

нелинейной однофазной фильтрации жидкости и тепломассопереноса в пористых средах // XVI сессия молодежной школы-семинара «Промышленная безопасность и экология»: сб. материалов. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2017. – С.202 – 209.

2. De Saint Venant B. Theorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivieres et a l'introduction des marees dans leur lits // Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences. – 1871. –73. – 148 – 54, 237 – 40.

3. Leandro, J., Chen, A. S., Schumann, A., A 2D Parallel diffusive wave model for floodplain inundation with variable time step (P-DWave) // Journal of Hydrology. – 2014.

4. Néelz S., Pender G. Benchmarking of 2D Hydraulic Modelling Packages // Environment Agency. – June 2010.

A HYDROLOGICAL MODULE IN NIMFA SOFTWARE

A. V. Baranov, O. I. Butnev, M. L. Sidorov, V. A. Pronin

Russian Federal Nuclear Center –
All-Russian Research Institute of Experimental Physics, Sarov

The paper describes a hydrological module of the NIMFA software system consisting of the two blocks which describe the surface runoff process and a flow in open channels. The sphere of application is identified. Problem simulation results and results for two benchmarks are also presented.

Key words: hydrological module, NIMFA, surface runoff, a water flow in open channels.

УДК 519.642.2

НР-СХЕМА (НЕЛИНЕЙНАЯ РЕБЕРНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА) ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

A. С. Баранова, Н. П. Плетенёва, Р. М. Шагалиев

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров

В работе предложен новый подход к построению конечно-разностных схем для численного решения кинетического уравнения переноса частиц – Нелинейная реберная разностная схема. Описывается построение схемы применительно к одномерному и двумерному случаям стационарного уравнения переноса нейтронов в декартовой прямоугольной системе координат.

Представлены результаты численных экспериментов на ряде тестовых задач, в каждой из которых варьировалось количество разбиений пространственной и угловой сеток. Проведен анализ и сравнение результатов, полученных с помощью нового подхода, с результатами, полученными по DD-схеме.

Ключевые слова: одномерное уравнение переноса, одномерное уравнение переноса нейтронов, одномерное одностороннее стационарное уравнение переноса частиц, разностные схемы, кинетическое приближение, DD-схема, двумерное уравнение переноса, двумерное одностороннее стационарное уравнение переноса частиц, нелинейная реберная схема.

Введение

Численное решение многих классов прикладных задач связано с решением уравнения переноса частиц с учётом взаимодействия частиц со средой в кинетической постановке. Многие из указанных классов характеризуются наличием существенно отличающихся по своим оптическим свойствам подобластей в исходной области решения ([1], [2]).

Как известно, в задачах с резко меняющимися градиентами решения схемы аппроксимации существенно повышают требования к качеству сеточных методов решения задач переноса, особенно в пространственно многомерных задачах. Осцилляции, нарушающие физические представления о гладкости и монотонности решения, являются характерными для линейных сеточных методов второго и более высокого порядка аппроксимации, в том числе для схем типа DS_n-метода [3]. Кроме того, подобные ситуации могут приводить к появлению отрицательных потоков [1].

Таким образом, особую актуальность представляет задача построения новых классов разностных схем, которые обеспечивали бы одновременное выполнение таких важных свойств как сохранение положительности (неотрицательности) и монотонности решения исходной задачи, обеспечение второго или более высокого порядка аппроксимации, логически и арифметически простые алгоритмы расчёта ячейки, возможность построения эффективных итерационных методов ускорения.

В работе предложен подход к построению таких схем под названием Нелинейная рёберная схема. Основными особенностями подхода являются:

- введение расширенного сеточного шаблона для искомых функций скалярного потока и потока в фазовом пространстве, включающего значения, как в центрах ячеек разностной сетки, так и на её сторонах. При этом в итерационном процессе по источнику (по правой части) уравнения переноса значения на сторонах ячейки используются только от функции скалярного потока, что существенно снижает требования к объёму используемой оперативной памяти.

- применение в качестве замыкающих соотношений дифференциальных нелинейных уравнений первого порядка с коэффициентами и правыми частями, полученными с помощью специального алгоритма.

В докладе рассматривается применение предложенного метода к одномерному и двумерному случаям стационарного уравнения переноса частиц в декартовой системе координат.

1. Применение нового подхода к решению уравнению переноса в одномерном случае

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим одномерное стационарное одностороннее кинетическое уравнение переноса с заданной правой частью в декартовой системе координат [1]:

$$\mu \frac{\partial N}{\partial x} + \alpha N = F, \quad a < x < b, \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad F(x) = \frac{\beta}{2} n^{(0)} + \frac{Q}{2}, \quad n^{(0)} = \int_{-1}^1 N d\mu, \quad (1)$$

дополненное граничными условиями:

$$\begin{aligned} N(x, \mu) \Big|_{\mu > 0, x=a} &= \varphi_a(\mu) \\ N(x, \mu) \Big|_{\mu < 0, x=b} &= \varphi_b(\mu) \end{aligned}, \quad (2)$$

где x – пространственная координата $x \in [a, b]$; $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(\mu)$ – единичный вектор в направлении полета частиц; $N(x, \mu)$ – поток частиц, летящих в направлении μ ; $n^{(0)}$ – полный поток частиц; $\mu = \cos \theta$, θ – угол между вектором $\vec{\Omega}$ и осью X ; $-1 < \mu < 1$; $Q(x)$ – независимый источник; α – полное макро-

скопическое сечение взаимодействия частиц со средой; β – макроскопическое сечение образования вторичных частиц.

1.2. Запись решения одномерного стационарного уравнения переноса вдоль характеристики

Рассмотрим уравнение (1), запишем оператор переноса как производную вдоль характеристики

$$\mu \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} \frac{dx}{d\xi} = \frac{\partial N}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial N}{\partial \xi} + \alpha N = F(\xi), \quad (3)$$

тогда характеристическая кривая описывается уравнением $x = x_0 + \mu\xi$, где x_0 – константа из интервала $[a; b]$; ξ – параметр (расстояние вдоль характеристики).

