

УДК 539.3:534.1

## РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОЛЬЦЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН

С. В. Серёгин  
(ФГБОУ ВО "КнАГУ", г. Комсомольск-на-Амуре)

Представлены результаты исследований динамических характеристик волновых твердотельных гироскопов на примере невращающегося кругового кольца, деформирующегося в своей плоскости. Обнаружено возникновение радиальных форм колебаний в спектре низших частот, соответствующих изгибным формам колебаний. Сделан вывод, что частота радиальных колебаний зависит от физических характеристик кольца, но не зависит от геометрических параметров и вида граничных условий.

*Ключевые слова:* кольцо, изгибные формы, радиальные колебания, частотный спектр, резонанс.

### Введение

Кольцевые элементы используются в виде конструктивных частей машин и аппаратов [1–5]. Особый интерес представляют волновые твердотельные гироскопы (ВТГ). Чувствительным элементом ВТГ является тонкий упругий осесимметричный кольцевой резонатор, совершающий изгибные колебания по основной форме [6–13].

В научной литературе имеются работы по изучению динамического поведения тонких колец. Однако результаты исследований не всегда согласуются с экспериментальными данными. Так, например, в работах [14–17] авторы, предложив уточненный подход к построению математической модели, показали, что некоторые начальные несовершенства формы и присоединенные массы приводят к появлению радиальных форм колебаний. При этом частота, соответствующая радиальным формам колебаний, при определенных геометрических и волновых параметрах кольца может быть соизмерима с низшими частотами, соответствующими изгибным формам колебаний. Полученные новые решения качественно и количественно лучше согласуются с экспериментальными данными, чем общепринятые традиционные решения [18]. Однако численно и экспериментально подтвердить эту особенность до настоящего времени, к сожалению, не удавалось [19–21]. Считается, что частоты радиальных колебаний либо присутствуют в спектре частот, но всегда находятся на частотах высших осцилляций [22–28], либо отсутствуют вовсе [18]. В связи с этим принято считать, что частоты радиальных колебаний не оказывают никакого влияния на напряженно-деформируемое состояние конструкций и поэтому не учитываются при расчетах [18].

В настоящей статье данный вывод поставлен под сомнение. На частных примерах — колебаниях изолированного кольца — показано, что частоты радиальных колебаний могут быть не только одного порядка с частотами изгибных колебаний, как показано в [14–17] для кольца и в [14, 17, 22, 26–28] для оболочки конечной длины, но и могут находиться в спектре низших частот (второго, третьего тонов), соответствующих изгибным формам колебаний.

### Математическая модель

Бесконечно длинную круговую цилиндрическую оболочку, для которой все поперечные сечения деформируются одинаково, можно рассматривать как кольцо единичной ширины, выделенное из оболочки двумя сечениями, перпендикулярными к ее оси. Уравнения, описывающие поперечные колебания кольца, получим из аналогичных уравнений теории пологих оболочек [14, 18] при устремлении длины оболочки к бесконечности:

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} = 0; \quad D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\partial}{\partial y} \left( N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{N_y}{R} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $w(y, t)$  – упругий динамический прогиб;  $D = Eh^3 / [12(1 - \mu^2)]$  – цилиндрическая жесткость,  $E$  – модуль Юнга,  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $\rho$  – массовая плотность;  $R, h$  – радиус и толщина кольца;  $t$  – время.

Из уравнения (1) следует, что окружное погонное динамическое усилие  $N_y$  зависит только от времени:

$$N_y(y, t) = N_y(t) = \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) = \frac{Eh}{1 - \mu^2} \alpha(t). \quad (2)$$

*Условие периодичности решения.* Величины, определяющие напряженно-деформированное состояние, должны возвращаться к первоначальным значениям после обхода всего контура кольца. Для окружного перемещения  $v(y, t)$  условие "возврата" имеет вид

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^{2\pi R} \left( \frac{w}{R} + \alpha(t) \right) dy = 0. \quad (3)$$

