

УДК 517.958:536.2

TVDR-СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. А. Шестаков
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина",
г. Снежинск Челябинской области)

Проведены исследования по построению неявных безусловно монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса теплового излучения.

Ключевые слова: уравнение переноса излучения, разностные схемы.

Введение

Проблеме построения численных методов решения уравнения переноса излучения посвящено огромное число работ (см., например, [1] и приведенные там ссылки). Отдельно среди них выделяются методы решения системы уравнений переноса теплового излучения (СУПТИ), которая дополнительно включает в себя уравнение для внутренней энергии среды с учетом обменных процессов взаимодействия излучения с веществом (см., например, [2–5]). Из-за существенной нелинейности этих процессов при решении задачи СУПТИ предъявляются высокие требования к качеству выбираемых численных методик.

Во-первых, эти методики должны обладать эффективным методом разрешения нелинейности данной задачи (см., например, [6, 7]). Во-вторых, из-за семимерного пространства всех переменных аппроксимационная система должна решаться экономичным методом, в котором число арифметических операций пропорционально количеству узлов разностной сетки (например, маршевыми алгоритмами: прогонкой или бегущим счетом). В-третьих, разностная дискретизация, кроме естественных условий — аппроксимации, абсолютной устойчивости и сходимости, должна удовлетворять дополнительным требованиям: консервативности, безусловной монотонности и положительности для положительных функций.

Если аппроксимация и сходимость выполняются для большинства используемых схем, то из требования абсолютной устойчивости вытекает использование только неявных схем, а из требования консервативности — аппроксимация в дивергентной форме. Требование безусловной монотонности ограничивает точность линейных схем первым порядком аппроксимации по времени и пространству даже в простейшем случае одномерного уравнения переноса (УП): $\frac{\partial J}{\partial t} + c \frac{\partial J}{\partial x} = 0$ [8]. В схемах второго порядка аппроксимации осцилляции обычно порождаются третьей производной в первом дифференциальном приближении (ПДП) [9]. Это следует из свойств уравнения Кордевега де Вриза [10]. Поэтому в области переноса теплового излучения до сих пор остается актуальной проблема построения монотонных схем повышенного (выше первого) порядка аппроксимации. Основные проблемы численных схем СУПТИ изложены в работе [11].

Попытки построить монотонные линейные схемы повышенного порядка аппроксимации хотя бы по одной из переменных, например первого порядка по времени и более высокого по пространству, приводят к возникновению ограничений на временной шаг (см., например, [12]). Барьер безусловной монотонности Годунова не удается преодолеть даже по отдельным переменным. Автор не нашел в литературе безусловно монотонных линейных схем для УП с порядком $O(\tau + h^2)$ или $O(\tau^2 + h)$,

где τ — шаг по времени, h — шаг по пространству. Поэтому для повышения порядка аппроксимации используют нелинейные схемы, в которых применяют различные алгоритмы монотонизации. Однако в большинстве случаев они также теряют свойство безусловной монотонности. Можно привести несколько примеров:

1. В работах О. М. Белоцерковского с соавторами (см., например, [13]) построена явная (монотонная при условии на число Куранта $C = \frac{c\tau}{h} \leq 1$) нелинейная схема второго порядка аппроксимации по времени и пространству за счет изменения разностного шаблона при анализе первых и вторых разностных производных.
2. В работах Б. В. Рогова и М. Н. Михайловской (см., например, [14]) построена неявная схема третьего порядка аппроксимации по времени и четвертого — по пространству (монотонная при $C \geq 0,5$).
3. В работах В. И. Пинчукова (см., например, [15]) построены неявные схемы до шестого порядка аппроксимации по времени и пространству (монотонные при $C \leq 0,5$).
4. В работах М. Ю. Козманова с соавторами [16–18] построены условно монотонные нелинейные схемы второго порядка аппроксимации по пространству за счет поправки разностного оператора при анализе вторых разностных производных.

Следует заметить, что вышеперечисленные схемы из первых трех примеров дают повышенный порядок аппроксимации только для простейшего одномерного УП, который может снижаться при использовании их для уравнения переноса излучения более сложного вида с учетом процессов рассеяния и поглощения. При этом может теряться монотонность. Например, в схемах второго порядка аппроксимации по пространству в DS_n -методе Карлсона [19] осцилляции порождаются отрицательной второй производной $-\alpha h^2 \frac{\partial^2 J}{\partial x^2}$ в ПДП при коэффициенте поглощения α .

Достаточно простой способ преодоления барьера Годунова в 1962 г. предложил Р. П. Федоренко [20]: в областях немонотонности решения применять монотонные линейные схемы первого порядка, а на гладких участках — схемы более высокого порядка. Этот прием достаточно эффективен в явных схемах и схемах бегущего счета, когда переключение происходит при последовательном расчете ячеек. Такие схемы в дальнейшем стали называть гибридными, однако при решении неявных гиперболических систем (например, прогонкой) необходимо априорное определение точек переключения, что не всегда возможно. Если эту информацию брать с предыдущего шага или итерации, то на искомой итерации возможно нарушение монотонности. Так как переключатель между схемами зависит от поведения решения, такие схемы становятся нелинейными. Построение гибридных схем для монотонизации решения используется во многих областях; например, в задачах переноса это WDD-схема [21] или DDAD/St-схема [22]. Если построение гибридных схем в одномерном случае не вызывает особых трудностей, то в многомерном случае этот прием "упирается" в неопределенность понятия монотонности. В многомерном случае критерий монотонности обычно заменяют принципом максимума в ячейке или требованием положительности для положительных функций. При этом гибридные схемы могут порождать немонотонность в области положительности решения, немонотонность по времени и несходимость итераций из-за переключений с одной схемы на другую [23].

Итак, перечислим основные требования к разностным схемам для СУПТИ.

Для всех схем (не только для схем СУПТИ) обязательны:

- 1) аппроксимация;
- 2) устойчивость (безусловная для схем СУПТИ);
- 3) сходимость.

Для схем СУПТИ необходимы:

- 4) консервативность;
- 5) положительность (для положительных функций);
- 6) безусловная монотонность (в одномерных задачах).

Для схем СУПТИ желательны:

- 7) экономичность (простота алгоритма, как, например, у маршевых методов);
- 8) обобщаемость на многомерный случай;
- 9) выполнение сферической симметрии (см., например, [24]);
- 10) обеспечение асимптотического диффузионного предела при использовании метода сферических гармоник (см., например, [25]);
- 11) обеспечение P_1 -предела при использовании кинетического приближения.

Всем одиннадцати условиям пока не удовлетворяет ни одна методика для решения СУПТИ в кинетическом приближении. Однако при решении СУПТИ в упрощенных приближениях можно снять некоторые требования на выбор схем.

Первым девяти условиям удовлетворяет, например, методика [26], созданная для решения СУПТИ в приближении лучистой теплопроводности. Первым десяти условиям удовлетворяет методика [27], созданная для решения СУПТИ в P_1 -приближении. Девяти условиям (без условий 9, 10) удовлетворяют, например, методика [28], созданная для решения СУПТИ в кинетическом приближении, и разностные схемы, рассмотренные в данной работе.

Еще одним вопросом при построении разностных схем для СУПТИ является выбор разностного шаблона. В многомерных задачах для сохранения порядка аппроксимации на существенно неортогональных сетках применяют схемы, построенные в рамках одноячеечного шаблона, которые в последнее время стали называть бикомпактными [29]. Популярность этого класса объясняется тем, что для данных схем выполняется ряд важных свойств:

- 1) это самый простой шаблон, поэтому сравнительно просто схемы обобщаются на многомерный случай без расширения шаблона (шаблон трехточечной схемы в двумерной геометрии требует 9 ячеек, в трехмерной — 27 ячеек);
- 2) схемы, записанные в дивергентной форме и построенные интегроинтерполяционным способом в рамках одноячеечного шаблона, будут всегда консервативны;
- 3) порядок аппроксимации не меняется при переходе от равномерных и ортогональных сеток к неравномерным и неортогональным;
- 4) легко аппроксимируются граничные условия (не надо вводить фиктивные ячейки на границах);
- 5) нет необходимости аппроксимировать решение через разрыв, как в многоточечных схемах;
- 6) легко строится контур консервативности для доказательства локальной консервативности в системе, что важно для систем гиперболических уравнений.

Одним из наиболее популярных путей преодоления барьера Годунова является переход к нелинейным TVD-схемам (Total Variation Diminishing), начало которым положил В. П. Колган [30]. В настоящее время опубликовано большое количество работ (более 1 000) по TVD-схемам (см., например, [31]), где рассмотрены как явные, так и неявные схемы типа TVD для решения гиперболических систем уравнений. Если рассматривать только неявные TVD-схемы (с учетом требования безусловной устойчивости), то это будут трехточечные или четырехточечные схемы из-за использования односторонних производных в каждом направлении пространственной переменной. Это значит, что теряется важное достоинство одного из самых эффективных методов решения уравнения переноса — DS_n -метода, где аппроксимация строится в рамках счетной ячейки, а для решения разностных уравнений используется экономичный метод бегущего счета.

В работах [32, 33] были найдены способы, как избежать указанных трудностей в TVD-методологии. В этих работах построены неявные схемы типа TVD, которые сохраняют основные достоинства DS_n -метода. Доказательство принадлежности этих схем к TVD-схемам затруднено из-за применения линеаризации, поэтому в работе [34], где они рассмотрены для системы гиперболических уравнений, такие схемы названы TVDR (Total Variation Diminishing Reconstruction). В работах [35, 36] построены TVDR-схемы, у которых, в отличие от [29–32], вся добавка от TVD-реконструкции взята с предыдущего шага. Это заметно упрощает схемы, особенно в многомерном случае.

Для систем гиперболических уравнений TVD-реконструкцию можно проводить как для инвариантов Римана [37–39], так и для основных величин (например, плотности и потока излучения) [40, 41]. TVDR-схемы, построенные на TVD-реконструкции инвариантов, опираются на свойство монотонности инвариантов в одномерной плоской геометрии [42], но в более сложных геометриях (например, сферически-симметричной или цилиндрически-симметричной) отсутствие инвариантов не позволяет пользоваться этим подходом. Поэтому класс TVDR-схем был расширен за счет применения TVD-реконструкции к остальным величинам, которые могут вести себя немонотонно [40]. Такой подход существенно упростил построение TVDR-схем в многомерных геометриях [41].

Построенные указанным способом TVDR-схемы обладают следующими свойствами:

- 1) неявность, безусловная устойчивость;
- 2) первый порядок аппроксимации по времени и второй порядок — по пространству, кроме отдельных точек с экстремумами;
- 3) консервативность;
- 4) однородность, заключающаяся в проведении расчета по единообразным формулам без явного выделения особенностей решения;
- 5) аппроксимация в рамках одной ячейки, если иметь в виду значения величин с верхнего временного слоя, что позволяет применять экономичный метод бегущего счета для решения системы разностных уравнений;
- 6) обобщаемость на многомерные геометрии.