Проинтегрируем уравнение (3) по параметру ξ , предварительно умножив его на интегрирующий множитель $e^{\alpha\xi}$. После преобразований получаем соотношение:

$$N(x, \mu) = N(x_0, \mu) e^{-\alpha \frac{x-x_0}{\mu}} + \frac{1}{\mu} e^{-\alpha \frac{x}{\mu}} \int_{x_0}^x F(x') \cdot e^{\alpha \frac{x'}{\mu}} \cdot dx'. \quad (4)$$

Полученное уравнение описывает перенос решения уравнения (1) вдоль характеристики $x = x_0 + \mu\xi$ из точки x_0 в точку x .

1.3. Построение Монотонной рёберной схемы применительно к одномерному случаю

Сетка по переменной x задается координатами x_k , где $k = 0, 1, \dots, n$ по переменной μ на интервале $-1 \leq \mu \leq 1$. Рассмотрим некоторую произвольную ячейку сетки (рис. 1).

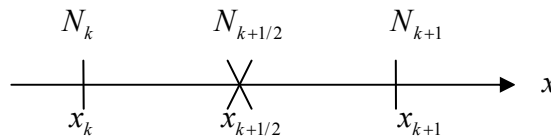


Рис. 1. Ячейка расчётной сетки

Сеточные значения искомого решения задаются (определяются) в каждой ячейке расчётной сетки в граничных точках и в центре, при этом между центром и неизвестным для данного направления узлом задаётся связь $n^{(0)}$ в виде линейной функции, т. е. в виде: $n^{(0)} = cx + d$ (5), где c и d находим, зная $n^{(0)}$ с предыдущей итерации.

Сеточное решение внутри каждой ячейки находится с помощью двух разностных уравнений. Приведём их вывод.

1.3.1. Вывод уравнения 1

Запишем уравнение (1) в интервале $[x_k; x_{k+1}]$:

$$\mu \frac{N_{k+1} - N_k}{\Delta x} + \alpha N_{k+\frac{1}{2}} = F_{k+\frac{1}{2}}, \quad \Delta x = x_{k+1} - x_k = h. \quad (6)$$

Перенесём известные значения в правую часть уравнения, а неизвестные оставим в левой части. Тогда получим: $\frac{\mu}{h} N_{k+1} + \alpha N_{k+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\beta}{2} \cdot n_{k+\frac{1}{2}}^{(0)} + \frac{Q}{2} \right) + \frac{\mu}{h} N_k$.

1.3.2. Вывод уравнения 2

Запишем теперь уравнение (4), связывающее значения N в точках $x_{k+\frac{1}{2}}$ и x_{k+1} :

$$N_{k+1} = N_{k+\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{-\alpha}{\mu} \left(x_{k+1} - x_{k+\frac{1}{2}} \right)} + \frac{1}{\mu} \cdot e^{\frac{-\alpha}{\mu} \cdot x_{k+1}} \cdot \int_{x_{k+\frac{1}{2}}}^{x_{k+1}} \left(\frac{\beta}{2} \cdot n^{(0)}(x) + \frac{Q}{2} \right) e^{\frac{\alpha}{\mu} \cdot x} dx. \tag{7}$$

С учётом принятого представления (5) после преобразований и вычисления интеграла получаем:

$$N_{k+1} - e^{\frac{-\alpha}{\mu} \left(x_{k+1} - x_{k+\frac{1}{2}} \right)} \cdot N_{k+\frac{1}{2}} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{c}{2} \cdot \left(x_{k+1} - x_{k+\frac{1}{2}} e^{\frac{-\alpha}{\mu} \left(x_{k+1} - x_{k+\frac{1}{2}} \right)} \right) - \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{\beta \cdot c}{2} \cdot \frac{\mu}{\alpha} - \frac{\beta \cdot d}{2} - \frac{Q}{2} \right) \left(1 - e^{\frac{-\alpha}{\mu} \left(x_{k+1} - x_{k+\frac{1}{2}} \right)} \right).$$

После проделанных вычислений мы имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными, решая которую находим эти неизвестные N_{k+1} и $N_{k+\frac{1}{2}}$, а далее значения $n^{(0)}$. Для конкретного направления полета частиц, полученная система уравнений решается с помощью алгоритма «бегущего счета» [4].

1.5. Результаты расчётов

Численное исследование описанной схемы было проведено на ряде тестовых задач. В рамках данной работы приведём результаты, полученные для теста Рида.

Рассматривается плоскопараллельная одномерная область, состоящая из 5 подобластей с разными параметрами. В качестве граничного условия на левой границе задано зеркальное отражение [1].

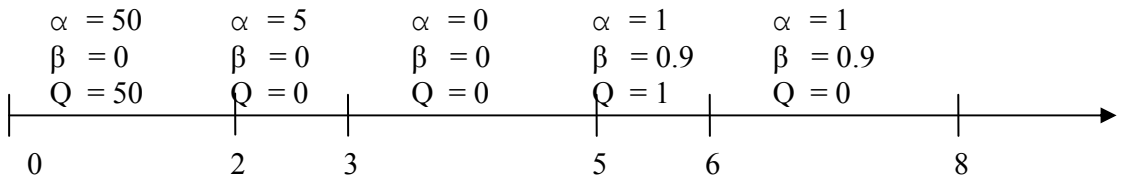


Рис. 2. Геометрия и параметры расчётной системы

На рис. 3–6 приведены результаты расчётов, полученные по HP-схеме и с использованием DD-схемы на разных пространственных сетках (с размером ячеек от 0,5 см до 0,015625 см). По угловой переменной взято 8 интервалов. В качестве результата рассматривается скалярный поток $n^{(0)}$. За точное решение принято решение, полученное по DD-схеме на сетке, с шагом по пространственной переменной 0,00390625.

Видно, что при измельчении сетки результаты, полученные с использованием HP и DD схем, становятся всё более близкими. При этом видно, что решение, полученное по HP-схеме не имеет нефизических осцилляций (рис. 6), в отличие от решения, полученного при использовании DD-схемы. Кроме того, в расчётах, проведённых для данной тестовой задачи, с использованием DD-схемы на границе раздела сред встречаются ситуации, когда срабатывает балансное зануление, которое является неотъемлемой частью DD-схемы. HP-схема в подобных ситуациях обеспечивает положительное решение.

Также в качестве результата рассматривалось количество частиц в системе. Далее представлены графики сходимости по пространственным переменным при фиксированном количестве направлений ($kol_n = 2$), по угловым переменным при фиксированном разбиении по пространству ($h = 0.5$) и на сгущающихся по пространству и углу сетках.