*Конечномерная модель кольца.* Будем считать, что кольцо имеет не только сопряженные изгибные формы колебаний, как в [1–12], но и радиальные [14, 17]. Тогда упругий динамический прогиб кольца аппроксимируется выражением

$$w(y, t) = h \left( a_1(t) \sin \beta y + a_2(t) \cos \beta y + a_3(t) \right), \quad (4)$$

где  $a_1(t)$  и  $a_2(t)$  – безразмерные обобщенные координаты, соответствующие изгибным формам, дополнительно введенная координата  $a_3(t)$  отвечает радиальным формам колебания;  $\beta = n/R$ ,  $n$  – количество окружных волн динамических деформаций кольца.

### Собственные частоты и формы колебаний

Рассмотрим кольцо из стали шириной  $a = 0,005$  м, толщиной  $h = 0,005$  м, радиусом  $R = 1$  м; модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па; массовая плотность  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>; коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ . Кольцо совершает колебания в своей плоскости.

При моделировании кольца использовались одномерные конечные элементы (КЭ), работающие на растяжение, сжатие, кручение, поперечный сдвиг и изгиб. Количество КЭ подбиралось таким образом, чтобы обеспечить точность расчета порядка 0,1%. Требуемая точность обеспечивается при создании сетки из 1257 КЭ. Расчет выполнялся в пакете MSC "Nastran".

Результаты расчета методом конечных элементов (МКЭ) представлены в таблице. Частоты соответствуют изгибным формам колебаний. И только на 51 моде появляется радиальная форма колебаний с частотой, во много раз превышающей низшие частоты, соответствующие изгибным формам колебаний:  $\lambda_{rad} = 805,91$  Гц [18].

Для изучения условий возникновения и поиска радиальных форм колебаний проведено большое число расчетов и исследовано влияние множества вариантов граничных условий. В результате обнаружено возникновение радиальных форм колебаний на частотах низших осцилляций при одном

Собственные частоты колебаний кольца (в Гц)

Количество околожных волн	Расчет МКЭ: размер КЭ/количество КЭ			Теория [14, 17]
	0,05/126	0,01/628	0,05/1257	
2	3,1226	3,1213	3,1212	3,87
3	8,8322	8,8282	8,8281	9,6
4	16,935	16,927	16,927	17,3
5	27,387	27,374	27,373	27,7
6	40,177	40,155	40,155	40,6
7	55,292	55,266	55,265	55,8
8	72,738	72,702	72,702	73,4
...	...	...	...	...
51	805,76	805,91	805,91	—

единственном граничном условии: в случае, когда отсутствуют моменты по всем степеням свободы и перемещение вдоль торцевого сечения.

Исходя из результатов расчета получены следующие значения частот. Первому тону соответствуют изгибные формы колебаний кольца с числом формообразующих волн  $n = 2$  при частоте  $\lambda = 552,65$  Гц; третьему и четвертому тону соответствуют изгибные формы колебаний кольца с числами формообразующих волн  $n = 3$  при частоте  $\lambda = 1\,080,5$  Гц и  $n = 4$  при частоте  $\lambda = 1\,588,1$  Гц (рис. 1). Частоте второго тона  $\lambda_{rad} = 805,91$  Гц соответствует радиальная форма колебаний — "дыхание кольца" (рис. 2).

