

I. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА С УРАВНЕНИЯМИ СО СПИНОРНЫМИ ВОЛНОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ ДЛЯ ФЕРМИОННЫХ ПОЛЕЙ

В. П. Незнамов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Рассмотрена квантовая электродинамика (КЭД) с самосопряженными уравнениями со спинорными волновыми функциями для фермионных полей. В низшем порядке теории возмущений вычислены матричные элементы ряда физических процессов КЭД. Конечные результаты совпадают с сечениями, вычисленными в стандартной КЭД. Вычислены собственная энергия электрона и амплитуды процессов, связанные с определением аномального магнитного момента электрона. Эти результаты совпадают с результатами в стандартной КЭД. Новым в расчетах собственной энергии и аномального момента электрона является присутствие в промежуточных виртуальных состояниях только состояний с положительной энергией. В стандартной КЭД отсутствие вклада виртуальных состояний с отрицательной энергией приводит к линейной расходимости собственной энергии в ультрафиолетовом пределе.

Ключевые слова: самосопряженные уравнения со спинорными волновыми функциями, квантовая электродинамика, диаграммы Фейнмана, собственная энергия электрона, аномальный магнитный момент электрона.

1. Введение

В квантовой механике движение частиц со спином $\frac{1}{2}$ описывается, как правило, уравнением Дирака с производными первого порядка по пространственно-временным переменным биспинорной волновой функции [1].

Движение фермионов во внешних силовых полях можно описывать также самосопряженными уравнениями со спинорными волновыми функциями [2]. В этом случае частицы и античастицы описываются разными уравнениями.

В процесс преобразования от уравнения Дирака с биспинорной волновой функцией к самосопряженным уравнениям для частиц и античастиц со спинорными волновыми функциями энергия частицы (античастицы) сохраняется, в то время как плотности вероятностей обнаружения частиц (античастиц) различаются. Это приводит к новым физическим следствиям. Так, например, при наличии горизонтов событий нерегулярные стационарные решения уравнения Дирака во внешних гравитационных и электромагнитных полях Шварцшильда, Райсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена становятся регулярными стационарными решениями самосопряженных уравнений с квадратично-интегрируемыми спинорными волновыми функциями [3–5].

Анализ уравнений со спинорными волновыми функциями в кулоновском поле отталкивания показал наличие в эффективном потенциале непроницаемого потенциального барьера с радиусом, пропорциональным классическому радиусу фермиона и обратно пропорциональным энергии фермиона (при $E \gg mc^2$), где E и m – энергия и масса фермиона, c – скорость света [6]. Существование непроницаемого барьера не противоречит результатам экспериментов по зондированию внутренней структуры электрона [7] и не влияет в низшем порядке теории возмущений на сечение кулоновского рассеяния электронов.

В данной работе рассмотрена квантовая электродинамика (КЭД) с самосопряженными уравнениями со спинорными волновыми функциями для фермионных полей.

В разделе 2 изложена процедура получения самосопряженных уравнений со спинорными волновыми функциями [6]. В разделе 3 кратко изложен формализм квантовой электродинамики с фермионными уравнениями со спинорными волновыми функциями. В разделе 4 для рассматриваемого варианта квантовой электродинамики анализируются собственно-энергетические диаграммы Фейнмана. В разделе 5 на примере радиационных поправок к кулоновскому рассеянию электронов вычисляется аномальный момент электрона. В Приложении 1 приведены операторы взаимодействия $\sim e^2, e^3$. В Приложении 2 приводятся результаты расчетов некоторых эффектов квантовой электродинамики. В Заключении проводится обсуждение полученных результатов.

Перечислим эти результаты:

1. В низжайшем порядке теории возмущений рассмотрены матричные элементы кулоновского рассеяния электронов, рассеяния электрона на протоне, комптон-эффекта, аннигиляции электрон-позитронной пары. Конечные результаты расчетов совпадают с аналогичными величинами, вычисленными в стандартной КЭД с использованием уравнения Дирака с биспинорной волновой функцией.

2. Матричные элементы для вычисления аномального магнитного момента электрона согласуются с элементами, определенными в стандартной КЭД.

3. Собственная энергия электрона с ультрафиолетовой логарифмической расходимостью согласуется со значением, вычисленным в стандартной КЭД.

Новым, по сравнению со стандартной КЭД, является отсутствие вклада в собственную энергию и в аномальный магнитный момент электрона виртуальных состояний с отрицательной энергией. В этом случае в стандартной КЭД собственная энергия линейно расходится при бесконечном верхнем пределе интегрирования. Только учет вклада виртуальных состояний с отрицательной энергией приводит к логарифмической ультрафиолетовой расходимости собственной энергии [8].