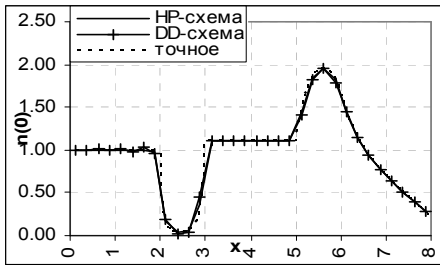


Рис. 3. Профиль решения на сетке $h = 0,5$

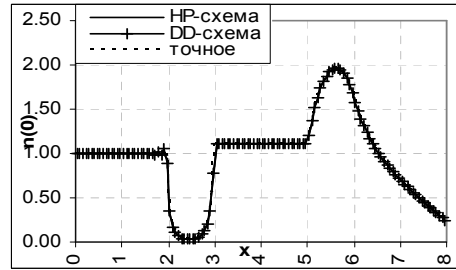


Рис. 4. Профиль решения на сетке $h = 0,0625$

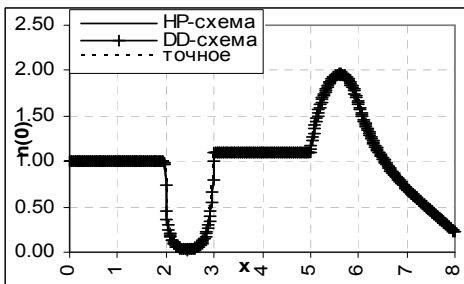


Рис. 5. Профиль решения на сетке $h = 0,015625$

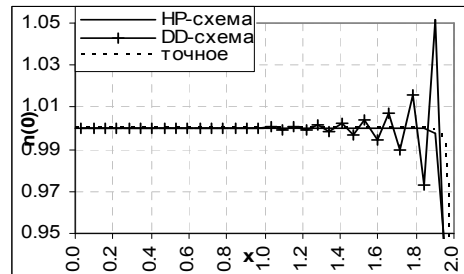
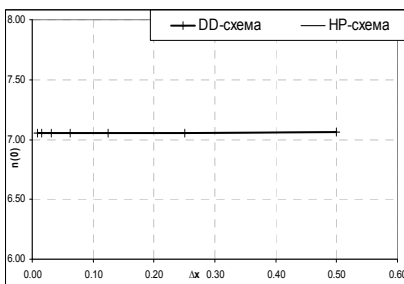
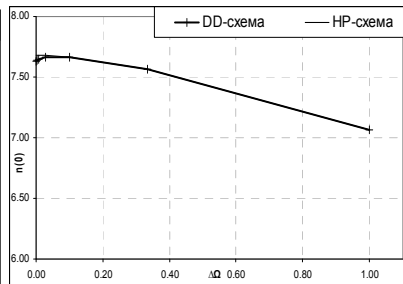


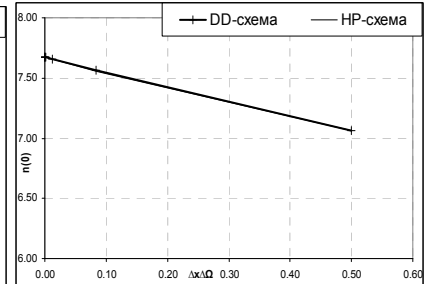
Рис. 6. Профиль решения на сетке $h = 0,0625$ на отрезке $[1, 2]$



a



b



c

Рис. 7. Графики сходимости: a – по пространственным переменным, b – по угловым переменным, c – по пространственным и угловым переменным

Видно, что при измельчении сетки результаты, полученные с использованием HP-схемы и DD-схемы, сходятся к одному решению. При этом HP-схема показала монотонное и положительное решение.

2. Применение нового подхода к решению уравнения переноса в двумерном случае

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим двумерное стационарное кинетическое уравнение переноса для одной группы с заданной изотропной правой частью в декартовой системе координат для одного направления полета частиц [1]:

$$\xi_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial N_k}{\partial y} + \alpha N_k = \frac{\beta}{2\pi} n^{(0)} + \frac{Q}{2\pi}, \quad n^{(0)} = \int_0^1 d\mu \int_0^{2\pi} N(x, y, \mu, \varphi) d\varphi, \quad (8)$$

где x, y – декартовы координаты положения частицы; $\vec{\Omega}(\mu, \varphi)$ – единичный вектор в направлении полёта частицы; φ – угол между проекцией вектора $\vec{\Omega}(\mu, \varphi)$ на плоскость XOY и осью OX ; $\mu = \cos \theta$, где θ – угол между вектором $\vec{\Omega}$ и осью OZ ; k – номер направления полёта частиц; $N(x, y, \mu, \varphi)$ – поток частиц, летящих в направлении $\vec{\Omega}$; $\Omega_x = \xi = \sqrt{1-\mu^2} \cdot \cos \varphi$ – проекция вектора $\vec{\Omega}$ на ось OX ; $\Omega_y = \eta = \sqrt{1-\mu^2} \cdot \sin \varphi$ – проекция вектора $\vec{\Omega}$ на ось OY ; α – полное макроскопическое сечение взаимодействия частиц со средой; β – макроскопическое сечение образования вторичных частиц; $Q(x, y)$ – независимый источник частиц.

Уравнение (8) решается в области фазового пространства: $D = \{(x, y) \in \Pi, 0 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, где $\Pi = [A_1 \leq x \leq A_2] \times [B_1 \leq y \leq B_2]$.

2.2. Запись решения двумерного стационарного уравнения переноса вдоль характеристики

Аналогично одномерному случаю запишем в уравнении (8) оператор переноса как производную вдоль характеристики. Полученное уравнение проинтегрируем с помощью интегрирующего

множителя $e^{\frac{\alpha u}{\sqrt{1-\mu^2}}}$. Здесь u – расстояние вдоль характеристики. В результате мы приходим к следующему соотношению:

$$N(x, y) = N(x_0, y_0) \cdot e^{\frac{-\alpha u}{\sqrt{1-\mu^2}}} + e^{\frac{-\alpha u}{\sqrt{1-\mu^2}}} \cdot \int_0^u \frac{F}{\sqrt{1-\mu^2}} \cdot e^{\frac{\alpha u'}{\sqrt{1-\mu^2}}} du', \quad x = x_0 + u \cos \varphi, \quad y = y_0 + u \sin \varphi, \quad (9)$$

где x_0, y_0 – произвольные константы, $u' \in [0; u]$ ($[1, 5]$).