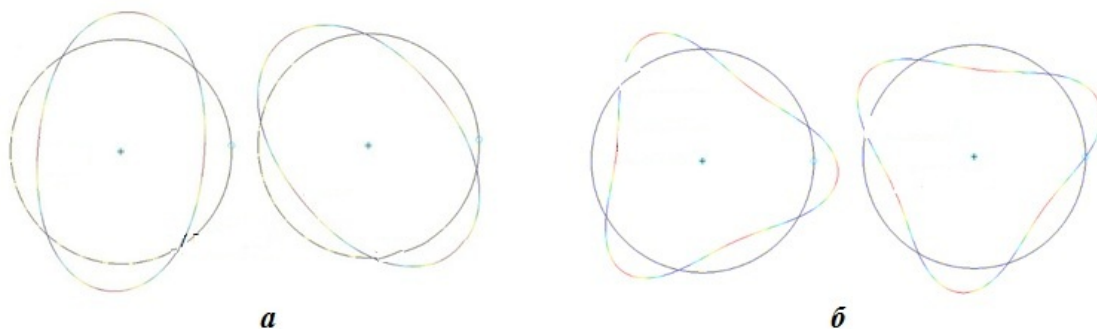


Рис. 1. Сопряженные изгибные формы: *a* — первого тона  $\lambda_{21} = \lambda_{22} = 552,65$  Гц; *б* — третьего тона  $\lambda_{31} = \lambda_{32} = 1\,080,5$  Гц

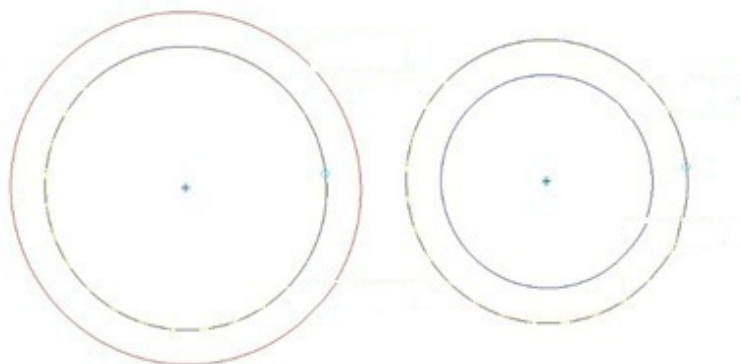


Рис. 2. Радиальная форма колебаний кольца,  $\lambda_{rad} = 805,91$  Гц

Рассмотрим кольцо с теми же граничными условиями, но другими геометрическими параметрами. Пусть  $R = 1$  м;  $a = 0,0001$  м;  $h = 0,0001$  м;  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па;  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>;  $\mu = 0,3$ .

В результате расчета получен следующий спектр частот: первый тон —  $n = 2$ , частота  $\lambda_{21} = \lambda_{22} = 387,4$  Гц; второй тон —  $n = 3$ , частота  $\lambda_{31} = \lambda_{32} = 743,86$  Гц; третий тон — частота соответствует радиальным формам колебаний,  $\lambda_{rad} = 805,91$  Гц; четвертый тон —  $n = 4$ , частота  $\lambda_{41} = \lambda_{42} = 1079,3$  Гц.

Видно, что как в первом, так и во втором расчете частота, соответствующая радиальным формам колебаний, равна  $\lambda_{rad} = 805,91$  Гц. Она не зависит от геометрических параметров кольца.

Рассмотрим кольцо  $R/h = 200$ ;  $a = 0,005$  м;  $h = 0,005$  м;  $R = 1$  м, изменив физические характеристики материала:  $E = 2 \cdot 10^{10}$  Па;  $\rho = 2300$  кг/м<sup>3</sup>. При таких параметрах частота радиальных колебаний равна  $\lambda_{rad} = 469,32$  Гц и соответствует второму тону. Частоты первого, третьего и четвертого тонов равны соответственно  $\lambda_{21} = \lambda_{22} = 321,84$  Гц;  $\lambda_{31} = \lambda_{32} = 629,26$  Гц;  $\lambda_{41} = \lambda_{42} = 924,85$  Гц.

На основании полученных данных можно заключить, что частота радиальных колебаний зависит от физических характеристик кольца.

Стоит упомянуть выводы, полученные в результате эксперимента, проведенного в работе [29]. Авторы отмечают, что при возбуждении радиальных форм колебаний возбуждались формы, близкие к изгибным формам колебаний, и наоборот. Это означает, что при колебаниях основания волновых твердотельных гироскопов (или любых других элементов машин, входящих в общую динамическую систему) в кольцевом резонаторе могут возбуждаться формы, отличные от возбуждаемой. А парциальные частоты кольца будут взаимодействовать с частотами колебаний основания ВТГ. В результате такой "перекачки" энергии могут происходить сложные и специфические явления [15, 30] при изгибных колебаниях резонаторов ВТГ.

