Три кризиса в истории математики

Б. Е. ГРИНЕВИЧ

Б. Е. Гриневич

В истории математики выделяют три кризиса, связанные с развитием этой науки. Первый кризис можно условно назвать древнегреческим. Именно в Древней Греции математика начала превращаться в теоретическую науку с аксиомами, теоремами и выводом одних формул из других. Числа приобретают мистический смысл. Все, происходящее в мире, старались свести к числовой гармонии. Здесь уместно вспомнить о золотом сечении. Кризис пришелся на пятый век до нашей эры. До этого времени считалось, что все отрезки соизмеримы, то есть отношение их длин можно представить в виде простой дроби. Поиски «квадратуры круга» и попытки соизмерить сторону и диагональ квадрата показали, что это не так. Аристотель говорил, что у пифагорейцев числа принимались за начало и в качестве материи и в качестве [выражения для] их состояния и свойств. Открытие несоизмеримых величин сначала «вызвало удивление» (Аристотель). Это естественно: до открытия Пифагора древнегреческие математики считали, что любые два отрезка имеют общую меру, хотя, может быть, и очень малую. После обнаружения существования несоизмеримых величин перед пифагорейцами открылись две возможности. Можно было попытаться расширить понятие числа за счет присоединения к рациональным числам чисел иррациональных, охарактеризовать несоизмеримые величины числами иной природы и таким образом восстановить силу философского принципа «все есть число». Однако, этот путь столь естественный и простой с современной точки зрения, для пифагорейцев был закрыт. Поэтому пифагорейцы приняли, что геометрические объекты являются величинами более общей природы, чем дробные и целые числа, и попытались строить всю математику не на арифметической, а на геометрической основе.

Творческое возрождение математики началось в XVII в. До этого многочисленные задачи, такие как нахождение максимумов и минимумов функции решали частными методами. Практически одновременно Ньютон и Лейбниц предложили общий метод решения этих задач. Следующий кризис случился по причине вычисления бесконечно малых величин, стремящихся к нулю, но никогда его не достигающих. (Последнее будет важно для наших дальнейших рассуждений). Одни математики считали их не отличными от нуля и отбрасывали при вычис-

Исаак Ньютон (1643—1727)

Английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, ставшие основой классической механики.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716)

Немецкий философ, математик, физик и языковед.

Он заложил основы математической логики. Описал двоичную систему счисления с цифрами 0 и 1.

Один из создателей дифференциального и интегрального исчислений.

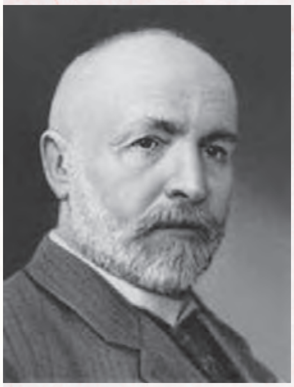
Огюстен Луи Коши (1789—1857)

Французский математик. Работал в Шербуре инженером, преподавал в Политехнической школе, Сорбонне и Коллеж де Франс.

Его работы посвящены арифметике, теории чисел, алгебре, математическому анализу, дифференциальным уравнениям, механике, математической физике. Он первым дал четкое определение пределу, непрерывности функции, сходимости ряда и т. д.

лениях, другие же считали их числами, хоть и очень маленькими. Эта неразрешенная проблема в свое время поставила под вопрос научность математики. Не существовало четкого определения предела. Предел строго не определяли, а просто содержательно описывали, основываясь на механических и геометрических примерах. Дифференциал изначально приравнивали к приращению функции, и это приводило к парадоксам. Отсутствовало общее понимание того, что мы называем функцией. Такое понятие как непрерывность функции мыслилось чисто интуитивно. Математики того времени считали все функции непрерывными и не пытались их разделять таким образом. Выход был найден не скоро, только в начале XIX в. Огюстом Коши. Он обозначил бесконечно малые как величины, существующие в их исчезновении, представляя, по существу, бесконечно умаляющееся.

Георг Кантор (1845—1918)



Немецкий математик. Создатель теории множеств.

1904 г. – медаль Сильвестра Лондонского королевского общества.

«Никто не изгонит нас из рая, который основал Кантор».