2.3. Построение Нелинейной рёберной схемы применительно к двумерному случаю

Представим, что построена ортогональная пространственная сетка Π , состоящая из M прямоугольников (ячеек) и рассмотрим некоторую фиксированную ячейку сетки (рис. 8). Опишем подход к построению и решению системы уравнений для конкретного направления $\vec{\Omega}_k$.

Сеточная аппроксимация уравнения переноса осуществляется внутри полученных ячеек. Сеточные значения искомого решения задаются (определяются) в каждой ячейке расчётной сетки в центральных точках сторон и в центре ячейки, т. е. в точках $p_{12}, p_{23}, p_{34}, p_{41}$ и p_0 (рис. 8). Между $n^{(0)}$ в центре ячейки и двумя центральными точками неосвещённых сторон задаётся связь в виде линейной функции, т. е. в виде: $n^{(0)}_{p_n p_m} = c_{p_n p_m} \cdot p + d_{p_n p_m}$ (10), где $c_{p_n p_m}, d_{p_n p_m}$ находим, зная $n^{(0)}$ с предыдущей итерации, p – локальная координата точки, лежащей на отрезке $p_n p_m$.

Сеточное решение внутри каждой ячейки находится в два этапа.

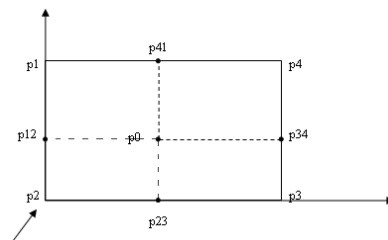


Рис. 8. Ячейка исходной пространственной сетки

2.3.1. Первый этап

Запишем уравнение баланса (8) для одного направления (индекс направления «k» опускаем) для четверти $p12, p2, p23, p0$ рассматриваемой ячейки. Применяя интегроинтерполяционный метод [6], формулу Грина [7] и теорему о среднем, получаем для четверти $p12, p2, p23, p0$ разностное уравнение:

$$0,5 \cdot R_{p1p2} \cdot N_{p12} + 0,5 \cdot R_{p2p3} \cdot N_{p23} + 0,5 \cdot R_{p3p4} \cdot N_{p34} + 0,5 \cdot R_{p4p1} \cdot N_{p41} + s_{1/4} \cdot \alpha \cdot \hat{N}_{p0} = s_{1/4} \cdot F_{p0},$$

где $R_{p1p2}, R_{p2p3}, R_{p3p4}, R_{p4p1}$ освещённости сторон $p1p2, p2p3, p3p4, p4p1$ соответственно, $S_{1/4}$ – площадь четверти ячейки. Правая часть F получается с использованием значения $n^{(0)}$, взятого с предыдущей итерации $F_{p0} = \frac{\beta}{2\pi} \cdot n_{p0}^{(0)} + \frac{Q}{2\pi}$.

Далее, воспользовавшись дополнительными соотношениями для схемы первого порядка [1], находим значение в центре ячейки \hat{N}_{p0} .

$$\hat{N}_{p0} = \frac{s_{1/4} \cdot F_{p0} - (0,5 \cdot R_{p1p2} \cdot N_{p12} + 0,5 \cdot R_{p2p3} \cdot N_{p23})}{s_{1/4} \cdot \alpha + 0,5 \cdot R_{p3p4} + 0,5 \cdot R_{p4p1}}. \quad (11)$$

2.3.2. Второй этап

Рассмотрим уравнение (8) для одного направления: $\xi \frac{\partial N}{\partial x} + \eta \frac{\partial N}{\partial y} + \alpha N = F$.

Проинтегрируем (8) по переменной $x \in [p12; p0]$ внутри ячейки разностной сетки.

$$\xi \cdot (\hat{N}_{p0} - N_{p12}) + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{p12}^{p0} N(x, y) \cdot dx \right) + \alpha \int_{p12}^{p0} N(x, y) \cdot dx = \frac{\beta}{2\pi} \cdot \int_{p12}^{p0} n^{(0)}(x, y) \cdot dx + \int_{p12}^{p0} \frac{Q}{2\pi} \cdot dx.$$

При этом в качестве N в точке $p0$ выбирается значение \hat{N}_{p0} , найденное на первом этапе:

$$\frac{\xi}{0,5 \cdot \Delta x} \cdot (\hat{N}_{p0} - N_{p12}) + \eta \cdot \frac{\partial \bar{N}(y)}{\partial y} + \alpha \cdot \bar{N}(y) = \frac{\beta}{2\pi} \cdot \bar{n}^{(0)}(y) + \frac{Q}{2\pi}. \quad (12)$$

Здесь $\bar{N}(y) = N(\bar{x}, y)$, где $\bar{x} = x_{p0}$, аналогично $\bar{n}^{(0)}(y)$.

$$\text{Рассмотрим } \frac{\xi}{0,5 \cdot \Delta x} \cdot (\hat{N}_{p0} - N_{p12}) = \frac{\xi}{0,5 \cdot \Delta x} \cdot (\hat{N}_{p0} - N_{p12}) \cdot \frac{\bar{N}(y)}{\hat{N}_{p0}} \approx \frac{\xi}{0,5 \cdot \Delta x} \cdot \frac{(\hat{N}_{p0} - N_{p12})}{\hat{N}_{p0}} \cdot \bar{N}(y) \quad (13)$$

$$\text{Тогда имеем } \eta \cdot \frac{\partial \bar{N}(y)}{\partial y} + \left[\alpha + \frac{\xi}{0,5 \cdot \Delta x} \cdot \frac{(\hat{N}_{p0} - N_{p12})}{\hat{N}_{p0}} \right] \cdot \bar{N}(y) = \frac{\beta}{2\pi} \cdot \bar{n}^{(0)}(y) + \frac{Q}{2\pi}.$$

$$\text{Аналогично можем получить } \xi \cdot \frac{\partial \bar{N}(x)}{\partial x} + \left[\alpha + \frac{\eta}{0,5 \cdot \Delta y} \cdot \frac{(\hat{N}_{p0} - N_{p23})}{\hat{N}_{p0}} \right] \cdot \bar{N}(x) = \frac{\beta}{2\pi} \cdot \bar{n}^{(0)}(x) + \frac{Q}{2\pi}.$$

$$\text{Введём обозначения } \alpha_{41} = \alpha + \frac{\xi}{0,5 \cdot \Delta x} \cdot \frac{(\hat{N}_{p0} - N_{p12})}{\hat{N}_{p0}}, \quad \alpha_{34} = \alpha + \frac{\eta}{0,5 \cdot \Delta y} \cdot \frac{(\hat{N}_{p0} - N_{p23})}{\hat{N}_{p0}}.$$