Построение неявных схем для модельного уравнения переноса

Рассмотрим построение монотонных схем повышенного порядка аппроксимации для линейного УП в одномерной плоской геометрии

$$\frac{1}{c} \frac{\partial J}{\partial t} + \mu \frac{\partial J}{\partial x} + \alpha J = 0, \quad (1)$$

где $J(x, t)$ — неотрицательная функция; μ — направляющий косинус в пространстве полета частиц; x — пространственная координата; t — время; c — скорость света; α — некоторая неотрицательная константа. Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$J^0(x, t^0) = J^0(x); \quad J(x_L, t) |_{\mu > 0} = J_L(t); \quad J(x_R, t) |_{\mu < 0} = J_R(t).$$

Неявная схема в рамках одноячеечного шаблона для уравнения (1) имеет вид

$$\frac{J_{i+1/2}^{n+1} - J_{i+1/2}^n}{c\tau} + \mu \frac{J_{i+1}^{n+1} - J_i^{n+1}}{h} + \alpha J_{i+1/2}^{n+1} = 0, \quad (2)$$

где $\tau = t^{n+1} - t^n$; $h = x_{i+1} - x_i$; $i = 0, \dots, I$; $n = 0, 1 \dots$. Для упрощения изложения в дальнейшем предполагается $\tau = \text{const}$, $h = \text{const}$. Величина с целыми нижними индексами $J_i^{n+1} = J(x_i, t^{n+1})$ используется для значений искомой функции в узлах разностной сетки. Значения величины с полуцелыми нижними индексами $J_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} J(x, t^{n+1}) dx$ есть интегральные средние значения функции в ячейках и отличаются от ее значений в центрах ячеек $J(x_{i+1/2}, t^{n+1})$ на $O(h^m)$ в зависимости от используемой квадратуры, где m — порядок квадратурной формулы.

Уравнение (2) можно записать в более компактном виде:

$$q J_{i+1/2}^{n+1} + C \Delta J_i^{n+1} = J_{i+1/2}^n, \quad q = 1 + c\tau\alpha \geq 1, \quad C = \frac{c\tau\mu}{h}, \quad \Delta J_i^{n+1} = J_{i+1}^{n+1} - J_i^{n+1}. \quad (3)$$

Схема с дополнительными соотношениями связи

$$J_{i+1/2}^{n+1} = J_{i+1}^{n+1} \quad \text{при} \quad \mu > 0; \quad J_{i+1/2}^{n+1} = J_i^{n+1} \quad \text{при} \quad \mu \leq 0 \quad (4)$$

является монотонной положительной схемой первого порядка аппроксимации. В теории переноса эта схема называется противопотоковой, а в DS_n -методе — St-схемой.

Подставляя соотношения связи (4) в уравнение (3), получаем

$$(q + C)J_{i+1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n + CJ_i^{n+1} \quad \text{при } \mu > 0; \quad (q - C)J_{i+1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n - CJ_{i+1}^{n+1} \quad \text{при } \mu \leq 0. \quad (5)$$

Из системы (5) можно получить принцип максимума в ячейке: $0 \leq J_{i+1/2}^{n+1} \leq \max(J_i^{n+1}, J_{i+1/2}^n)$ при $\mu > 0$ и $0 \leq J_{i+1/2}^{n+1} \leq \max(J_{i+1}^{n+1}, J_{i+1/2}^n)$ при $\mu \leq 0$. Из этих неравенств получается принцип максимума для всей задачи: $0 \leq J_{i+1/2}^{n+1} \leq \max(J^0, J_L, J_R)$.

Если схему (5) записать отдельно для целых и полуцелых индексов,

$$\begin{aligned} J_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{q+C}J_{i+1/2}^n + \frac{C}{q+C}J_{i-1/2}^{n+1}, & J_{i+1}^{n+1} &= \frac{1}{q+C}J_{i+1}^n + \frac{C}{q+C}J_i^{n+1} \quad \text{при } \mu > 0; \\ J_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{q-C}J_{i+1/2}^n - \frac{C}{q-C}J_{i+3/2}^{n+1}, & J_i^{n+1} &= \frac{1}{q-C}J_i^n - \frac{C}{q-C}J_{i+1}^{n+1} \quad \text{при } \mu \leq 0, \end{aligned}$$

то видно, что выполняется условие невозрастания J как в узлах, так и по интегральной средней величине:

$$\begin{aligned} 0 \leq J_{i+1/2}^{n+1} \leq \max(J_{i-1/2}^{n+1}, J_{i+1/2}^n), & \quad 0 \leq J_{i+1}^{n+1} \leq \max(J_i^{n+1}, J_{i+1}^n) \quad \text{при } \mu > 0; \\ 0 \leq J_{i+1/2}^{n+1} \leq \max(J_{i+3/2}^{n+1}, J_{i+1/2}^n), & \quad 0 \leq J_i^{n+1} \leq \max(J_{i+1}^{n+1}, J_i^n) \quad \text{при } \mu \leq 0, \end{aligned}$$

и схема является безусловно устойчивой в норме C .

Если St-схему записать через разности значений в двух соседних точках,

$$\begin{aligned} \Delta J_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{q+C}\Delta J_{i+1/2}^n + \frac{C}{q+C}\Delta J_{i-1/2}^{n+1}, & \Delta J_{i+1}^{n+1} &= \frac{1}{q+C}\Delta J_{i+1}^n + \frac{C}{q+C}\Delta J_i^{n+1} \quad \text{при } \mu > 0; \\ \Delta J_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{q-C}\Delta J_{i+1/2}^n - \frac{C}{q-C}\Delta J_{i+3/2}^{n+1}, & \Delta J_i^{n+1} &= \frac{1}{q-C}\Delta J_i^n - \frac{C}{q-C}\Delta J_{i+1}^{n+1} \quad \text{при } \mu \leq 0, \end{aligned}$$

то:

- для $\mu > 0$
 - из $\Delta J_{i+1/2}^n \geq 0$, $\Delta J_{i-1/2}^{n+1} \geq 0$ следует $\Delta J_{i+1/2}^{n+1} \geq 0$;
 - из $\Delta J_{i+1}^n \geq 0$, $\Delta J_i^{n+1} \geq 0$ следует $\Delta J_{i+1}^{n+1} \geq 0$;
 - из $\Delta J_{i+1/2}^n < 0$, $\Delta J_{i-1/2}^{n+1} < 0$ следует $\Delta J_{i+1/2}^{n+1} < 0$;
 - из $\Delta J_{i+1}^n < 0$, $\Delta J_i^{n+1} < 0$ следует $\Delta J_{i+1}^{n+1} < 0$;
- для $\mu \leq 0$
 - из $\Delta J_{i+1/2}^n \geq 0$, $\Delta J_{i+3/2}^{n+1} \geq 0$ следует $\Delta J_{i+1/2}^{n+1} \geq 0$;
 - из $\Delta J_i^n \geq 0$, $\Delta J_{i+1}^{n+1} \geq 0$ следует $\Delta J_i^{n+1} \geq 0$;
 - из $\Delta J_{i+1/2}^n < 0$, $\Delta J_{i+3/2}^{n+1} < 0$ следует $\Delta J_{i+1/2}^{n+1} < 0$;
 - из $\Delta J_i^n < 0$, $\Delta J_{i+1}^{n+1} < 0$ следует $\Delta J_i^{n+1} < 0$,

т. е. St-схема является монотонной по критерию Годунова как в узлах, так и по интегральной средней величине.

Полунеявная TVDR-схема

Если ввести традиционные для TVD-схем функции-ограничители

$$\begin{aligned}\phi_{i+1/2} &= \frac{L(\Delta J_{i-1/2}, \Delta J_{i+1/2})}{\Delta J_{i-1/2}} = L(1, \hat{\theta}_{i+1/2}), & \hat{\theta}_{i+1/2} &= \frac{\Delta J_{i+1/2}}{\Delta J_{i-1/2}}; \\ \psi_{i+1/2} &= \frac{L(\Delta J_{i-1/2}, \Delta J_{i+1/2})}{\Delta J_{i+1/2}} = L(1, \theta_{i+1/2}), & \theta_{i+1/2} &= \frac{\Delta J_{i-1/2}}{\Delta J_{i+1/2}},\end{aligned}$$

то можно записать

$$J_{i+1}^{n+1} = J_{i+1/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i+1/2}^{n+1}\Delta J_{i-1/2}^{n+1} \text{ при } \mu > 0; \quad J_i^{n+1} = J_{i+1/2}^{n+1} - 0,5\psi_{i+1/2}^{n+1}\Delta J_{i+1/2}^{n+1} \text{ при } \mu \leq 0, \quad (6)$$

где $\Delta J_{i-1/2} = J_{i+1/2} - J_{i-1/2}$; L — некоторый ограничитель.

Уравнения (3), (6) представляют собой систему с четырехточечным шаблоном на $(n+1)$ -м слое. Так как функции-ограничители имеют дробно-линейный характер, то можно ожидать, что они слабо меняются за один шаг τ . Таким образом, можно их взять с предыдущего шага, внося при этом погрешность $O(\tau)$. Это дает возможность применить алгоритм бегущего счета. Тогда подстановка соотношений (6) с учетом ϕ^n, ψ^n в уравнение (3) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned}J_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{J_{i+1/2}^n C J_i^{n+1} + 0,5 C \phi_{i+1/2}^n J_{i-1/2}^{n+1}}{q + C + 0,5 C \phi_{i+1/2}^n}, & J_{i+1}^{n+1} &= \left(1 + 0,5 \phi_{i+1/2}^n\right) J_{i+1/2}^{n+1} - \\ & & & - 0,5 \phi_{i+1/2}^n J_{i-1/2}^{n+1} \quad \text{при } \mu > 0; \\ J_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{J_{i+1/2}^n - C J_{i+1}^{n+1} - 0,5 C \psi_{i+1/2}^n J_{i+3/2}^{n+1}}{q - C - 0,5 C \psi_{i+1/2}^n}, & J_i^{n+1} &= \left(1 + 0,5 \psi_{i+1/2}^n\right) J_{i+1/2}^{n+1} - \\ & & & - 0,5 \psi_{i+1/2}^n J_{i+3/2}^{n+1} \quad \text{при } \mu \leq 0,\end{aligned} \quad (7)$$

которые имеют при $\mu > 0$ разрешенный вид относительно $J_{i+1/2}^{n+1}, J_{i+1}^{n+1}$ (по этим формулам можно вести рекуррентный счет в сторону роста индекса i), а при $\mu \leq 0$ — разрешенный вид относительно $J_{i+1/2}^{n+1}, J_i^{n+1}$ (счет в сторону убывания индекса i). Хотя эта схема позволяет применять бегущий счет для решения системы разностных уравнений, аппроксимация строится в рамках трех соседних ячеек, если иметь в виду значения величины с предыдущего временного слоя, и в рамках двух ячеек, если иметь в виду ее значения с верхнего временного слоя. Построенная полунеявная TVDR-схема (7) является консервативной, так как при суммировании по всем ячейкам для $\mu > 0$ получаем

$$\begin{aligned}\sum_i \Delta J_i^{n+1} &= \sum_i \left(J_{i+1/2}^{n+1} + 0,5 \phi_{i+1/2}^n \Delta J_{i-1/2}^{n+1} - J_{i-1/2}^{n+1} - 0,5 \phi_{i-1/2}^n \Delta J_{i-3/2}^{n+1} \right) = \\ &= J_{i-1/2}^{n+1} + 0,5 \phi_{i-1/2}^n \Delta J_{i-3/2}^{n+1} - J_{1/2}^{n+1} - 0,5 \phi_{1/2}^n \Delta J_{3/2}^{n+1} = J_I^{n+1} - J_0^{n+1}.\end{aligned}$$

Для $\mu \leq 0$ консервативность показывается аналогично.