Давид Гильберт

Третий кризис, который продолжается и по сегодняшний день, связан, в основном, с теорией множеств. Множеством называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком. Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т. п. Аристотель, определил в своем труде «Физика» два разных типа бесконечности: потенциальную бесконечность – неостановимый процесс роста, и актуальную бесконечность – реально существующую величину, не имеющую конечной меры. Рассмотрим разницу между этими понятиями на примере. Последовательность натуральных чисел 1, 2, 3, 4... бесконечна. Изначально никто не подвергает это сомнению, поскольку для любого сколь угодно большого числа n мы всегда можем получить следующее число $n + 1$. Но одно дело – иметь возможность выполнить подобное действие, и совсем другое – сделать это в реальности и получить результат. Это очень тонкое различие. «Иметь возможность выполнить действие» определяет потенциальную бесконечность, полученный результат такого действия – актуальную бесконечность. Математики долго спорили об этих определениях, пока Кантор не привел доказательство существования бесконечного числа актуальных бесконечностей с помощью инструмента, который создал сам – теории множеств.

Кантор привел доказательство неравномощности бесконечностей. Множество натуральных чисел N и множество действительных чисел R неравномощны. Приведем знаменитое доказательство Кантора, которое он сообщил в 1891 г. на съезде естествоиспытателей в Галле.

Пусть $a_0, a_1, a_2...$ – произвольный список счетного числа действительных чисел из отрезка $[0;1]$. Покажем, что на отрезке $[0;1]$ найдется число, не попавшее в этот список. Рассмотрим список чисел $a_0, a_1, a_2...$ вместе с их десятичными представлениями:

$$a_0 = 0,\ \alpha_{00}\alpha_{01}\alpha_{02}\alpha_{03}...\ ;$$
$$a_1 = 0,\ \alpha_{10}\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}...\ ;$$
$$a_2 = 0,\ \alpha_{20}\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}...\ ;$$
$$a_3 = 0,\ \alpha_{30}\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}...\ ;$$
....

Положим $\beta_i = 1$, если, $\alpha_{i,j} = 2$, и $\beta_i = 2$, если, $\alpha_{i,j} \neq 2$. Число

$$\beta = 0,\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3...$$

лежит на отрезке $[0;1]$ и отличается, по крайней мере, первой цифрой после запятой от первого числа из списка, второй цифрой – от второго числа, третьей цифрой – от третьего и т. д.

Следовательно, число β не содержится в списке. Таким образом, невозможно составить список, включающий все числа отрезка [0; 1], и, значит, множество всех действительных чисел отрезка [0; 1] несчетно.

Про себя заметим, что это доказательство очевидно для конечного числа элементов, но для бесконечного нельзя это утверждать с полной определенностью. Действительно, сколько бы ни искали диагональный элемент, мы никогда его не найдем в силу бесконечности десятичной дроби. Более того, проводя подобные рассуждения, можно доказать, что множество всех действительных чисел отрезка счетно. Для простоты представим множество действительных чисел отрезка в виде двоичных дробей, где значащими цифрами будут только 0 и 1. Будем строить это множество, начиная с одной цифры после 0 и далее прибавляя постепенно по одной цифре, отбрасывая все нули после последней единицы. Получаем последовательность элементов: № 1–0,1; № 2–0,01; № 3–0,11, № 4–0,001; № 5–0,011; № 6–0,101; № 7–0,111; № 8–0,0001; № 9–0,0011 и т. д. Очевидно, что при таком построении все комбинации нулей и единиц будут задействованы и пронумерованы. Опять же отметим, что это доказательство, как и предыдущее, останется верным только для любого конечного числа элементов.

Как нам кажется, ошибки в доказательствах связаны с тем, что мы берем актуальную бесконечность и действуем с ней, как с потенциальной.

Остановимся также на другом доказательстве несчетности элементов отрезка 0–1. Предположим, что множество действительных чисел счетно, т. е. может быть записано в виде последовательности $x_1; x_2; :::; x_n; :::$. Возьмем точку x_1 и на отрезке $[0; 1] = I_0$ фиксируем отрезок ненулевой длины, не содержащий точку x_1. В отрезке I_1 строим отрезок I_2, не содержащий x_2, и если уже построен отрезок I_n, то, поскольку $|I_n| > 0$, в нем строим отрезок I_{n+1} так, что x_{n+1} не принадлежит I_{n+1} и $|I_{n+1}| > 0$. По лемме о вложенных отрезках найдется точка c, принадлежащая всем отрезкам $I_0; I_1; :::; I_n; :::$. Но эта точка отрезка $I_0 = [0; 1]$ по построению не может совпадать ни с одной из точек последовательности $x_1; x_2; :::; x_n; ::: \to$. (В. А. Зорич. Математический анализ. Изд-во МЦНМО, 2012. Ч. I).