Тогда приходим к следующему виду:

$$\eta \cdot \frac{\partial \bar{N}(y)}{\partial y} + \alpha_{41} \cdot \bar{N}(y) = \frac{\beta}{2\pi} \cdot \bar{n}^{(0)}(y) + \frac{Q}{2\pi}, \quad \xi \cdot \frac{\partial \bar{N}(x)}{\partial x} + \alpha_{34} \cdot \bar{N}(x) = \frac{\beta}{2\pi} \cdot \bar{n}^{(0)}(x) + \frac{Q}{2\pi}.$$

Решение полученных дифференциальных уравнений согласно пункту 2. 2., найдём с помощью ин-

тегрирующих множителей $e^{\frac{\alpha_{41}y}{\eta}}$ и $e^{\frac{\alpha_{34}x}{\xi}}$ соответственно. В результате получим следующий вид дополнительных соотношений, связывающих значения N_{p0} , N_{p41} и N_{p0} , N_{p34} .

$$N_{p41} = N_{p0} \cdot e^{\frac{-\alpha_{41}(p41-p0)}{\eta}} + e^{\frac{-\alpha_{41}p41}{\eta}} \cdot \int_{p0}^{p41} \frac{F_{41}}{\eta} \cdot e^{\frac{\alpha_{41}y}{\eta}} dy,$$

$$N_{p34} = N_{p0} \cdot e^{\frac{-\alpha_{34}(p34-p0)}{\xi}} + e^{\frac{-\alpha_{34}p34}{\xi}} \cdot \int_{p0}^{p34} \frac{F_{34}}{\xi} \cdot e^{\frac{\alpha_{34}x}{\xi}} dx.$$

В полученных уравнениях под обозначениями $p41 - p0$ и $p34 - p0$ подразумевается расстояние между двумя соответствующими точками.

Согласно формуле (10) имеем

$$F_{41} = \frac{\beta}{2\pi} \cdot (c_{p0p41} \cdot p + d_{p0p41}) + \frac{Q}{2\pi}, \quad F_{34} = \frac{\beta}{2\pi} \cdot (c_{p0p34} \cdot p + d_{p0p34}) + \frac{Q}{2\pi},$$

где c_{p0p41} , d_{p0p41} находим, зная с предыдущей итерации $n_{p0}^{(0)}$ и $n_{p41}^{(0)}$ в точках $p0$ и $p41$ соответственно, аналогично c_{p0p34} , d_{p0p34} .

Подставляя F_{41} и F_{34} в подынтегральные выражения и проводя интегрирование аналогично одномерному случаю, получим следующий вид двух дополнительных соотношений:

$$N_{p41} = N_{p0} \cdot e^{\frac{-\alpha_{41}u_{41}}{\eta}} + \frac{1}{\alpha_{41}} \cdot \frac{\beta A1}{2\pi} - \frac{1}{\alpha_{41}} \cdot \left[\frac{\beta A1}{2\pi} \cdot \frac{1}{u_{41}} \cdot \frac{\eta}{\alpha_{41}} - \frac{\beta B1}{2\pi} - \frac{Q}{2\pi} \right] \cdot \left(1 - e^{\frac{-\alpha_{41}u_{41}}{\eta}} \right), \quad (14)$$

$$N_{p34} = N_{p0} \cdot e^{\frac{-\alpha_{34}u_{34}}{\xi}} + \frac{1}{\alpha_{34}} \cdot \frac{\beta A2}{2\pi} - \frac{1}{\alpha_{34}} \cdot \left[\frac{\beta A2}{2\pi} \cdot \frac{1}{u_{34}} \cdot \frac{\xi}{\alpha_{34}} - \frac{\beta B2}{2\pi} - \frac{Q}{2\pi} \right] \cdot \left(1 - e^{\frac{-\alpha_{34}u_{34}}{\xi}} \right). \quad (15)$$

здесь u_{41} , u_{34} расстояние между точками $p0$, $p41$ и $p0$, $p34$, $A1 = n_{p41}^{(0)} - n_{p0}^{(0)}$, $B1 = n_{p0}^{(0)}$, $A2 = n_{p34}^{(0)} - n_{p0}^{(0)}$, $B2 = n_{p0}^{(0)}$.

Уравнение баланса на всю ячейку, дополненное соотношениями (14) и (15), представляют систему из трёх уравнений с тремя неизвестными N_{p41} , N_{p34} , N_{p0} , решая которую находим их значения.

$$\begin{cases} R_{p4p1}N_{p41} + R_{p3p4}N_{p34} + s\alpha N_{p0} = sF_{p0} - (R_{p1p2}N_{p12} + R_{p2p3}N_{p23}) \\ N_{p41} - N_{p0} \cdot e^{\frac{-\alpha_{41}u_{41}}{\eta}} = \frac{1}{\alpha_{41}} \cdot \frac{\beta A1}{2\pi} - \frac{1}{\alpha_{41}} \cdot \left[\frac{\beta A1}{2\pi} \cdot \frac{1}{u_{41}} \cdot \frac{\eta}{\alpha_{41}} - \frac{\beta B1}{2\pi} - \frac{Q}{2\pi} \right] \cdot \left(1 - e^{\frac{-\alpha_{41}u_{41}}{\eta}} \right) \\ N_{p34} - N_{p0} \cdot e^{\frac{-\alpha_{34}u_{34}}{\xi}} = \frac{1}{\alpha_{34}} \cdot \frac{\beta A2}{2\pi} - \frac{1}{\alpha_{34}} \cdot \left[\frac{\beta A2}{2\pi} \cdot \frac{1}{u_{34}} \cdot \frac{\xi}{\alpha_{34}} - \frac{\beta B2}{2\pi} - \frac{Q}{2\pi} \right] \cdot \left(1 - e^{\frac{-\alpha_{34}u_{34}}{\xi}} \right) \end{cases} \quad (16)$$

Рассматривая более подробно построенную разностную схему, представляющую собой систему уравнений (16), можно сделать вывод о её нелинейности. Действительно, два дополнительных соотношения, связывающие неизвестные значения N_{p0} , N_{p41} и N_{p0} , N_{p34} , соответственно, имеют слагае-

мые вида $N_{p0} \cdot e^{\frac{-\alpha_{41}u_{41}}{\eta}}$ и $N_{p0} \cdot e^{\frac{-\alpha_{34}u_{34}}{\xi}}$. Из вида α_{41} и α_{34} известно, что они содержат неизвестное значение N_{p0} . Таким образом, подставляя N_{p41} и N_{p34} , полученные из дополнительных соотношений, в первое уравнение системы получаем нелинейную схему.