Проведя анализ полученных данных можно установить еще одну интересную особенность. Как показывают исследования, частота радиальных форм колебаний кольца снижается, когда материал становится менее твердым. А граничные условия и геометрические параметры кольца, делающие его более жестким, увеличивают низшие частоты, соответствующие изгибным формам колебаний. Таким образом, соответствующим подбором граничных условий, геометрических и физических характеристик кольца можно обеспечить или избежать появления частоты радиальных форм колебаний в спектре низших частот, соответствующих изгибным формам колебаний.

## Выводы

В работе показано, что радиальные формы колебаний могут возникать не только на частотах высших осцилляций, как это принято считать в настоящее время, но и на низших частотах спектра. Частота радиальных колебаний не зависит от геометрических параметров кольца и от вида граничных условий, однако чувствительна к физическим характеристикам кольца.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-79-00057).

## Список литературы

1. *Игнатъев А. А., Гаврилова А. В., Игнатъев С. А.* Теоретические и экспериментальные исследования динамического качества шлифовальных станков для обработки дорожек качения колец подшипников // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2017. № 1 (21). С. 124–133.
2. *Ивашенцев Г. А.* Симметричные формы поперечных колебаний поршневых колец // Механика деформируемых сред. 2002. № 14. С. 59–63.
3. *Басараб М. А., Лукин Б. С., Матвеев В. А., Фомичев А. В., Чуманкин Е. А., Юрин А. В.* Миниатюрные волновые твердотельные гироскопы для малых космических аппаратов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2014. № 4. С. 80–96.
4. *Мартыненко Ю. Г., Меркурьев И. В., Подалков В. В.* Динамика кольцевого микромеханического гироскопа в режиме вынужденных колебаний // Гироскопия и навигация. 2009. № 3 (66). С. 10–22.

5. *Ayazi F., Najafi K.* A HARPSS Polysilicon Vibrating Ring Gyroscope // IEEE, Journal of Microelectromechanical Systems. 2001. Vol. 10, No 2. P. 169–179.
6. *Меркурьев И. В., Подалков В. В.* Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: Физматлит, 2009.
7. *Лысов А. Н. Винниченко Н. Т., Лысова А. А.* Прикладная теория гироскопов: Учеб. пособие. Челябинск: ЮУрГУ, 2009.
8. *Козубняк С. А.* Расщепление собственных частот колебаний цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа, вызванное возмущением формы // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2015. № 3. С. 39–49.
9. *Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркурьев И. В.* Идентификация параметров волнового твердотельного гироскопа с учетом нелинейности колебаний резонатора // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2014. № 5. С. 24–29.
10. *Мартыненко Ю. Г., Меркурьев И. В., Подалков В. В.* Управление нелинейными колебаниями вибрационного кольцевого микрогироскопа // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. № 3. С. 77–89.
11. *Меркурьев И. В., Подалков В. В.* Влияние малой анизотропии материала резонатора на собственные частоты и уходы волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2005. № 10. С. 33–36.
12. *Матвеев В. А., Лукин Б. С., Басараб М. А., Чуманкин Е. А.* Балансировка металлических резонаторов волновых твердотельных гироскопов низкой и средней точности // Наука и образование. 2013. № 6. С. 151–166. DOI <http://dx.doi.org/10.7463/0613.0579179>.
13. *Журавлёв В. Ф.* Дрейф несовершенного ВТГ // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2004. № 4. С. 19–23.
14. *Серёгин С. В.* Динамика тонких цилиндрических оболочек с присоединенной массой. Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО "КнАГТУ", 2016.
15. *Серёгин С. В.* Качественные эффекты при колебаниях кольцевых подкрепляющих элементов с присоединенной массой, как частный случай тонкой бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2017. № 1 (682). С. 31-43. DOI: DOI 10.18698/0536-1044-2017-1-31-43.
16. *Серёгин С. В., Лейзерович Г. С.* Свободные колебания бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки с начальными неправильностями и малой присоединенной массой // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2014. Т. 1, № 4 (20). С. 36–43.
17. *Лейзерович Г. С.* Исследование динамических характеристик круговых цилиндрических оболочек с начальными неправильностями. Автореф. дис. ... доктора физ.-мат. наук. Комсомольск-на-Амуре: ГОУ ВПО "КнАГТУ", 2011.
18. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Краснополяская Т. С.* Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. Киев: Наук. думка, 1984.
19. *Серёгин С. В.* Влияние площади контакта и величины линейно распределенной и сосредоточенной массы с круговой цилиндрической оболочкой на частоты и формы свободных колебаний // Вестник МГСУ. 2014. № 7. С. 64–74. DOI: 10.22227/1997-0935.2014.7.64-74.
20. *Серёгин С. В.* Об эффекте расщепления изгибного частотного спектра тонких круговых цилиндрических оболочек, несущих присоединенную массу // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6 (257). С. 59–61.
21. *Серёгин С. В., Лейзерович Г. С.* Влияние присоединенной массы на динамические характеристики тонкой оболочки // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2015. № 4. С. 83–89.