Это доказательство тоже содержит неточность. Последовательность отрезков стягивается, но не в точку. Вспомним о том, что последовательность бесконечно малых величин никогда не достигает нуля. Игнорирование этого обстоятельства приводит к парадоксам, которых в теории множеств множество.

Мощность множества чисел отрезка [0; 1] называется континуум; множества, имеющие ту же мощность, называются континуальными. Континуальными являются: множество всех действительных чисел, множество точек прямой, множество точек плоскости, множество последовательностей действительных чисел и многие другие множества, встречающиеся в математической практике.

Проблема существования несчетных множеств, меньших по мощности, чем континуум, но больших, чем счетное (так называемая континуум-гипотеза), возникла в теории множеств практически с момента появления этой теории. Гедель доказал, что предположение об отрицательном решении континуум-гипотезы не противоречит аксиоматике теории множеств. Позднее Коэн установил, что этой аксиоматике не противоречит и предположение о положительном решении континуум-гипотезы.

От себя заметим, что выражение «все точки отрезка» не вполне корректно. Дело в том, что прямая не состоит из точек. Точка не является мельчайшей частицей прямой, как, скажем, молекула является мельчайшей частицей вещества, поскольку не обладает таким свойством прямой, как размерность. Образно говоря, точка имеет такое же отношение к прямой, как километровый столб к дороге. Прямая состоит из отрезков. Отрезок имеет длину, чего не имеет точка. Точка всего лишь показывает, сколько условных единичных отрезков находится в интервале от нулевой отметки до выбранного вами пункта. Сколько бы вы точек ни взяли, длины вы не получите, так как это новое качество, которое не создается количеством. Естественно, что число отрезков, сколь малы бы они ни были, в отрезке 0–1 конечно, а в прямой – счетно. Поэтому утверждать об эквивалентности числа точек отрезка и n-мерного пространства бессмысленно. Если кому-нибудь кажется, что бесконечное множество создает новое качество, пусть попробует ответить на вопрос – множество точек и какой мощности создаст килограмм.

В связи с переходом к новому уровню абстракции – бесконечности теория множеств породила много парадоксов. Наиболее известные из них:

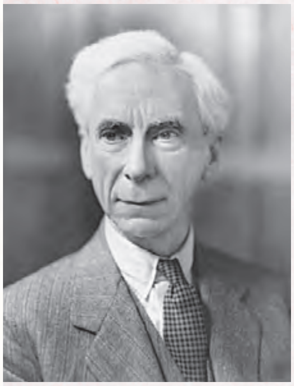
– парадокс лжеца, который в изложении «Википедии» звучит так: «Дано высказывание.

Данное высказывание ложно. Истинно ли это высказывание или нет?». Легко показать, что это высказывание не может быть ни истинным, ни ложным. Рассел так объяснял парадокс лжеца. Чтобы говорить что-нибудь о высказываниях, надо сначала определить само понятие «высказывания», при этом не используя не определенных пока понятий. Таким образом, можно определить высказывания первого типа, которые ничего не говорят о высказываниях. Потом можно определить высказывания второго типа, которые говорят о высказываниях первого типа, и так далее. Высказывание же «данное высказывание – ложно» не попадает ни под одно из этих определений, и таким образом не имеет смысла;

– парадокс Рассела, похожий на парадокс лжеца. Условимся называть множество «обычным», если оно не является своим собственным элементом. Можно рассмотреть множество, состоящее только из всех «обычных» множеств, такое множество называется расселовским множеством. Парадокс возникает при попытке определить, является ли это множество «обычным» или нет, то есть содержит ли оно себя в качестве элемента. Есть две возможности:

- с одной стороны, если оно «обычное», то оно должно включать себя в качестве элемента, так как оно по определению состоит из всех «обычных» множеств. Но тогда оно не может быть «обычным», так как «обычные» множества – это те, которые себя не включают;
- остается предположить, что это множество «необычное». Однако оно не может включать себя в качестве элемента, так как по определению должно состоять только из «обычных» множеств. Но если оно не включает себя в качестве элемента, то это «обычное» множество;

Бертран Рассел (1872—1970)



Британский философ, логик, математик и общественный деятель.

Известен своими работами в защиту пацифизма, атеизма, а также либерализма и левых политических течений. Внес неоценимый вклад в математическую логику, историю философии и теорию познания.