Первый этап построения данной разностной схемы в таком случае можно считать её линеаризацией, предполагая, что пользуясь (11) получаем некоторое приближение для вычисления значения N в центре ячейки.

2.4. Результаты расчётов

Численное исследование описанной схемы было проведено на ряде тестовых задачах. В рамках данной работы приведём результаты двух из них.

2.4.1. Тестовая задача 1

В области $\Pi = \{0 < x < 16, 0 < y < 16\}$ решается уравнение переноса нейтронов с нулевыми граничными условиями (рис. 9). Итерации сводятся с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

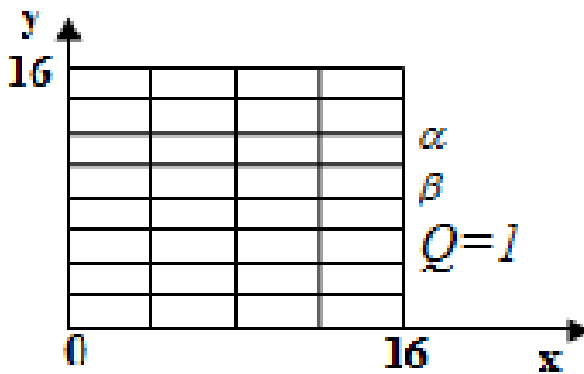


Рис. 9. Схема расчётной области задачи

Начальная пространственная сетка содержит 16 строк и 8 столбцов, а угловая сетка содержит 4 направления полета частиц. Проведена серия расчётов на сгущающихся пространственных и угловых сетках. В качестве результата рассматривается скалярный поток $n^{(0)}$. Результаты, полученные при использовании НР-схемы, сравнивались с результатами, полученными при использовании DD-схемы и St-схемы [8].

Начальное значение полного количества частиц в системе $n^{(0)} = 1$, независимый источник нейтронов $Q = 1$, константы среды $\alpha = 0,01$; $\beta = 0,0099$.

На рис. 10 – 13 приведено пространственное распределение $n^{(0)}$ в столбце ячеек, расположенном справа от координаты $x = 4$ (рис. 9).

Введём обозначения на графиках: kol_n – количество направлений в расчёте; $S_{\text{яч}}$ – площадь ячейки пространственной сетки.

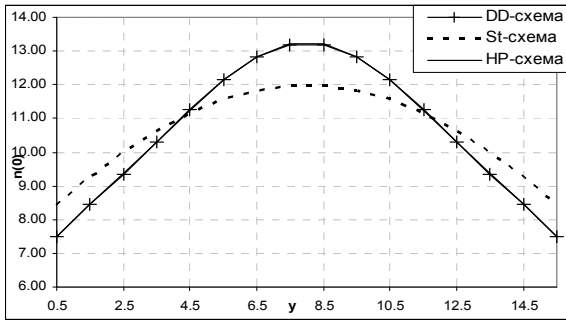


Рис. 10. Профили решения на сетке $16*8$ ($s_{яч} = 2,0 \text{ см}^2$), $kol_n = 4$

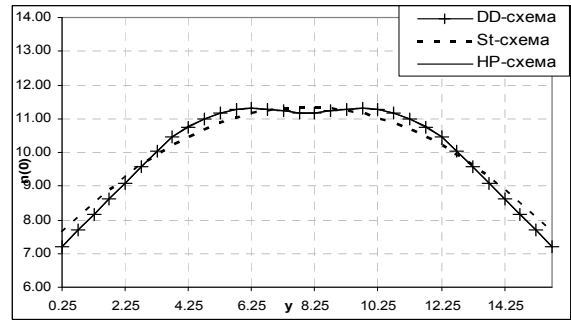


Рис. 11. Профили решения на сетке $32*16$ ($s_{яч} = 0,5 \text{ см}^2$), $kol_n = 4$

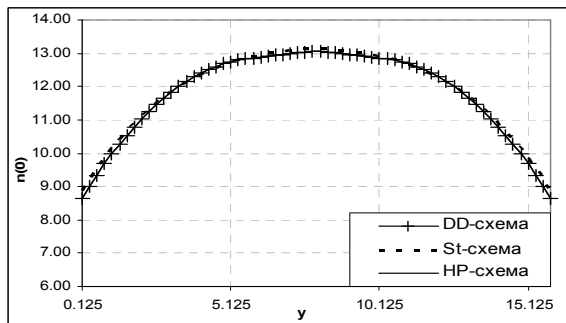


Рис. 12. Профили решения на сетке $32*16$ ($s_{яч} = 0,125 \text{ см}^2$), $kol_n = 12$

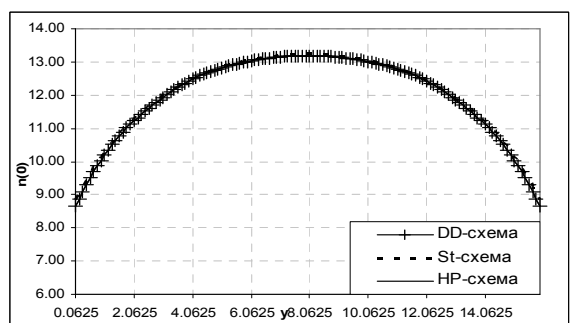


Рис. 13. Профили решения на сетке $128*64$ ($s_{яч} = 0,03125 \text{ см}^2$), $kol_n = 144$

Также в качестве результатов рассматривалось количество частиц в системе. Далее представлены графики сходимости по пространственным переменным с $kol_n = 4$, по угловым переменным на сетке $16*8$ и на сгущающихся по пространству и углу сетках.