Из формул (7) для $\phi_{i+1/2}^n \geq 0, \mu > 0$ следует условие положительности $J_{i+1/2}^{n+1}$ при положительности $J_{i+1/2}^n, J_i^{n+1}, J_{i-1/2}^{n+1}$ и в центральной точке выполняется условие $0 \leq J_{i+1/2}^{n+1} \leq \max(J_{i+1/2}^n, J_i^{n+1}, J_{i-1/2}^{n+1})$, которое, к сожалению, не гарантирует положительности в узле J_{i+1}^{n+1} . Поэтому при $J_{i+1}^{n+1} < 0$ полагается $\phi_{i+1/2}^n = 0$ и счет в данной ячейке проводится по схеме первого порядка. При такой реализации можно получить принцип максимума по интегральной средней величине для всех временных шагов:

$$\begin{aligned}J_{i+1/2}^{n+1} &\leq \frac{\max_{n,i} \left(J_i^{n+1}, J_{i+1/2}^{n+1} \right)}{q + C + 0,5 C \phi_{i+1/2}^n} + \frac{C \max_{n,i} \left(J_i^{n+1}, J_{i+1/2}^{n+1} \right)}{q + C + 0,5 C \phi_{i+1/2}^n} + \frac{0,5 C \phi_{i+1/2}^n \max_{n,i} \left(J_i^{n+1}, J_{i+1/2}^{n+1} \right)}{q + C + 0,5 C \phi_{i+1/2}^n} \leq \\ &\leq \max_{n,i} \left(J_i^{n+1}, J_{i+1/2}^{n+1} \right).\end{aligned} \quad (8)$$

Из формул (7) для $\psi_{i+1/2}^n \geq 0$, $\mu \leq 0$ следует условие положительности $J_{i+1/2}^{n+1}$ при положительности $J_{i+1/2}^n$, J_{i+1}^{n+1} , $J_{i+3/2}^{n+1}$ и в центральной ячейке выполняется условие $0 \leq J_{i+1/2}^{n+1} \leq \max(J_{i+1/2}^n, J_{i+1}^{n+1}, J_{i+3/2}^{n+1})$, которое не гарантирует положительности в узле J_i^{n+1} . Поэтому при $J_i^{n+1} < 0$ полагается $\psi_{i+1/2}^n = 0$ и счет в данной ячейке проводится по схеме первого порядка. При такой реализации можно получить принцип максимума по интегральной средней величине для $\mu \leq 0$:

$$J_{i+1/2}^{n+1} \leq \frac{\max_{n,i}(J_{i+1}^{n+1}, J_{i+1/2}^{n+1})}{q - C - 0,5C\psi_{i+1/2}^n} + \frac{|C| \max_{n,i}(J_{i+1}^{n+1}, J_{i+1/2}^{n+1})}{q - C - 0,5C\psi_{i+1/2}^n} + \frac{0,5|C| \psi_{i+1/2}^n \max_{n,i}(J_{i+1}^{n+1}, J_{i+1/2}^{n+1})}{q - C - 0,5C\psi_{i+1/2}^n} \leq \max_{n,i}(J_{i+1}^{n+1}, J_{i+1/2}^{n+1}). \quad (9)$$

Из неравенств (8), (9) можно получить принцип максимума по интегральной средней величине для всей задачи: $0 \leq J_{i+1/2}^{n+1} \leq \max(J^0, J_L, J_R)$.

Если схему (7) при $\mu > 0$ записать через разности значений J в двух соседних ячейках,

$$\begin{aligned} (q + C)\Delta J_{i+1/2}^{n+1} + 0,5C(\phi_{i+3/2}^n J_{i+3/2}^{n+1} - \phi_{i+1/2}^n J_{i+1/2}^{n+1}) &= \\ &= \Delta J_{i+1/2}^n + C\Delta J_i^{n+1} + 0,5C(\phi_{i+3/2}^n J_{i+1/2}^{n+1} - \phi_{i+1/2}^n J_{i-1/2}^{n+1}), \\ \Delta J_i^{n+1} &= \Delta J_{i-1/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i+1/2}^n J_{i+1/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i+1/2}^n J_{i-1/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i-1/2}^n J_{i-1/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i-1/2}^n J_{i-3/2}^{n+1}, \end{aligned}$$

и ввести новые функции-ограничители

$$\phi_{i+1/2}^1 = \frac{\phi_{i+3/2}^n J_{i+3/2}^{n+1} - \phi_{i+1/2}^n J_{i+1/2}^{n+1}}{\Delta J_{i+1/2}^{n+1}}; \quad \phi_{i+1/2}^2 = \frac{\phi_{i+3/2}^n J_{i+1/2}^{n+1} - \phi_{i+1/2}^n J_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta J_{i-1/2}^{n+1}},$$

то получаем

$$\begin{aligned} \Delta J_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{\Delta J_{i+1/2}^n + C\Delta J_i^{n+1} + 0,5C\phi_{i+1/2}^2 \Delta J_{i-1/2}^{n+1}}{q + C + 0,5C\phi_{i+1/2}^1}; \\ \Delta J_i^{n+1} &= (1 + 0,5\phi_{i-1/2}^1) \Delta J_{i-1/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i-1/2}^2 \Delta J_{i-3/2}^{n+1}. \end{aligned}$$

При условиях $\phi_{i+1/2}^1 \geq 0$, $\phi_{i+1/2}^2 \geq 0$, $\phi_{i-1/2}^1 \Delta J_{i-1/2}^{n+1} \geq \phi_{i-1/2}^2 \Delta J_{i-3/2}^{n+1}$ можно показать монотонность по расширенному критерию (как по узлам, так и по интегральным средним) для $\mu > 0$:

из $\Delta J_{i+1/2}^n \geq 0$, $\Delta J_i^{n+1} \geq 0$, $\Delta J_{i-1/2}^{n+1} \geq 0$, $\phi_{i+1/2}^1 \geq 0$, $\phi_{i+1/2}^2 \geq 0$ следует $\Delta J_{i+1/2}^{n+1} \geq 0$;

из $\Delta J_{i-1/2}^{n+1} \geq 0$, $\phi_{i-1/2}^1 \Delta J_{i-1/2}^{n+1} \geq \phi_{i-1/2}^2 \Delta J_{i-3/2}^{n+1}$ следует $\Delta J_i^{n+1} \geq 0$;

из $\Delta J_{i+1/2}^n < 0$, $\Delta J_i^{n+1} < 0$, $\Delta J_{i-1/2}^{n+1} < 0$, $\phi_{i+1/2}^1 \geq 0$, $\phi_{i+1/2}^2 \geq 0$ следует $\Delta J_{i+1/2}^{n+1} < 0$;

из $\Delta J_{i-1/2}^{n+1} < 0$, $\phi_{i-1/2}^1 \Delta J_{i-1/2}^{n+1} < \phi_{i-1/2}^2 \Delta J_{i-3/2}^{n+1}$ следует $\Delta J_i^{n+1} < 0$.

Аналогично, если ввести функции-ограничители

$$\psi_{i+1/2}^1 = \frac{\psi_{i+3/2}^n J_{i+3/2}^{n+1} - \psi_{i+1/2}^n J_{i+1/2}^{n+1}}{\Delta J_{i+1/2}^{n+1}}; \quad \psi_{i+1/2}^2 = \frac{\psi_{i+3/2}^n J_{i+5/2}^{n+1} - \psi_{i+1/2}^n J_{i+3/2}^{n+1}}{\Delta J_{i+3/2}^{n+1}},$$

то при условиях $\psi_{i+1/2}^1 \Delta J_{i+1/2}^{n+1} \geq \psi_{i+1/2}^2 \Delta J_{i+3/2}^{n+1}$, $\psi_{i+1/2}^1 \geq 0$, $\psi_{i+1/2}^2 \geq 0$ можно показать монотонность по расширенному критерию для $\mu \leq 0$.

Несмотря на то, что схема (7) построена по классической TVD-методологии, доказать ее принадлежность классу TVD не удастся. Причина состоит в линеаризации функций-ограничителей и взятии их с предыдущего временного слоя (или итерации). Но схему (7) можно модифицировать так, чтобы она стала неявной TVD-схемой. Для этого надо привести схему (7) при $\mu > 0$ к виду

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C \left(1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i-1/2}^n \theta_{i-1/2}^{n+1} \right) \Delta J_{i-1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n.$$

Заменяя в этом уравнении $\theta_{i-1/2}^{n+1}$ на $\theta_{i-1/2}^n$, получаем модифицированную схему

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + CA_{i-1/2}^n \Delta J_{i-1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n, \quad (10)$$

которая при $A_{i-1/2}^n = 1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i-1/2}^n \theta_{i-1/2}^n \geq 0$ принадлежит классу TVD.

Если TVD-схему (10) записать через разности значений J в двух соседних ячейках $q\Delta J_{i+1/2}^{n+1} + CA_{i+1/2}^n \Delta J_{i+1/2}^{n+1} - CA_{i-1/2}^n \Delta J_{i-1/2}^{n+1} = \Delta J_{i+1/2}^n$, то получаем $\Delta J_{i+1/2}^{n+1} = \frac{\Delta J_{i+1/2}^n + CA_{i-1/2}^n \Delta J_{i-1/2}^{n+1}}{q + CA_{i+1/2}^n}$, откуда при условиях $A_{i-1/2}^n \geq 0$, $A_{i+1/2}^n \geq 0$ следует монотонность по Годунову. Уравнение (10) можно записать в виде

$$J_{i+1/2}^{n+1} = \frac{J_{i+1/2}^n + CA_{i-1/2}^n J_{i-1/2}^{n+1}}{q + CA_{i+1/2}^n},$$

откуда следует положительность решения при $A_{i-1/2}^n \geq 0$, $J_{i+1/2}^n \geq 0$, $J_{i-1/2}^{n+1} \geq 0$ и выполняется принцип максимума по интегральной средней величине: $0 \leq J_{i+1/2}^{n+1} \leq \max \left(J_{i+1/2}^n, J_{i-1/2}^{n+1} \right)$.