– парадокс брадобрея. Пусть в некой деревне живет брадобрей, который бреет всех жителей деревни, которые не бреются сами, и только их. Бреет ли брадобрей сам себя? Любой ответ приводит к противоречию. Рассел замечает, что этот парадокс не эквивалентен его парадоксу и легко решается. Действительно, точно так же, как парадокс Рассела показывает, что не существует расселовского множества, парадокс брадобрея показывает, что такого брадобрея просто не существует. Разница состоит в том, что в несуществовании такого брадобрея ничего удивительного нет: не для любого свойства найдется брадобрей, который бреет людей, обладающих этим свойством. Однако то, что не существует множества элементов, заданных некоторым вполне определенным свойством, противоречит наивному представлению о множествах и требует объяснения.

В книге «Парадоксы теории множеств и диалектика» (И. Н. Бурова. Наука, 1976) показано, что в данных парадоксах нарушается правило четко разделять «сферы» предиката и субъекта; степень смешения близка к подмене одного понятия другим:

1) обычно в логике предполагается, что в процессе рассуждения субъект и предикат сохраняют свой объем и содержание, в данном же случае происходит переход из одной категории в другую, что дает в результате несоответствие;

2) наличие слова «все» имеет смысл для конечного числа элементов, в случае же бесконечного их количества возможно наличие такого, которое для определения себя потребует определение множества;

3) нарушаются основные логические законы:

– закон тождества нарушается тогда, когда обнаруживается нетождественность себе субъекта и предиката;

– закон противоречия, когда с одинаковым правом выводятся два противоречащих друг другу суждения;

– закон исключенного третьего, когда это третье приходится признавать, а не исключать, поскольку ни первое, ни второе не могут быть признаны одно без другого, т. к. они оказываются одинаково правомерными.

Доказанная Г. Кантором теорема гласит о том, что нельзя построить самое мощное множество поскольку мощность множества, состоящего из подмножеств данного множества, всегда на единицу больше мощности исходного множества. Однако, с другой стороны, интуитивно ясно, что множество всех множеств должно быть самым мощным, так как оно представляет совокупность всех мыслимых множеств, являясь сверхмощным. Как заметил Рассел, если взять все, то не останется ничего и, следовательно, ничего уже нельзя добавить.

Кстати, и сам Кантор, несмотря на доказанное им, пришел к выводу, что должно же существовать трансфинитное число, превосходящее наибольшее из трансфинитных чисел.

Третий кризис поставил вопрос о точности математики, безупречности ее основных понятий. И это затрагивает уже фундамент математики, по-настоящему выводя проблему на уровень философского осмысления темы, поскольку речь идет о статусе математической науки, правомерности построения ее объектов, возможности их существования и критериях истинности утверждений о них. По выводу математики из третьего кризиса сложились три направления: логицизм, интуиционизм с его конструктивной ветвью и школа формалистов.

Логицисты исходят из того, что математическое доказательство широко использует методы логики, построено на базе логических операций. Аксиоматический метод, гордость математики, то, что отличает ее сейчас от других наук, своим происхождением также обязан логике, выступающей инструментом извлечения следствий из принимаемых постулатов.

Но что значит редуцировать математику к логике? В конечном счете это предполагает представить математические понятия, объекты и операции как логические, а аксиомы математики как теоремы логики. Однако встает вопрос, как именно следует переводить математические объекты и действия над ними в логические объекты и действия? Значит ли это, что каждый объект и каждую операцию надо выражать в терминах логики? Очевидно, нет. Надо выделить основные понятия и операции и интерпретировать их логически, то есть осуществить аксиоматическое построение математики.

Но теперь возникает другая проблема. В математике немало разделов, дисциплин. Следует ли каждую из них аксиоматизировать и далее работать над ними? Естественно стремление выделить в математике такую отрасль, в терминах которой можно было бы выразить все остальные разделы математики.

Это арифметика. Так весь ход рассуждений приводит к началу процесса и видно, что для реализации конечной цели логицизма необходимо осуществить три последовательные операции: арифметизировать математику, аксиоматизировать арифметику и осуществить логическую интерпретацию аксиоматизированной арифметики.

Фактически, сводя математику к логике, логицисты лишь отодвинули проблему. Теперь она состояла в обосновании возможности существования уже не математических, а логических объектов.