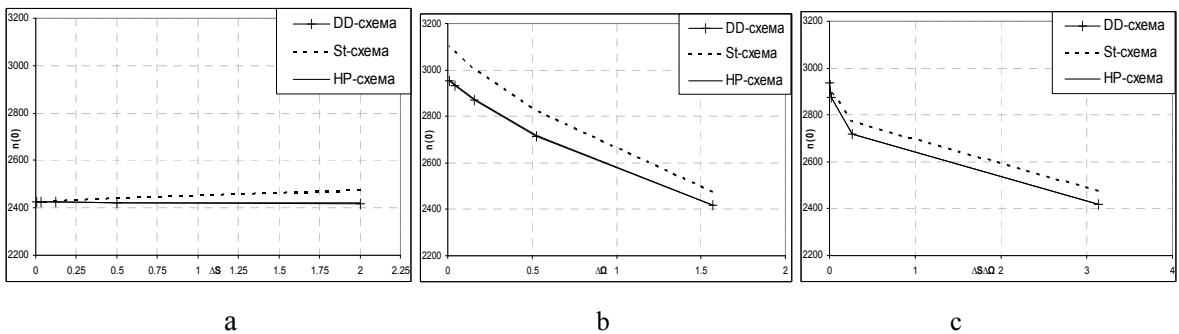


Рис. 14. Графики сходимости: а – по пространственным переменным, б – по угловым переменным, с – по пространственным и угловым переменным

Из полученных результатов видно, что для Задачи 1 имеет место сходимость результатов при измельчении сетки. При этом HP-схема имеет точность, как у DD-схемы. Разница на самой грубой сетке для HP-схемы по сравнению с DD-схемой составляет 0,09 %.

2.4.2. Тестовая задача 2

Постановка данной задачи аналогична постановке Задачи 1. Константы среды $\alpha = 100,0$; $\beta = 99,0$. На рис. 15 – 18 приведено пространственное распределение $n^{(0)}$, полученное в расчетах на сгущающихся сетках по HP, DD и St схемам в столбце ячеек, расположенном справа от координаты $x = 4$ (рис. 9).

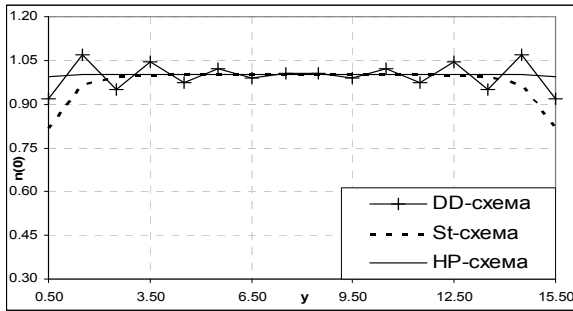


Рис. 15. Профили решения на сетке 16×8 ($s_{яч} = 2,0 \text{ см}^2$), $kol_n = 4$

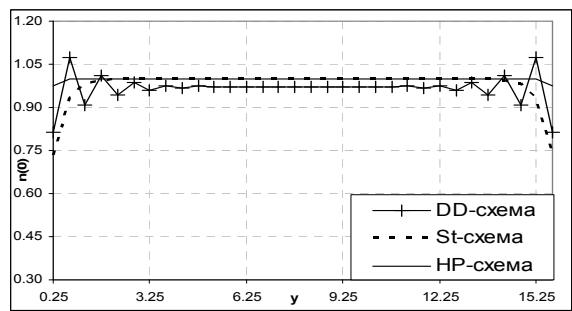


Рис. 16. Профили решения на сетке 32×16 ($s_{яч} = 0,5 \text{ см}^2$), $kol_n = 12$

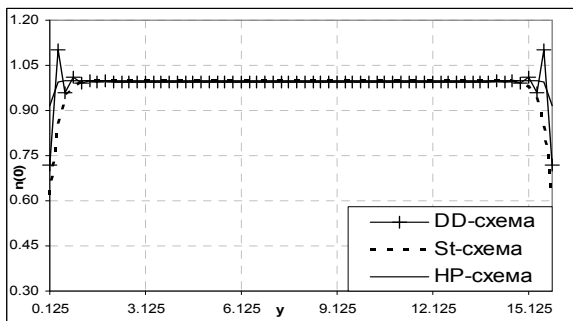


Рис. 17. Профили решения на сетке 64×32 ($s_{яч} = 0,125 \text{ см}^2$), $kol_n = 40$

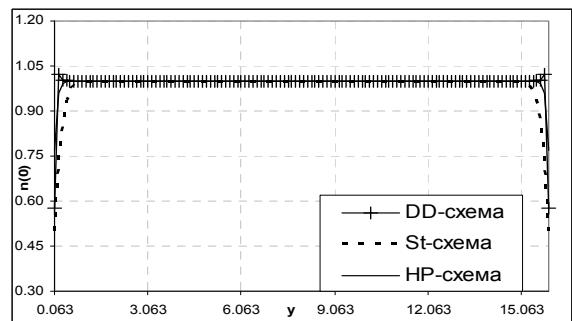


Рис. 18. Профили решения на сетке 128×64 ($s_{яч} = 0,03125 \text{ см}^2$), $kol_n = 144$

Из полученных результатов видно, что решение по DD-схеме на начальных сетках (рис. 15 и 16) отличается сильной немонотонностью. При измельчении пространственной и угловой сеток немонотонность сглаживается. Однако в ячейках на краях системы в решении остаются выбросы. Что касается HP-схемы, то она обеспечивает монотонное решение во всех проведенных расчетах.

Также в качестве результатов рассматривалось количество частиц в системе. На рис. 19, аналогично тестовой задаче 1, представлены графики сходимости.