Из неравенства $A_{i-1/2}^n \geq 0$ получаем $\phi_{i-1/2}^n \leq \left(2 + \phi_{i+1/2}^n \right) \hat{\theta}_{i-1/2}^n$, откуда при $\phi_{i+1/2}^n \geq 0$ следует условие на функцию-ограничитель ϕ :

$$0 \leq \phi_{i-1/2} \leq 2\hat{\theta}_{i-1/2}. \quad (11)$$

Аналогично можно модифицировать схему (7) при $\mu \leq 0$. В этом случае получаем

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C \left(1 + 0,5\psi_{i+1/2}^n - 0,5\psi_{i+3/2}^n \theta_{i+1/2}^{n+1} \right) \Delta J_{i+1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n, \quad \theta_{i+1/2} = \frac{\Delta J_{i+3/2}}{\Delta J_{i+1/2}} = \hat{\theta}_{i+1/2}^{-1}.$$

Заменяя $\theta_{i+1/2}^{n+1}$ на $\theta_{i+1/2}^n$, получаем модифицированную схему

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + CB_{i+1/2}^n \Delta J_{i+1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n, \quad (12)$$

которая при $B_{i+1/2}^n = 1 + 0,5\psi_{i+1/2}^n - 0,5\psi_{i+3/2}^n \theta_{i+1/2}^n \geq 0$ принадлежит классу TVD.

Уравнение (12) можно записать в виде

$$J_{i+1/2}^{n+1} = \frac{J_{i+1/2}^n - CB_{i+1/2}^n J_{i+3/2}^{n+1}}{q - CB_{i+1/2}^n},$$

откуда следует положительность решения при $B_{i+1/2}^n \geq 0$, $J_{i+1/2}^n \geq 0$, $J_{i+3/2}^{n+1} \geq 0$. Из неравенства $B_{i+1/2}^n \geq 0$ получаем $\psi_{i+3/2}^n \leq \left(2 + \psi_{i+1/2}^n \right) \hat{\theta}_{i+1/2}^n$, откуда при $\psi_{i+1/2}^n \geq 0$ следует условие на функцию-ограничитель ψ : $0 \leq \psi_{i+3/2} \leq 2\hat{\theta}_{i+1/2}$.

К сожалению, построенная TVD-схема (10)–(12) стала неконсервативной, так как $\sum_i A_{i-1/2}^n \Delta J_{i-1/2}^{n+1} \neq \sum_i \Delta J_i^{n+1} = J_I^{n+1} - J_0^{n+1}$ при $\mu > 0$ и $\sum_i B_{i+1/2}^n \Delta J_{i+1/2}^{n+1} \neq \sum_i \Delta J_i^{n+1} = J_I^{n+1} - J_0^{n+1}$ при $\mu \leq 0$. Терять консервативность нежелательно, поэтому для численных расчетов рекомендуется использовать консервативную TVDR-схему (7), достоинствами которой являются:

- положительность при $\phi_{i+1/2}^n \geq 0$ и $\psi_{i+1/2}^n \geq 0$. При этом $\phi_{i+1/2}^n = 0$, если $J_{i+1}^{n+1} < 0$, и $\psi_{i+1/2}^n = 0$, если $J_i^{n+1} < 0$;

- условная монотонность как по значениям в узлах, так и по интегральным средним при $\phi_{i+1/2}^1 \geq 0$, $\phi_{i+1/2}^2 \geq 0$, $\psi_{i+1/2}^1 \geq 0$, $\psi_{i+1/2}^2 \geq 0$: в узлах функция J_i монотонно возрастает при $\phi_{i-1/2}^1 \Delta J_{i-1/2}^{n+1} \geq \phi_{i-1/2}^2 \Delta J_{i-3/2}^{n+1}$, $\psi_{i+1/2}^1 \Delta J_{i+1/2}^{n+1} \geq \psi_{i+1/2}^2 \Delta J_{i+3/2}^{n+1}$ или монотонно убывает при $\phi_{i-1/2}^1 \Delta J_{i-1/2}^{n+1} < \phi_{i-1/2}^2 \Delta J_{i-3/2}^{n+1}$, $\psi_{i+1/2}^1 \Delta J_{i+1/2}^{n+1} < \psi_{i+1/2}^2 \Delta J_{i+3/2}^{n+1}$;
- второй порядок аппроксимации по пространству, за исключением отдельных точек;
- возможность использования экономичного бегущего счета.

К недостаткам полунеевной TVDR-схемы можно отнести аппроксимацию в рамках трехточечного шаблона на искомом шаге, условную положительность и монотонность, а также непринадлежность классу TVD.

Мультипликативная TVDR-схема

В предыдущем разделе на примере построения полунеевной TVDR-схемы показана возможность применения TVD-методологии для неявных схем уравнения переноса излучения с сохранением бегущего счета. Особенностью предложенной полунеевной TVDR-схемы является использование трехточечного шаблона на искомом шаге, который в многомерном случае обладает определенными недостатками (см. Введение).

Построим TVDR-схему в рамках одной ячейки на искомом шаге. Если в уравнениях (6) вынести за скобку $J_{i+1/2}^{n+1}$, то соотношения связи примут вид

$$\begin{aligned} J_{i+1}^{n+1} &= \left(1 + \frac{L \left(\Delta J_{i-1/2}^{n+1}, \Delta J_{i+1/2}^{n+1} \right)}{2J_{i+1/2}^{n+1}} \right) J_{i+1/2}^{n+1} = (D^+)_{i+1/2}^{n+1} J_{i+1/2}^{n+1} \quad \text{при } \mu > 0; \\ J_i^{n+1} &= \left(1 - \frac{L \left(\Delta J_{i-1/2}^{n+1}, \Delta J_{i+1/2}^{n+1} \right)}{2J_{i+1/2}^{n+1}} \right) J_{i+1/2}^{n+1} = (D^-)_{i+1/2}^{n+1} J_{i+1/2}^{n+1} \quad \text{при } \mu \leq 0; \\ (D^+)_{i+1/2}^{n+1} &= 1 + \frac{L \left(\Delta J_{i-1/2}^{n+1}, \Delta J_{i+1/2}^{n+1} \right)}{2J_{i+1/2}^{n+1}}; \quad (D^-)_{i+1/2}^{n+1} = 1 - \frac{L \left(\Delta J_{i-1/2}^{n+1}, \Delta J_{i+1/2}^{n+1} \right)}{2J_{i+1/2}^{n+1}}. \end{aligned}$$

Возьмем коэффициенты $(D^\pm)_{i+1/2}^{n+1}$ с предыдущего шага:

$$J_{i+1}^{n+1} = (D^+)_{i+1/2}^n J_{i+1/2}^{n+1}; \quad J_i^{n+1} = (D^-)_{i+1/2}^n J_{i+1/2}^{n+1}. \quad (13)$$

В отличие от полунеевной схемы этот способ не приводит к расширению шаблона на искомом шаге и позволяет оставаться в рамках одной ячейки при бегущем счете. Схема, построенная по TVD-методологии, с соотношениями (13), связывающими величины с целыми и полуцелыми индексами через множитель D^\pm , называется мультипликативной TVDR-схемой. В работе [31] показано, что для ограничителей $\min \text{ mod}$ и Чакравати—Ошера введенные указанным образом коэффициенты D^\pm положительны и ограничены.

При $\mu > 0$ получаем

$$\begin{aligned} J_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{q + C (D^+)_{i+1/2}^n} J_{i+1/2}^n + \frac{C (D^+)_{i+1/2}^n}{q + C (D^+)_{i+1/2}^n} d_{i-1/2}^n J_{i-1/2}^{n+1}, \quad d_{i-1/2}^n = \frac{(D^+)_{i-1/2}^n}{(D^+)_{i+1/2}^n}; \\ J_{i+1}^{n+1} &= (D^+)_{i+1/2}^n J_{i+1/2}^{n+1}. \end{aligned} \quad (14)$$

В силу положительности D^+ из уравнения (14) видно, что $J_{i+1/2}^{n+1} \geq 0$ при $J_{i+1/2}^n \geq 0$ и $J_{i-1/2}^{n+1} \geq 0$. Кроме того, положительно и значение в узле J_{i+1}^{n+1} , чего не было в полунеевной схеме. Из уравнения (14) получаем

$$0 \leq J_{i+1/2}^{n+1} \leq \max \left(J_{i+1/2}^n, d_{i-1/2}^n J_{i-1/2}^{n+1} \right). \quad (15)$$

Таким образом, мультипликативная TVDR-схема положительна и удовлетворяет принципу максимума с точностью до множителя $d_{i-1/2}^n$. Определим порядок малости множителя $d_{i-1/2}^n$:

$$d_{i-1/2}^n = 1 + \frac{h}{(D^+)_{i+1/2}^n} \frac{(D^+)_{i-1/2}^n - (D^+)_{i+1/2}^n}{h} \approx 1 - \frac{h^2}{2(D^+)_{i+1/2}^n} \frac{\partial^2 (\ln J_{i+1}^n)}{\partial r^2} = 1 - O(h^2).$$

Таким образом, неравенство (15) обеспечивает принцип максимума в ячейке с точностью до второго порядка малости по пространству. При $0 \leq d_{i-1/2}^n \leq 1$ принцип максимума выполняется всегда. В остальных случаях при необходимости можно в точках нарушения условия (15) полагать $(D^+)_{i-1/2}^n = (D^+)_{i+1/2}^n$, что означает модификацию в этих точках коэффициента D^+ , либо $(D^+)_{i-1/2}^n = (D^+)_{i+1/2}^n = 1$, что означает переход в этих точках на St-схему первого порядка.

Достоинствами мультипликативной TVDR-схемы являются:

- положительность при $D^\pm > 0$;
- второй порядок аппроксимации по пространству, за исключением отдельных точек;
- возможность использования экономичного бегущего счета.

К недостаткам можно отнести непринадлежность классу TVD.