Интуиционисты Я. Брауэр, Г. Вейль, А. Гейтинг, чуть ранее Л. Кронекер и др. в противовес этому исходили из того, что математика не может быть сведена к логике, ибо уходит в структуры мысли глубже ее, логика связана с языком, который, как показали парадоксы, несовершенен. Поэтому математика не нуждается ни в языке, ни в логике, ибо будучи независимой, автономной от языка, опирается на интуицию, математические мысли рождаются вне слов, слова используются только для передачи мысли, математическое содержание которой не зависит от словесного одеяния. Мысли нельзя выразить адекватно в языке даже в математическом языке, поскольку он вносит отклонения от предмета.

Прежде всего подвергся критике принцип бесконечности. Математическое построение конечно, но не любое построение может быть выполнено фактически, поскольку для его получения надо совершить бесконечное количество шагов. Тем не менее математика свободно оперирует с подобными конструктами. Почему? Как показал отечественный математик, сторонник конструктивистского течения А. Марков, математик имеет дело не с самой бесконечностью, но лишь с ее абстракцией. От возможности построения подобных объектов отвлекаются, принимая ее лишь в абстрактном смысле.

Все беды обоснования интуиционизм видит не собственно в логике в несовершенстве ее аппарата, а в самой математике и именно в неточном использовании ее понятий, прежде всего, понятия бесконечности.

Первично математическое мышление, а язык и логика суть несовершенные способы его выражения. В достижении точности должна помочь интуиция. Необходимо, чтобы все построения опирались только на те утверждения, которые санкционированы изначальной интуицией. Материал, из которого созидаются математические объекты, не является собственно математическим. Это актуально переживаемое. Оно очищено от всего, берется лишь сам акт восприятия. Изначальная интуиция – деятельность, связанная с глубинным ощущением времени.

Давид Гильберт (1862–1943)

Немецкий математик.

К его трудам относятся теория инвариантов, теория алгебраических чисел, основания математики, математическая логика, математическая физика, аксиоматика евклидовой геометрии. Эти труды оказали влияние на дальнейшее развитие математики.

Для логицизма математический объект существует, если его определение не приводит к противоречию. С точки же зрения интуиционизма существование объекта оправдано, если он задан эффективным определением, указывающим способ, алгоритм построения. Наиболее адекватно отвечают этому генетические, фиксирующие происхождение объекта, определения. Разъясняя смысл интуиционистского подхода, Вейль пишет: «Для математика совершенно безразлично, что такое окружность, для него принципиально знать, каким образом может быть задана окружность». То есть не суть важно, что собой представляет окружность, каково ее математическое содержание, имеет значение лишь способ, каким она может быть построена.

При генетическом же построении исходными являются не высказывания, а наличные, данные объекты, которые вводятся путем прямого указания на объект, и уточняются индуктивными определениями.

В свете новых идей пересматриваются интуиционизмом и логические принципы. Абстракция потенциальной не актуальной осуществимости предполагает, что элементы бесконечного множества не могут быть заданы одновременно, они последовательно возникают в процессе его построения. Это становящаяся бесконечность, не имеющая последнего члена, ибо после n шагов всегда можно сделать $n+1$-й шаг. Так, вместо актуальной бесконечности, принимаемой логицизмом и традиционной математикой, вводится понятие потенциальной бесконечности. В частности, нельзя говорить о всех, но о каждом можно. Особое внимание уделяется закону исключенного третьего. Утверждается, что принципы классической логики не имеют абсолютной приложимости, не зависящей от содержания предмета обсуждения. В частности, закон исключенного третьего, сохраняя силу для конечных множеств, утрачивает ее в области потенциально бесконечного как незавершенного бесконечного. В связи с этим интуиционизм не приемлет и метода доказательства от противного, поскольку он основывается на законе исключенного третьего.

Интуиционистское неприятие закона исключенного третьего вызвало особо острую критику со стороны математиков, и не только тех, кто разделял идеи логицизма. Ибо затрагивался фундаментальный принцип математики, более того, дело касалось логической основы самого человеческого мышления. По отмеченному поводу Д. Гильберт заявлял, что отнять у математиков этот закон все равно что забрать у астронома телескоп или запретить боксеру пользоваться кулаками. В итоге, как и логицизм, интуиционистское направление не смогло выполнить обещаний и предложить эффективные методы обоснования математики.