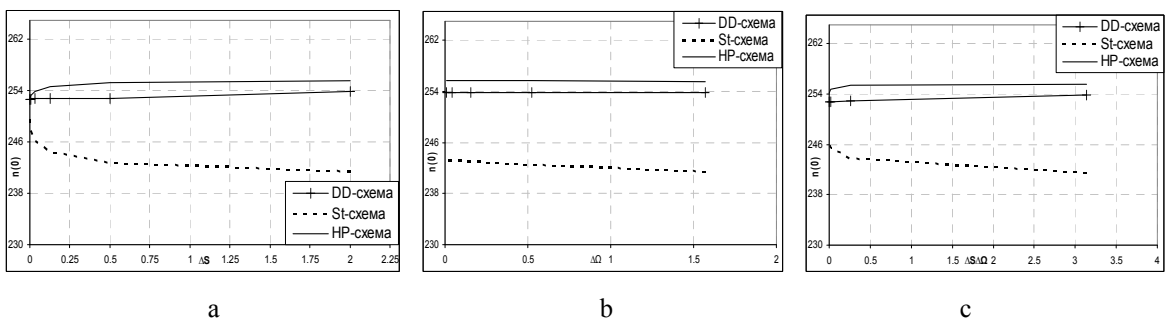


Рис. 19. Графики сходимости: а – по пространственным переменным ($kol_n = 4$), б – по угловым переменным (16×8), с – по пространственным и угловым переменным

Видно, что результаты, полученные по HP-схеме, сходятся при измельчении сетки с результатами, полученными по DD-схеме. При этом разница на самой грубой сетке между DD- и HP-схемами составляет 0,6 %.

Заключение

В работе предложен новый подход к построению конечно-разностных схем для численного решения кинетического уравнения переноса частиц – Нелинейная рёберная разностная схема.

В одномерном случае результаты численных исследований показывают, что HP-схема при сохранении второго порядка точности обеспечивает монотонное и положительное решение.

В случае решения двумерного уравнения переноса HP-схема показала свойства монотонности и положительности. Видно, что при измельчении сетки результаты, полученные с использованием DD- и HP- схем, сходятся к одному решению. Во всех рассмотренных задачах отличие численных результатов HP-схемы и DD-схемы в интегральной норме составляет не более 2 %.

Результаты численных исследований позволяют сделать вывод о перспективности применения при проведении расчетов нелинейной рёберной схемы аппроксимации уравнения переноса. В дальнейшем планируется обобщение и численное обоснование HP – схемы применительно к случаям записи двумерного уравнения переноса в цилиндрической системе координат и трехмерного уравнения переноса в декартовой системе координат.

Литература

1. Басс Л. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А. Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения: Препринт. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1986.
2. Плетенёва Н. П., Шагалиев Р. М. Аппроксимация двумерного уравнения переноса на четырехугольных и многоугольных пространственных сетках по разностной схеме с расширенным шаблоном // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 1989. – Вып.3. – С. 34 – 40.
3. Carlson B. G. The numerical theory of neutron transport // Methods in Computational Physics. V 1. – N. Y.: Acad. Press, 1963.
4. Трошиев В. Е. О классах сеток, допускающих консервативные аппроксимации двумерного оператора переноса треугольным разностным оператором // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. – 1976. – Т. 16, № 3. – С. 793 – 797.
5. Белл Д., Глестон С. Теория ядерных реакторов: перев. с англ. / под ред. В. Н. Артамкина. – М.: Атомиздат, 1974.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977.
7. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Том II. – М., Наука, 1968.
8. Трошиев В. Е., Шумилин В. А. Разностная схема решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных четырехугольных сетках // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. – 1986. – Т. 26, № 2. – С. 230 – 241.

HP-SCHEME (NONLINEAR EDGE DIFFERENCE SCHEME) FOR NUMERICAL SOLUTION OF TRANSFER EQUATIONS

A. S. Baranova, N. P. Pleteneva, R. M. Shagaliyev

Russian Federal Nuclear Center –
All-Russian Research Institute of Experimental Physics, Sarov

The paper offers a new approach to the construction of finite-element schemes for numerical solution of the kinetic equation for particle transfer – a non-linear edge difference scheme. The construction of the scheme for 1D and 2D cases of stationary equation of neutron transfer is described in Cartesian system is described.

There are the results of numerical experiments using a number of benchmark problems, in each of which the refinement of space and angular meshes varied. The results produced with a new approach and the ones obtained using DD-scheme were analyzed and compared.

Key words: 1D transfer equation, 1D neutrons transfer equation, 1D one-group stationary particles transfer equation, difference schemes, kinetic approximation, DD-scheme, 2D transfer equation, 2D one-group stationary particles transfer equation, nonlinear edge scheme.

УДК 004.428

ПРОГРАММА АДАПТИВНОГО ВЫБОРА МЕТОДА РЕШЕНИЯ ПОТОКА СЛАУ В БИБЛИОТЕКЕ PMLP/LPARSOL

Ю. Г. Бартнев, В. А. Ерзунов

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров

В докладе дается описание алгоритмов работы и параметров программы адаптивного выбора метода решения потока СЛАУ в библиотеке PMLP/LParSol. Исследования проведены для нескольких задач различных методик. Результаты счета задач с адаптивным выбором и без него показали, что он может дать существенное ускорение счета задач путем выбора наиболее оптимального метода решения СЛАУ на разных участках счета, отличающихся по сложности и требующих разные методы для решения. А также может освободить пользователя от необходимости подбора оптимального метода решения произвольной задачи и послужить для повышения надежности решения СЛАУ, возникающих в процессе компьютерного моделирования.

Ключевые слова: Система линейных алгебраических уравнений СЛАУ, разреженные матрицы, вычислительные системы с распределенной памятью, вычислительные системы, процессоры, адаптивный выбор метода решения СЛАУ.

Введение

Адаптивный выбор метода решения СЛАУ реализован в составе библиотеки PMLP/LParSol [1] для использования в программных комплексах ИТМФ. Он предназначен для ускорения счёта задач путем выбора оптимального с точки зрения быстродействия метода (среди заданных) решения СЛАУ на разных участках счёта, отличающихся по сложности и соответственно, требующих разные методы для решения. Он в значительной мере освобождает пользователя от необходимости подбора метода решения произвольной задачи и повышает надежность решения СЛАУ, возникающих в процессе счёта.

В ИТМФ РФЯЦ-ВНИИЭФ более 10 лет эксплуатировался предыдущий вариант механизма адаптивного выбора метода решения [2]. С появлением новых вычислительных систем, новых методик, новых методов решения СЛАУ появилась необходимость в совершенствовании механизма выбора метода решения потока СЛАУ. Новый вариант основан на других принципах оценки качества работы того или иного метода решения. В предыдущем варианте механизма адаптивного вы-