Аддитивная TVDR-схема

Если в системе уравнений (6) взять единообразную функцию-ограничитель ϕ для всех μ , а с предыдущего шага брать не только ϕ , но и саму разность $\Delta J_{i-1/2}^n$, то можно записать $J_{i+1}^{n+1} = J_{i+1/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i+1/2}^n \Delta J_{i-1/2}^n$ при $\mu > 0$ и $J_i^{n+1} = J_{i+1/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i+1/2}^n \Delta J_{i-1/2}^n$ при $\mu \leq 0$, или с учетом того, что $\phi_{i+1/2} \Delta J_{i-1/2} = L(\Delta J_{i-1/2}, \Delta J_{i+1/2}) = 2L_{i+1/2}$,

$$J_{i+1}^{n+1} = J_{i+1/2}^{n+1} + L_{i+1/2}^n \text{ при } \mu > 0; \quad J_i^{n+1} = J_{i+1/2}^{n+1} - L_{i+1/2}^n \text{ при } \mu \leq 0. \quad (16)$$

Схема, построенная по TVD-методологии с соотношениями (16), связывающими величины с целыми и полуцелыми индексами через TVD-добавку $L_{i+1/2}^n$, называется аддитивной TVDR-схемой.

Подстановка (16) в (3) приводит к уравнениям

$$J_{i+1/2}^{n+1} = \frac{J_{i+1/2}^n + C J_i^{n+1} - C L_{i+1/2}^n}{q + C} \text{ при } \mu > 0; \quad J_{i+1/2}^{n+1} = \frac{J_{i+1/2}^n - C J_{i+1}^{n+1} - C L_{i+1/2}^n}{q - C} \text{ при } \mu \leq 0, \quad (17)$$

по которым можно вести рекуррентный бегущий счет. Хотя аппроксимация в этой схеме строится в рамках трех соседних ячеек по значениям величины с предыдущего временного слоя, аппроксимация на верхнем временном слое, как и в мультипликативной TVDR-схеме, рассматривается в рамках одной ячейки.

Если в системе (17) исключить значения на гранях, то получаем исключенную систему для средней величины в ячейке:

$$\begin{aligned} J_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{J_{i+1/2}^n + C J_{i-1/2}^{n+1} + C (L_{i-1/2}^n - L_{i+1/2}^n)}{q + C} \text{ при } \mu > 0; \\ J_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{J_{i+1/2}^n - C J_{i+3/2}^{n+1} - C (L_{i+1/2}^n - L_{i+3/2}^n)}{q - C} \text{ при } \mu \leq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Из формул (18) для $L_{i-1/2}^n \geq L_{i+1/2}^n$, $\mu > 0$ следует условие положительности $J_{i+1/2}^{n+1}$ при положительности $J_{i+1/2}^n$, $J_{i-1/2}^{n+1}$, но для центральной точки не выполняется условие $0 \leq J_{i+1/2}^{n+1} \leq \max(J_{i+1/2}^n, J_{i-1/2}^{n+1})$, которое гарантирует выполнение принципа максимума и монотонность. Поэтому при $J_{i+1/2}^{n+1} < 0$ полагается $L_{i-1/2}^n = L_{i+1/2}^n$ и счет проводится по схеме повышенного порядка

с одинаковыми ограничителями. При $J_{i+1}^{n+1} < 0$ полагается $L_{i+1/2}^n = 0$ и счет проводится по схеме первого порядка аппроксимации. Аналогичные неравенства получаются при $\mu \leq 0$ (при $J_{i+1/2}^{n+1} < 0$ полагается $L_{i+3/2}^n = L_{i+1/2}^n$, при $J_i^{n+1} < 0$ полагается $L_{i+1/2}^n = 0$).

Хотя при такой реализации нельзя получить принцип максимума для всей задачи и монотонность по Годунову, в схеме выполняется условие положительности $J_{i+1/2}^{n+1}$ при $L_{i+1/2}^n \geq L_{i+3/2}^n$ во всех ячейках.

Аддитивная TVDR-схема проще мультипликативной TVDR-схемы и ближе по построению к TVD-схемам, но условия положительности $J_{i+1/2}^{n+1}$ жестче. Из $L_{i-1/2}^n \geq L_{i+1/2}^n$ при $\mu > 0$ следует $\phi_{i-1/2} \Delta J_{i-3/2} \geq \phi_{i+1/2} \Delta J_{i-1/2}$, или в другом виде, $\phi_{i+1/2} \leq \phi_{i-1/2} \theta_{i-1/2}$. Из $L_{i+1/2}^n \geq L_{i+3/2}^n$ при $\mu \leq 0$ следует $\phi_{i+3/2} \leq \phi_{i+1/2} \theta_{i+1/2}$. В точках, где условие $\phi_{i+1/2} \leq \phi_{i-1/2} \theta_{i-1/2}$ не выполняется, происходит переход на схему первого порядка.

Доказать принадлежность аддитивной TVDR-схемы классу TVD не удается из-за добавок $L_{i-1/2}^n - L_{i+1/2}^n$, $L_{i+1/2}^n - L_{i+3/2}^n$ в системе (18), которые имеют второй порядок малости. Порядок малости, например, добавки $L_{i-1/2}^n - L_{i+1/2}^n$ определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} L_{i-1/2} - L_{i+1/2} &= 0,5L (\Delta J_{i-3/2}, \Delta J_{i-1/2}) - 0,5L (\Delta J_{i-1/2}, \Delta J_{i+1/2}) \approx \\ &\approx 0,5hL \left(\frac{\partial J_{i-3/2}}{\partial r}, \frac{\partial J_{i-1/2}}{\partial r} \right) - 0,5hL \left(\frac{\partial J_{i-1/2}}{\partial r}, \frac{\partial J_{i+1/2}}{\partial r} \right) \approx \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial r^2} = O(h^2). \end{aligned}$$

Можно сказать, что аддитивная TVDR-схема (18) обеспечивает принцип максимума с точностью до второго порядка малости по пространству. При $h \rightarrow 0$ принцип максимума выполняется. В остальных случаях можно в точках нарушения принципа максимума полагать $L_{i-1/2}^n = L_{i+1/2}^n$ при $\mu > 0$ и $L_{i+3/2}^n = L_{i+1/2}^n$ при $\mu \leq 0$ или переходить на схему первого порядка аппроксимации, полагая $L_{i+1/2}^n = 0$.

Схемы TVDR могут применяться не только самостоятельно к решению УП, но и как вспомогательные алгоритмы. Это можно продемонстрировать на примере схемы DDAD-TVDR.

Схема DDAD-TVDR

Из теории дифференциальных приближений известно, что при численном решении уравнения переноса DS_n -методом по схемам второго порядка аппроксимации могут реализовываться немонотонности двух типов.

Немонотонности первого типа возникают в оптически плотной среде. Они вызваны наличием в ПДП антидиссипативной добавки вида $-\frac{\alpha}{12} h^2 \frac{\partial^2 J}{\partial x^2}$. Эту антидиссипацию можно подавить путем введения искусственной добавки, имеющей второй порядок малости.

Немонотонности второго типа возникают в зоне больших градиентов из-за слагаемых с третьими производными $\mu h^2 \frac{\partial^3 J}{\partial x^3}$ в ПДП, при которых решение УП в ПДП становится решением уравнения типа Кортевега де Вриза. Решение уравнения Кортевега де Вриза в зоне разрывов носит осциллирующий характер независимо от знака коэффициента перед производной третьего порядка. Подобное поведение характерно для всех линейных разностных схем не ниже второго порядка аппроксимации. Если же переходить в таких зонах на монотонную схему первого порядка, то осцилляции будут подавляться, но вместе с тем будет снижаться точность метода. При этом, если переходить на схему первого порядка при получении отрицательного решения, то нефизические осцилляции, возникающие для положительных значений, остаются. Поэтому для монотонизации линейных разностных схем второго порядка аппроксимации следует использовать нелинейные алгоритмы, в частности, TVDR-схемы, описанные выше.

Рассмотрим подобный подход к DDAD-схеме, которая была предложена в 1998 г. для решения УП в дипломной работе И. А. Кондакова (руководитель А. А. Шестаков). В двумерном случае в DDAD-схеме для расчета в ячейках с двумя неосвещенными противоположными гранями, а также

при получении отрицательного решения использовалась St-схема. В дальнейшем этот вариант был назван DDAD/St-схемой. DDAD/St-схема применялась для решения как двумерного уравнения переноса нейтронов [43, 44], так и двумерного уравнения переноса фотонов [45]. Сравнение по точности с другими схемами приведено в работе [46].

После создания первых TVDR-схем в 2009 г. для повышения точности схемы DDAD для ячеек с двумя неосвещенными противоположными гранями было предложено использовать TVD-реконструкцию. Но в отличие от TVDR-схем, рассмотренных выше, в схеме DDAD-TVDR реконструкция TVD применяется только для вспомогательной диссипативной функции ψ , а не для основной J , как в схемах TVDR. Еще одной особенностью схемы DDAD-TVDR является TVD-реконструкция источника на гранях ячейки.

В схеме DDAD/St при появлении отрицательных интенсивностей происходит понижение порядка точности за счет перехода на монотонную St-схему первого порядка аппроксимации. В схеме DDAD-TVDR при появлении отрицательных интенсивностей переход на TVDR-схему происходит более плавно (со схемы второго порядка аппроксимации DDAD на схему повышенного порядка аппроксимации TVDR), что делает ее предпочтительнее также и по числу итераций.

Схема DDAD для уравнения (1) имеет вид

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C\Delta\psi_i^{n+1} = J_{i+1/2}^n; \quad J_{i+1/2}^{n+1} = \frac{\psi_{i+1}^{n+1} + \psi_i^{n+1}}{2} + \delta \operatorname{sign}(\mu)\Delta\psi_i^{n+1} - \theta \operatorname{sign}(\mu)\Delta J_i^n, \quad (19)$$

где δ , θ , q — неотрицательные параметры схемы: $\delta = \frac{1}{2} \frac{1 + e^{-\gamma}}{1 - e^{-\gamma}} - \frac{1}{\gamma}$, $0 \leq \delta \leq 0,5$, $\gamma = \frac{qh}{c\tau|\mu|} \geq 0$; $\theta = \frac{\delta}{q}$, $0 \leq \theta \leq 0,5$; $q = 1 + c\tau\alpha \geq 1$; $C = \frac{c\tau\mu}{h}$.

Подставляя $J_{i+1/2}^{n+1}$ из второго уравнения системы (19) в первое, получаем уравнение для диссипативной функции ψ :

$$\frac{\psi_{i+1}^{n+1} + \psi_i^{n+1}}{2} + z\Delta\psi_i^{n+1} = \frac{1}{q}J_{i+1/2}^n + \theta \operatorname{sign}(\mu)\Delta J_i^n,$$

где $z = \delta \operatorname{sign}(\mu) + \frac{C}{q} = \frac{\mu}{2|\mu|} \frac{1 + e^{-\gamma}}{1 - e^{-\gamma}}$ с учетом, что $\operatorname{sign}(\mu) = \frac{\mu}{|\mu|}$ при $\mu \neq 0$.