Кризисные явления в математике, заставившие обратиться к ее обоснованиям, и трудности, вставшие перед логистами, породили наряду с интуиционизмом еще одно течение – формализм. Первые выступления формалистов связаны с именем крупнейшего немецкого математика Д. Гильберта и относятся к 1902–1904 гг. Но основные идеи этого направления сложились позднее в полемике с интуиционизмом. Под ударами интуиционистской критики незыблемость устоев математики была поколеблена. В 1920-е гг. Гильберт, его сотрудники и соратники В. Аккерман, И. Бернайс, фон Нейман и др. приступают к математической разработке программы формализма.

В отличие от логицизма, формализм не претендовал на построение единой для всей математики формальной теории, наподобие теории множеств или теории типов. В отличие от интуиционизма, формализм не отказывался от построения теорий с «сомнительными» с точки зрения интуиции основаниями, лишь бы в них правила вывода теорем были строго обоснованы.

Формалисты полагали, что математика должна изучать как можно больше формальных систем. Формально-аксиоматические теории, построенные на основе классической логики, имеет смысл рассматривать лишь при отсутствии в них противоречий, поскольку в противном случае «доказанным» оказывается любое суждение теории. Если в такой формальной системе удает-

Курт Фридрих Гёдель (1906–1978)

Австрийский логик, математик и философ математики.

Проект Лейбница был весьма фундаментальным и находил отклик у многих «формалистов». Однако, в 1931 г. Курт Гёдель доказал свою знаменитую теорему, согласно которой в любой формальной системе, содержащей элементарную арифметику (утверждения о числах), всегда можно придумать предложение, которое будет заведомо истинным, но в принципе недоказуемым средствами этой системы. *Формализация знания (полная) невозможна в принципе!*

ся доказать логическую ложь, то она находится противоречивой и «выбраковывается», что обесценивает любые доказанные в рамках данной системы теоремы. Разумеется, математиков волновал вопрос, можно ли каким-то образом доказать непротиворечивость теории.

Свои методы Гильберт назвал финитными. Они не используют ни бесконечных множеств структурных свойств формул, ни бесконечных множеств операций над формулами. Так было получено понятие доказательства абсолютной непротиворечивости формальных систем, а вместе с ним, как полагал Гильберт, и доказательство непротиворечивости математики. Вывод, к которому приходит формалистское направление, состоит в том, что обоснование математики в ней самой.

Вскоре однако произошло событие, имевшее столь же радикальные последствия, как в свое время обнаружение парадоксов Рассела.

В 1930 г. Гёдель уже получил свои результаты, в сущности, опять обнаружил и утвердил наличие диалектики в процессе познания. По сути своей дальнейшее развитие математики продемонстрировало несостоятельность программы Гильберта.

Что же, собственно, доказал Гёдель? Можно выделить три основных результата.

1. Гёдель показал невозможность математического доказательства непротиворечивости любой системы, достаточно обширной, чтобы включать в себя всю арифметику, доказательства, которые не использовали бы каких-либо иных правил вывода, кроме тех, что имеются в самой данной системе. Гёдель показывает несостоятельность расчетов на нахождение финитистского доказательства непротиворечивости арифметики.

2. Гёдель указал на принципиальную ограниченность возможностей аксиоматического метода: система Principia Mathematica, как и всякая иная система, с помощью которой строится арифметика, существенно неполна, т. е. для любой непротиворечивой системы арифметических аксиом имеются истинные арифметические предложения, которые не выводятся из аксиом этой системы.

3. Теорема Гёделя показывает, что никакое расширение арифметической системы не может сделать ее полной, и даже если мы наполним ее бесконечным множеством аксиом, то в новой системе всегда найдутся истинные, но не выводимые средствами этой системы положения. После теоремы Гёделя стало бессмысленно рассчитывать, что понятию убедительного математического доказательства можно будет придать раз и навсегда очерченные формы. (Согласно Гёделю, если мы хотим формализовать истину, мы не сможем этого сделать ни на каком данном этапе и будем только гнаться за формализацией).

Высокую оценку открытию Гёделя дает фон Нейман, один из лидеров формалистского направления. Вклад Гёделя в логику поистине фундаментален. Это больше, чем монумент. Это веха, разделяющая две эпохи, ибо открытие Гёделя изменило предмет логики как науки. Более того, выводы Геделя имеют не только логическое и общенаучное значение, но, как считают исследователи, они открывают возможность постижения природы человеческой мысли и даже самой жизнедеятельности.

ГРИНЕВИЧ Борис Евгеньевич –
главный научный сотрудник ИЛФИ
РФЯЦ-ВНИИЭФ, доктор физ.-мат. наук,
лауреат премии Правительства РФ