
4. Стаценко В. П., Третьяченко Ю. В., Елисеев Г. М., Быковникова Н. В., Янилкин Ю. В. Численное моделирование турбулентного перемешивания в плоском опыте на лазерной установке NOVA // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Теоретическая и прикладная физика. – 2016. – Вып.4. – С. 55 – 63.
5. Янилкин Ю. В., Шанин А. А., Ковалёв Н. П. и др. Комплекс программ ЭГАК для расчётов двумерных течений многокомпонентной среды // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 1993. – Вып. 4. – С. 69 – 75.
6. Мешков Е. Е. Неустойчивость границы раздела двух газов, ускоряемой ударной волной // Изв. АН СССР. Серия: Механика жидкости и газа. – 1969. – № 5. – С. 151 – 158.
7. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, – М.: Наука, 1966.
8. Долголёва Г. В. // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Методики и программы решения задач математической физики. – 1983. – Вып.2(13). – С. 29.
9. Бельков С. А., Долголева Г. В. // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 1992. – Вып. 1. – С. 59.

## THREE-DIMENSIONAL AND TWO-DIMENSIONAL NUMERICAL SIMULATIONS OF TURBULENT MIXING IN A FLAT-TARGET EXPERIMENT AT THE NOVA LASER FACILITY

*O. G. Sin'kova, V. P. Statsenko, Yu. V. Tretiachenko, Yu. V. Yanilkin, E. A. Novikova*

Russian Federal Nuclear Center –  
All-Russian Research Institute of Experimental Physics, Sarov

The paper presents the results of 1D numerical simulations by the SNDP code, and 1D, 2D and 3D numerical simulations by the EGAK code of a flat-target experiment at the NOVA laser facility (USA). The results are compared with the experiment, in which turbulent mixing was produced. This experiment was designed to test the existing phenomenological models on a high-energy-density problem.

The EGAK computations were carried out using the 3D and 2D direct numerical simulation method. The 1D SNDP and EGAK computations were done with a turbulent model. The results were found to be in close agreement both with each other and with the experimental data and an approximate analytical solution also developed in this work.

*Key words:* EGAK code, turbulent mixing, laser experiment, flat target, radiography.

УДК 519.633.6

## РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ МЕТОДОМ ГОДУНОВА

*И. В. Соболев*

Российский федеральный ядерный центр –  
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров

В докладе рассмотрено численное решение уравнений Максвелла и уравнений идеальной магнитной гидродинамики на неструктурированных сетках методом Годунова.

*Ключевые слова:* уравнения Максвелла, уравнения идеальной магнитной гидродинамики, метод Годунова, неструктурированные сетки.

### Введение

Уравнения электродинамики широко используются в фундаментальных и прикладных научных исследованиях. В последние десятилетия интенсивно развиваются конечно-разностные методы решения этих уравнений. Первоначально разностные схемы использовали ортогональные матричные сетки, но в дальнейшем появилась необходимость расчетов задач в областях сложной формы. Кроме того, моделируемые объекты могут содержать области с различными физическими свойствами и не описываются разностными сетками простой структуры. Наиболее универсальные численные методы получаются введением в счетной области неструктурированной сетки и применением метода конечных объемов.