Разрешив это уравнение относительно ψ для организации бегущего счета, получим

$$\begin{aligned} \psi_{i+1}^{n+1} &= e^{-\gamma}\psi_i^{n+1} + (1 - e^{-\gamma}) \left(q^{-1}J_{i+1/2}^n + \theta\Delta J_i^n \right) \quad \text{при } \mu > 0; \\ \psi_i^{n+1} &= e^{-\gamma}\psi_{i+1}^{n+1} + (1 - e^{-\gamma}) \left(q^{-1}J_{i+1/2}^n - \theta\Delta J_i^n \right) \quad \text{при } \mu \leq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Эти формулы аналогичны точному решению дифференциального уравнения $\frac{d\psi}{dx} + \alpha\psi = Q$: $\psi = e^{-\alpha x}\psi_0 + (1 - e^{-\alpha x})Q/\alpha$ при $\alpha = \operatorname{const}$, $Q = \operatorname{const}$, $\psi_0 = \operatorname{const}$.

То есть схема DDAD дает точное решение стационарного УП в рамках ячейки при постоянных значениях γ и Q . Это свойство схема DDAD сохраняет и в нелинейных задачах, так как при аппроксимации в рамках разностной ячейки предполагается постоянство всех дискретных функций:

$$\alpha_{i+1/2} = \operatorname{const}; \quad \gamma_{i+1/2} = \operatorname{const}; \quad Q_{i+1/2}^n = J_{i+1/2}^n + \operatorname{sign}(\mu) (\theta q)_{i+1/2}^n \Delta J_i^n = \operatorname{const}.$$

Из формул (20) следует положительность диссипативной функции в узлах при $Q_{i+1/2}^n \geq 0$. Используя при линейном представлении J^n ограничение производной $\left| \frac{J_{i+1}^n - J_i^n}{h} \right| \leq \frac{2}{h} J_{i+1/2}^n$, можно в ячейках, где нарушается условие положительности диссипативной функции, производную ΔJ_i^n выбирать из условия $\Delta J_i^n = 2J_{i+1/2}^n \operatorname{sign}(\Delta J_i^n)$. В этом случае выполняется условие положительности правой части УП, которое гарантирует выполнение условия положительности ψ :

$$Q_{i+1/2}^n = [1 + 2\delta \operatorname{sign}(\mu) \operatorname{sign}(\Delta J_i^n)] J_{i+1/2}^n \geq 0 \quad \text{при } \delta = \theta q \leq 0,5.$$

После вычисления диссипативной функции в узлах можно из второго уравнения системы (19) вычислить значения интегральной средней величины в центрах ячеек. При $J_{i+1/2}^{n+1} < 0$ полагается $\theta = 0$.

Схема DDAD-TVDR при $\theta = 0$ удовлетворяет принципу максимума для диссипативной функции. Это несложно показать, так как при $\mu > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \psi_{i+1}^{n+1} &\leq e^{-\gamma} \max\left(\psi_i^{n+1}, J_{i+1/2}^n\right) + \frac{1 - e^{-\gamma}}{q} \max\left(\psi_i^{n+1}, J_{i+1/2}^n\right) = \\ &= \frac{1 + c\tau\alpha e^{-\gamma}}{1 + c\tau\alpha} \max\left(\psi_i^{n+1}, J_{i+1/2}^n\right) \leq \max\left(\psi_i^{n+1}, J_{i+1/2}^n\right). \end{aligned}$$

При $\mu \leq 0$ аналогично получаем $\psi_i^{n+1} \leq \max\left(\psi_{i+1}^{n+1}, J_{i+1/2}^n\right)$. Отсюда следует принцип максимума для всех узлов разностной сетки: $\psi_i^{n+1} \leq \max_{n,i}\left(\psi_0^{n+1}, \psi_1^{n+1}, J_{i+1/2}^n\right)$. С учетом соотношений на границах $\psi_0^{n+1} = J_L$, $\psi_1^{n+1} = J_R$ получаем принцип максимума для всей задачи: $0 \leq \psi_i^{n+1} \leq \max(J^0, J_L, J_R)$.

Если систему (20) при $\theta = 0$ записать через разности значений ψ в двух соседних ячейках

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{i+1}^{n+1} &= e^{-\gamma} \Delta\psi_i^{n+1} + \frac{1 - e^{-\gamma}}{q} \Delta J_{i+1/2}^n \quad \text{при } \mu > 0; \\ \Delta\psi_i^{n+1} &= e^{-\gamma} \Delta\psi_{i+1}^{n+1} + \frac{1 - e^{-\gamma}}{q} \Delta J_{i+1/2}^n \quad \text{при } \mu \leq 0, \end{aligned}$$

то можно показать монотонность диссипативной функции.

Аналогично, если второе уравнение системы (19) при $\theta = 0$ записать через разности значений ψ в двух соседних ячейках

$$\Delta J_{i+1/2}^{n+1} = (0,5 + \delta \operatorname{sign}(\mu)) \Delta\psi_{i+1}^{n+1} + (0,5 - \delta \operatorname{sign}(\mu)) \Delta\psi_i^{n+1},$$

то с учетом того, что $0,5 \pm \delta \geq 0$, можно показать монотонность интегральной средней величины.

Достоинствами схемы DDAD-TVDR являются:

- положительность с переходом при $J_{i+1/2}^{n+1} < 0$ на $\theta = 0$;
- безусловная монотонность при $\theta = 0$;
- второй порядок аппроксимации по пространству, за исключением отдельных точек;
- возможность использования экономичного бегущего счета.

Численные расчеты

Для численных расчетов рассмотрим вторую задачу Флека [47]. Эта задача является наиболее популярным тестом для задач СУПТИ. В ней исследуется прохождение тепловой волны через различные по оптической толщине среды, на границе которых температура вещества терпит разрывы первого и второго рода. В данной задаче слоистая система толщиной 4 см и плотностью 1 г/см^3 прогревается стационарным планковским источником излучения, соответствующим температуре 1 кэВ. Уравнение состояния — $E = 0,81T$, рассеяние отсутствует.

Для численного моделирования по радиусу взята неравномерная сетка со сгущением к границам веществ в 59 ячеек. Многогрупповой коэффициент поглощения берется в виде

$$\alpha_{cg} = \begin{cases} 10\,000 \varepsilon_g^{-3} (1 - e^{-\varepsilon_g/T}), & 102 \leq R \leq 102,4; \\ 27 \varepsilon_g^{-3} (1 - e^{-\varepsilon_g/T}) & \text{в остальной области.} \end{cases}$$

По энергии фотонов бралось 15 групп (g — индекс группы): $\varepsilon_g = 0,15; 0,45; 0,7; 1; 1,35; 1,65; 2,1; 2,55; 2,85; 3,5; 4,5; 6; 8; 10; 13$. Задача считалась с постоянным шагом 2×10^{-5} мс до выхода на стационарный режим при $t = 0,01$ мс.

На рис. 1, 2 приведены графики распределений температуры вещества при $t = 0,01$ мс и $t = 0,0005$ мс, полученные по схемам St, DDAD-TVDR, мультипликативной TVDR и аддитивной

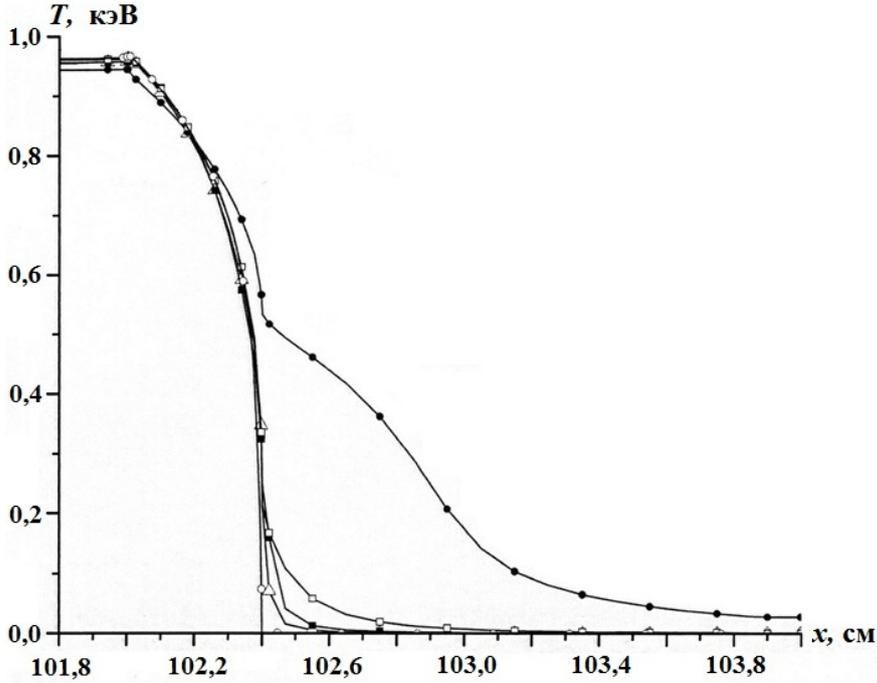


Рис. 1. Профили температуры вещества при $t = 0,0005$ мс: \triangle — DDAD-TVDR-схема; \blacksquare — мультипликативная TVDR-схема; \square — аддитивная TVDR-схема; \bullet — St-схема; \circ — эталонное решение

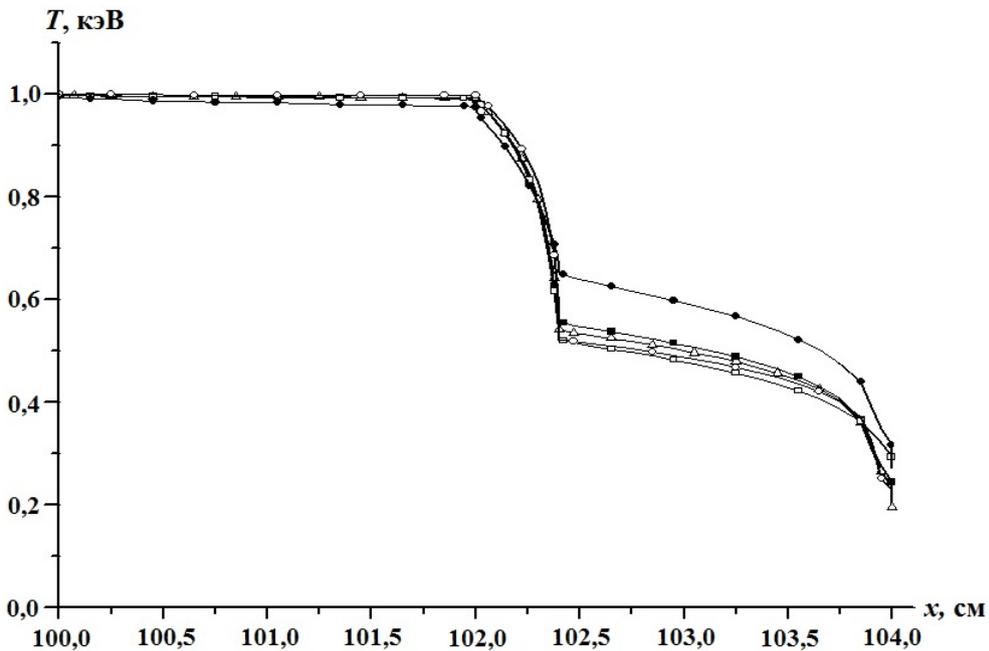


Рис. 2. Профили температуры вещества при $t = 0,01$ мс: \triangle — DDAD-TVDR-схема; \blacksquare — мультипликативная TVDR-схема; \square — аддитивная TVDR-схема; \bullet — St-схема; \circ — аналитическое решение

TVDR. Для сравнения на рис. 1 приведено эталонное решение, полученное в расчетах на сходимость на разностной сетке, а на рис. 2 — распределение температуры, полученное по аналитическим формулам [48].