22. Лейзерович Г. С., Серёгин С. В. Свободные колебания круговых цилиндрических оболочек с присоединенной малой сосредоточенной массой // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 5. С. 90–96. DOI: 10.15372/PMTF20160510.
23. Леоненко Д. В. Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических оболочек // Механика машин, механизмов и материалов. 2010. № 3 (12). С. 53–56.
24. Егорычев О. А., Поддаева О. И. Собственные продольно-радиальные колебания упругой цилиндрической оболочки, жестко закрепленной по торцу // Вестник МГСУ. 2007. № 1. С. 35–36.
25. Тарлаковский Д. В., Щербаков В. А. Нестационарные радиальные колебания электромагнитопругого кругового цилиндра // Проблемы прочности и пластичности. 2016. Т. 78, № 4. С. 396–405.
26. Серёгин С. В. Свободные изгибно-радиальные колебания тонкой круговой цилиндрической оболочки, несущей присоединенную массу // Вестник МГСУ. 2014. № 11. С. 74–81. DOI: 10.22227/1997-0935.2014.11.74-81.
27. Серёгин С. В. Влияние асимметричных начальных несовершенств формы на свободные колебания тонких оболочек // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2016. Т. 15, № 3. С. 209–222. DOI: 10.18287/2541-7533-2016-15-3-209-222.
28. Серёгин С. В. Численное и аналитическое исследование свободных колебаний круговых цилиндрических оболочек, несущих присоединенную массу, линейно распределенную вдоль образующей // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 4. С. 378–384. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.36.
29. Абакумов А. И., Егунов В. В., Мохов В. Н., Певницкий А. В., Соловьёв В. П., Учаев А. А. Поведение сферической оболочки с присоединенной массой при импульсном нагружении // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький, 1984. С. 109–113.
30. Карпова А. П., Сапронов Ю. И. Приближенное вычисление амплитуд циклов, бифурцирующих при наличии резонансов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. № 3. С. 12–22.

Статья поступила в редакцию 15.02.18.

RADIAL WAVE MOTIONS OF RING ELEMENTS OF MACHINES / S. V. Seryogin (FSFEI HPL "KnASU", Komsomolsk-na-Amure).

The paper presents results of studying the dynamic characteristics of solid-state wave gyroscopes by the example of a nonrotating circular ring which is deformed in its plane. Radial waveforms have been found in the lowest frequency spectrum corresponding to bending modes. It has been concluded that the frequency of radial motions depends on the physical parameters of the ring and doesn't depend on the geometric parameters and the type of boundary conditions.

*Keywords:* ring, bending modes, radial wave motions, frequency spectrum, resonance.