Из рисунков видно, что все схемы повышенного порядка аппроксимации дают монотонные температуры, близкие к аналитическому решению, кроме St-схемы, профиль которой из-за первого порядка аппроксимации заметно отличается от точного, особенно на интервале $102,4 \text{ см} < x < 104 \text{ см}$. При измельчении сетки в расчетах на сходимость все схемы дают одинаковый результат.

Заключение

Для решения СУПТИ предлагается новый класс TVDR-схем. TVDR-схемами называются неявные разностные схемы, использующие для нахождения основных величин двухточечный сеточный шаблон на искомом временном шаге и более широкий шаблон для TVD-реконструкции основных величин и их производных с предыдущего шага. Это позволяет при решении СУПТИ пользоваться экономичными численными методами, в которых число арифметических операций пропорционально количеству узлов разностной сетки. Для рассмотренных схем доказано, что разностная дискретизация абсолютно устойчива и консервативна. Получены условия положительности и монотонности схем.

Список литературы

1. *Басс Л. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А.* Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. М.: ИПМ, 1986.
Bass L. P., Voloshchenko A. M., Germogenova T. A. Metody diskretnykh ordinat v zadachakh o perenose izlucheniya. M.: IPM, 1986.
2. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
Zeldovich Ya. B., Rayzer Yu. P. Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodynamiceskikh yavleniy. M.: Nauka, 1966.
3. *Елесин В. А., Трощев В. Е., Юдинцев В. Ф.* Развитие численных методов и программ расчета одномерных спектральных задач переноса теплового излучения во ВНИИЭФ (задачи ФО) // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2002. Вып. 1. С. 11–28.
Elesin V. A., Troshchiev V. E., Yudinsev V. F. Razvitie chislennykh metodov i programm rascheta odnomernykh spektralnykh zadach perenosa teplovogo izlucheniya vo VNIIEF (zadachi FO) // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2002. Vyp. 1. S. 11–28.
4. *Грошев Е. В., Пастушенко А. М., Юдинцев В. Ф.* Об одной трехточечной разностной схеме с весовым множителем для уравнения переноса // Там же. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1985. Вып. 2. С. 87–96.
Groshev E. V., Pastushenko A. M., Yudinsev V. F. Ob odnoy trekhtocheynoy raznostnoy skheme s vesovym mnozhitelom dlya uravneniya perenosa // Tam zhe. Ser. Metodiki i programmy chislennogo resheniya zadach matematicheskoy fiziki. 1985. Vyp. 2. S. 87–96.
5. *Алексеев А. В., Беляков И. М., Бочков А. И., Евдокимов В. В., Ириничев Е. А., Морозов В. Ю., Москвин А. Н., Нурждин А. А., Пепеляев М. П., Резчиков В. Ю., Сучкова В. В., Шарифуллин Э. Ш., Шемякина Т. В., Шумилин В. А.* Методика САТУРН-2005. Математические модели, алгоритмы и программы решения многомерных задач переноса частиц и энергии // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 4. С. 17–30.
Alekseev A. V., Belyakov I. M., Bochkov A. I., Evdokimov V. V., Irinichev E. A., Morozov V. Yu., Moskvina A. N., Nuzhdin A. A., Pepelyaev M. P., Rezchikov V. Yu., Suchkova V. V., Sharifullin E. Sh., Shemyakina T. V., Shumilin V. A. Metodika SATURN-2005. Matematicheskie modeli i

- programmy resheniya mnogomernykh zadach perenosa chastits i energii // Tam zhe. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2013. Vyp. 4. S. 17–30.
6. *Гусев В. Ю., Козманов М. Ю., Рачилов Е. Б.* Метод решения неявных разностных уравнений, аппроксимирующих системы уравнений переноса и диффузии излучения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1984. Т. 24, № 12. С. 1842–1849.
Gusev V. Yu., Kozmanov M. Yu., Rachilov E. B. Metod resheniya neyavnykh raznostnykh uravneniy, approssimiruyushchikh sistemy uravneniy perenosa i diffuzii izlucheniya // Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz. 1984. T. 24, N 12. S. 1842–1849.
 7. *Шестаков А. А.* Об одном варианте метода выделения диагонального элемента // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1990. Вып. 2. С. 71–75.
Shestakov A. A. Ob odnom variante metoda vydeleniya diagonalnogo elementa // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 1990. Vyp. 2. S. 71–75.
 8. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47. С. 271–306.
Godunov S. K. Raznostny metod chislennogo rascheta razryvnykh resheniy uravneniy gidrodinamiki // Matematicheskii sbornik. 1959. T. 47. S. 271–306.
 9. *Шокин Ю. И.* Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1974.
Shokin Yu. I. Metod differentsialnogo priblizheniya. Novosibirsk: Nauka, 1974.
 10. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
Karptan V. I. Nelineinye volny v dispergiruyushchikh sredakh. M.: Nauka, 1973.
 11. *Шестаков А. А.* Основные нерешенные проблемы при численном решении уравнения переноса излучения // Тез. докл. X Межд. конф. "Забабахинские науч. чтения". Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2010.
Shestakov A. A. Osnovnye nereshennye problemy pri chislennom reshenii uravneniya perenosa izlucheniya // Tez. dokl. X Mezhd. konf. "Zababakhinskie nauch. chteniya". Snezhinsk: RFYaTs-VNIITF, 2010.
 12. *Михайловская М. Н., Рогов В. В.* Монотонные компактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2012. Т. 52, № 4. С. 672–695.
Mikhaylovskaya M. N., Rogov V. V. Monotonnye kompaktnye skhemy begushchego scheta dlya sistem uravneniy giperbolicheskogo tipa // Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz. 2012. T. 52, N 4. S. 672–695.
 13. *Белоцерковский О. М., Гушчин В. А., Коншин В. Н.* Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // Там же. 1987. Т. 27, № 4. С. 594–609.
Belotserkovskiy O. M., Gushchin V. A., Konshin V. N. Metod rasshchepleniya dlya issledovaniya techeniy stratifitsirovannoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnostyu // Tam zhe. 1987. T. 27, N 4. S. 594–609.
 14. *Михайловская М. Н., Рогов В. В.* Монотонная высокоточная компактная схема бегущего счета для квазилинейных уравнений гиперболического типа // Докл. АН. 2011. Т. 440, № 2. С. 172–177.
Mikhaylovskaya M. N., Rogov V. V. Monotonnaya vysokotochnaya kompaktnaya skhema begushchego scheta dlya kvasilineynykh uravneniy giperbolicheskogo tipa // Dokl. AN. 2011. T. 440, N 2. S. 172–177.
 15. *Пинчуков В. И.* О построении монотонных схем типа предиктор-корректор произвольного порядка аппроксимации // Математическое моделирование. 1991. Т. 3, № 9. С. 95–103.
Pinchukov V. I. O postroenii monotonnykh skhem tipa prediktor-korrektor proizvolnogo poryadka approssimatsii // Matematicheskoye modelirovanie. 1991. T. 3, N 9. S. 95–103.

16. *Козманов М. Ю.* Монотонные схемы для системы переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 2. С. 51–54.
Kozmanov M. Yu. Monotonnyye skhemy dlya sistemy perenosa izlucheniya // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 1989. Vyp. 2. S. 51–54.
17. *Гусев В. Ю., Козманов М. Ю.* Схема первого порядка точности с апостериорной коррекцией для решения системы нестационарных уравнений переноса излучения и энергии // Там же. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1988. Вып. 3. С. 56–63.
Gusev V. Yu., Kozmanov M. Yu. Skhema pervogo poryadka tochnosti s aposteriornoy korrektsiey dlya resheniya sistemy nestatsionarnykh uravneniy perenosa izlucheniya i energii // Tam zhe. Ser. Metodiki i programmy chislennogo resheniya zadach matematicheskoy fiziki. 1988. Vyp. 3. S. 56–63.
18. *Андреев Е. С., Гусев В. Ю., Козманов М. Ю.* Методы повышения точности схемы первого порядка аппроксимации для решения уравнений переноса излучения // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1998. Вып. 1. С. 15–18.
Andreev E. S., Gusev V. Yu., Kozmanov M. Yu. Metody povysheniya tochnosti skhemy pervogo poryadka approksimatsii dlya resheniya uravneniy perenosa izlucheniya // Tam zhe. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 1998. Vyp. 1. S. 15–18.
19. *Карлсон Б.* Численное решение задачи кинетической теории нейтронов // Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1963. С. 243–258.
Karlson B. Chislennoe reshenie zadachi kineticheskoy teorii neytronov // Teoriya yadernykh reaktov. M.: Atomizdat, 1963. S. 243–258.
20. *Федоренко Р. П.* Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1962. Т. 2, № 6. С. 1122–1128.
Fedorenko R. P. Primenenie raznostnykh skhem vysokoy tochnosti dlya chislennogo resheniya giperbolicheskikh uravneniy // Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz. 1962. T. 2, N 6. S. 1122–1128.
21. *Rhoades W. A., Engle W. W.* A new weighted-difference formulation for discrete ordinates calculations // Trans. Am. Nucl. Soc. 1977. Vol. 27. P. 776–777.
22. *Гаджиев А. Д., Кондаков И. А., Писарев В. Н., Стародумов О. И., Шестаков А. А.* Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) для численного решения уравнения переноса нейтронов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 4. С. 13–24.
Gadzhiev A. D., Kondakov I. A., Pisarev V. N., Starodumov O. I., Shestakov A. A. Metod diskretnykh ordinat s iskusstvennoy dissipatsiey (DDAD-skhema) dlya chislennogo resheniya uravneniya perenosa neytronov // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2003. Vyp. 4. S. 13–24.
23. *Шестаков А. А.* Численные эффекты при моделировании переноса теплового излучения // Там же. 2018. Вып. 4. С. 29–45.
Shestakov A. A. Chislennyye efekty pri modelirovanii perenosa teplovogo izlucheniya // Tam zhe. 2018. Vyp. 4. S. 29–45.
24. *Шестаков А. А.* Сеточные эффекты при моделировании переноса теплового излучения // Там же. 2019. Вып. 1. С. 44–56.
Shestakov A. A. Setochnyye efekty pri modelirovanii perenosa teplovogo izlucheniya // Tam zhe. 2019. Vyp. 1. S. 44–56.
25. *Шестаков А. А.* О диффузионных свойствах схемы РОМБ для P_1 -уравнений // Там же. 2011. Вып. 2. С. 56–62.
Shestakov A. A. O diffuzionnykh svoystvakh skhemy ROMB dlya P_1 -uravneniy // Tam zhe. 2011. Vyp. 2. S. 56–62.

26. *Гаджиев А. Д., Писарев В. Н., Шестаков А. А.* Метод расчета двумерных задач теплопроводности на неортогональных сетках // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1982. Т. 22, № 2. С. 339–347.
Gadzhiev A. D., Pisarev V. N., Shestakov A. A. Metod rascheta dvumernykh zadach teploprovodnosti na neortogonalnykh setkakh // Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz. 1982. T. 22, N 2. S. 339–347.
27. *Гаджиев А. Д., Шестаков А. А.* Метод "Ромб" для решения многогруппового уравнения переноса излучения в P_1 -приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 66–70.
Gadzhiev A. D., Shestakov A. A. Metod "Romb" dlya resheniya mnogogruppovogo uravneniya perenosa izlucheniya v P_1 -priblizhenii // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 1989. Vyp. 3. S. 66–70.
28. *Гаджиев А. Д., Селезнёв В. Н., Шестаков А. А.* DS_n -метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели // Там же. 2003. Вып. 4. С. 33–46.
Gadzhiev A. D., Seleznev V. N., Shestakov A. A. DS_n -metod s iskusstvennoy dissipatsiyey i VDM-metod uskoreniya iteratsiy dlya chislenного resheniya dvumernogo uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v kineticheskoy modeli // Tam zhe. 2003. Vyp. 4. S. 33–46.
29. *Калиткин Н. Н., Корякин П. В.* Бикомпактные схемы и слоистые среды // Докл. АН. 2008. Т. 419, № 6. С. 744–748.
Kalitkin N. N., Koryakin P. V. Bikompaktnye skhemy i sloistye sredy // Dokl. AN. 2008. T. 419, N 6. S. 744–748.
30. *Колган В. П.* Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. Зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3, № 6. С. 68–77.
Kolgan V. P. Primenenie printsipa minimalnykh znacheniy proizvodnykh k postroyeniyu konechno-raznostnykh skhem dlya rascheta razryvnykh resheniy gazovoy dinamiki // Uch. Zap. TsAGI. 1972. T. 3, N 6. S. 68–77.
31. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1983. Vol. 49. P. 357–393.
32. *Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Шестаков А. А.* Применение TVD-подхода к DS_n -методу решения уравнения переноса теплового излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 37–48.
Gadzhiev A. D., Zavyalov V. V., Shestakov A. A. Primenenie TVD-podkhoda k DS_n -metodu resheniya uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2009. Vyp. 2. S. 37–48.
33. *Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Шестаков А. А.* Применение TVD-подхода к DS_n -методу решения уравнения переноса теплового излучения в осесимметричной RZ -геометрии // Там же. 2010. Вып. 2. С. 30–39.
Gadzhiev A. D., Zavyalov V. V., Shestakov A. A. Primenenie TVD-podkhoda k DS_n -metodu resheniya uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v osesimmetrichnoy RZ -geometrii // Tam zhe. 2010. Vyp. 2. S. 30–39.
34. *Шестаков А. А.* К вопросу построения монотонной разностной аппроксимации системы P_1 -уравнений // Там же. 2017. Вып. 1. С. 30–45.
Shestakov A. A. K voprosu postroyeniya monotonnoy raznostnoy approksimatsii sistemy P_1 -uravneniy // Tam zhe. 2017. Vyp. 1. S. 30–45.
35. *Гаджиев А. Д., Кошутин Д. А., Шестаков А. А.* Метод дискретных ординат с TVD-реконструкцией и синтетический метод ускорения итераций для численного решения уравнения переноса теплового излучения // Там же. 2013. Вып. 3. С. 3–15.
Gadzhiev A. D., Koshutin D. A., Shestakov A. A. Metod diskretnykh ordinat s TVD-rekonstruktsiyey

- i sinteticheskiy metod uskoreniya iteratsiy dlya chislennogo resheniya uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya // Там же. 2013. Вып. 3. С. 3–15.
36. *Гаджиев А. Д., Кошутин Д. А., Шестаков А. А.* DS_n -метод с TVD-реконструкцией и синтетическим P_1SA -методом ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в осесимметричной RZ -геометрии // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2016. Вып. 4. С. 3–19.
Gadzhiev A. D., Koshutin D. A., Shestakov A. A. DS_n -metod s TVD-rekonstruktsiyey i sinteticheskim P_1SA -metodom uskoreniya iteratsiy dlya chislennogo resheniya dvumernogo uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v osesimmetrichnoy RZ -geometrii // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2016. Вып. 4. С. 3–19.
37. *Гаджиев А. Д., Вершинская А. С., Грабовенская С. А., Шестаков А. А.* Применение TVD-подхода к решению уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении // Там же. 2009. Вып. 2. С. 21–36.
Gadzhiev A. D., Vershinskaya A. S., Grabovenskaya S. A., Shestakov A. A. Primenenie TVD-podkhoda k resheniyu uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v P_1 -priblizhenii // Там же. 2009. Вып. 2. С. 21–36.
38. *Вершинская А. С., Шестаков А. А.* Исследование порядка численной сходимости TVD-схемы для решения уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении // Там же. 2013. Вып. 1. С. 18–33.
Vershinskaya A. S., Shestakov A. A. Issledovanie poryadka chislennoy skhodimosti TVD-skhemoy dlya resheniya uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v P_1 -priblizhenii // Там же. 2013. Вып. 1. С. 18–33.
39. *Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Грабовенская С. А., Шестаков А. А.* Применение TVD-подхода к решению уравнения переноса теплового излучения квазидиффузионным методом // Там же. 2010. Вып. 3. С. 3–14.
Gadzhiev A. D., Zavyalov V. V., Grabovenskaya S. A., Shestakov A. A. Primenenie TVD-podkhoda k resheniyu uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya kvasidiffuzionnym metodom // Там же. 2010. Вып. 3. С. 3–14.
40. *Гаджиев А. Д., Кошутин Д. А., Шестаков А. А.* TVD-схема для численного решения переноса излучения в P_1 -приближении // Там же. 2013. Вып. 2. С. 48–55.
Gadzhiev A. D., Koshutin D. A., Shestakov A. A. TVD-skhem dlya chislennogo resheniya perenosa izlucheniya v P_1 -priblizhenii // Там же. 2013. Вып. 2. С. 48–55.
41. *Гаджиев А. Д., Чубарешко И. С., Шестаков А. А.* Неявный конечно-объемный TVD-метод для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении // Там же. 2017. Вып. 2. С. 18–29.
Gadzhiev A. D., Chubareshko I. S., Shestakov A. A. Neyavny konechno-ob'yomny TVD-metod dlya chislennogo resheniya dvumernogo uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v P_1 -priblizhenii // Там же. 2017. Вып. 2. С. 18–29.
42. *Шестаков А. А.* О монотонной аппроксимации системы P_1 -уравнений // Тез. докл. XIII Межд. конф. "Забабакхинские науч. чтения". Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2017. С. 358.
Shestakov A. A. O monotonnoy approksimatsii sistemy P_1 -uravneniy // Tez. dokl. XIII Mezhd. konf. "Zababakhinskie nauch. chteniya". Snezhinsk: RFYaTs-VNIITF, 2017. С. 358.
43. *Гаджиев А. Д., Кондаков И. А., Селезнев В. Н., Стародумов О. И., Шестаков А. А.* DDAD-схема для численного решения уравнения переноса // Тез. докл. VII Межд. конф. "Забабакхинские науч. чтения". Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2003. С. 209.
Gadzhiev A. D., Kondakov I. A., Seleznev V. N., Starodumov O. I., Shestakov A. A. DDAD-skhem dlya chislennogo resheniya uravneniya perenosa // Tez. dokl. VII Mezhd. konf. "Zababakhinskie nauch. chteniya". Snezhinsk: RFYaTs-VNIITF, 2003. С. 209.
44. *Гаджиев А. Д., Кондаков И. А., Писарев В. Н., Стародумов О. И., Шестаков А. А.* Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) для численного решения

- уравнения переноса нейтронов // Тез. докл. Межд. семинара "Супервычисления и математическое моделирование". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2003. С. 43.
- Gadzhiev A. D., Kondakov I. A., Pisarev V. N., Starodumov O. I., Shestakov A. A.* Metod diskretnykh ordinat s iskusstvennoy dissipatsiyey (DDAD-skhema) dlya chislennogo resheniya uravneniya perenosa neytronov // Тез. докл. Межд. семинара "Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie". Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2003. S. 43.
45. *Гаджиев А. Д., Селезнёв В. Н., Шестаков А. А.* DS_n -метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели // Там же. С. 42.
- Gadzhiev A. D., Seleznev V. N., Shestakov A. A.* DS_n -metod s iskusstvennoy dissipatsiyey i VDM-metod uskoreniya iteratsiy dlya chislennogo resheniya dvumernogo uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v kineticheskoy modeli // Там zhe. S. 42.
46. *Завьялов В. В., Козманов М. Ю., Селезнёв В. Н., Черняков В. Е., Шестаков А. А.* Результаты численных расчетов одномерных тестовых задач переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 3. С. 26—36.
- Zavyalov V. V., Kozmanov M. Yu., Seleznev V. N., Chernyakov V. E., Shestakov A. A.* Rezultaty chislennykh raschetov odnomernykh testovykh zadach perenosa izlucheniya // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2005. Vyp. 3. S. 26—36.
47. *Fleck J. F., Cummings Jr. and J. D.* An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8(3). С. 313—342.
48. *Завьялов В. В., Шестаков А. А.* Упрощенные решения задач Флека // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 1. С. 45—52.
- Zavyalov V. V., Shestakov A. A.* Uproshchennyye resheniya zadach Fleka // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2013. Vyp. 1. S. 45—52.

Статья поступила в редакцию 07.05.18.

TVDR-SCHEMES TO SOLVE A SYSTEM OF RADIATIVE HEAT TRANSFER EQUATIONS / A. A. Shestakov (FSUE "Acad. E. I. Zababakhin RFNC-VNIITF", Snezhinsk, Chelyabinsk region).

Studies on the construction of implicit unconditionally monotone difference schemes of a higher order of approximation for the radiative heat transfer equation within the one-cell template were carried out.

Keywords: radiative transfer equation, difference schemes.