В статье мы используем систему единиц $\hbar=c=1$ и сигнатуру пространства-времени Минковского

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]. \quad (1)$$

В (1) $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

2. Самосопряженные уравнения со спинорными волновыми функциями для фермионов, движущихся во внешнем электромагнитном поле

Для фермионов с массой m и зарядом e , движущихся во внешнем электромагнитном поле, уравнение Дирака можно записать в следующем виде:

$$\left[p^0 - eA^0(\mathbf{r}, t) - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \beta m) \right] \psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2)$$

В (2) $\psi(\mathbf{r}, t)$ – биспинорная волновая функция; $A^0(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ – потенциалы электромагнитного поля; α^k, β – четырехмерные матрицы Дирака, $k = 1, 2, 3$; $p^0 = i(\partial/\partial t)$; $\mathbf{p} = -i\vec{\nabla}$.

Пусть

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{r}, t) \\ \chi(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $\varphi(\mathbf{r}, t)$, $\chi(\mathbf{r}, t)$ – спинорные волновые функции. Тогда из уравнения (2) следуют выражения

$$\begin{aligned} (p^0 - eA^0 - m)\varphi &= \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\chi, \\ (p^0 - eA^0 + m)\chi &= \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\varphi, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{1}{p^0 - eA^0 + m} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\varphi, \\ \varphi &= \frac{1}{p^0 - eA^0 - m} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\chi.\end{aligned}\quad (5)$$

В (4), (5) σ^i – матрицы Паули. Из равенств (4), (5) можно получить уравнения

$$\left[p^0 - eA^0 - m - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \frac{1}{p^0 - eA^0 + m} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \right] \varphi = 0, \quad (6)$$

$$\left[p^0 - eA^0 + m - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \frac{1}{p^0 - eA^0 - m} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \right] \chi = 0. \quad (7)$$

Уравнение (6) отличается от уравнения (7) заменой $p^0 \rightarrow -p^0$, $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, $e \rightarrow -e$.

Если умножить уравнение (6) слева на оператор $(p^0 - eA^0 + m)$, а уравнение (7) – на оператор $(p^0 - eA^0 - m)$, то получим

$$\left[(p^0 - eA^0)^2 - m^2 - (p^0 - eA^0 + m) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \frac{1}{p^0 - eA^0 + m} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \right] \varphi = 0, \quad (8)$$

$$\left[(p^0 - eA^0)^2 - m^2 - (p^0 - eA^0 - m) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \frac{1}{p^0 - eA^0 - m} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \right] \chi = 0. \quad (9)$$

Уравнения (8), (9) необходимо привести к самосопряженному виду [6, 9]. Примечательно, что операторы преобразования подобия записываются в замкнутом виде

$$\begin{aligned}\Phi &= g_\varphi \varphi, \\ X &= g_\chi \chi,\end{aligned}\quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}g_\varphi &= (p^0 - eA^0 + m)^{-1/2}, \\ g_\chi &= (p^0 - eA^0 - m)^{-1/2}.\end{aligned}\quad (11)$$

После преобразований уравнения (8), (9) принимают самосопряженный вид:

$$\left[(p^0 - eA^0)^2 - m^2 - (p^0 - eA^0 + m)^{1/2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \frac{1}{p^0 - eA^0 + m} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) (p^0 - eA^0 + m)^{1/2} \right] \Phi = 0, \quad (12)$$

$$\left[(p^0 - eA^0)^2 - m^2 - (p^0 - eA^0 - m)^{1/2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \frac{1}{p^0 - eA^0 - m} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) (p^0 - eA^0 - m)^{1/2} \right] X = 0. \quad (13)$$

Уравнения (12), (13) по-прежнему переходят друг в друга при $p^0 \rightarrow -p^0$, $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, $e \rightarrow -e$.

Каждое из уравнений (12), (13) содержит решения с положительной и отрицательной энергиями. Ниже мы будем использовать для электронов решения (12) с положительными энергиями, для позитронов – решения (13) с отрицательными энергиями. Вторая пара решений (12), (13) соответствует решениям с измененным знаком перед массой электрона (позитрона) и не несет дополнительной физической информации. Ниже эти решения мы не будем рассматривать.

Тогда в квантовой электродинамике спинор $\Phi(x, s)$ будет представлять оператор электронного поля с положительной энергией, спинор $X(x, s)$ будет представлять оператор позитронного поля с отрицательной энергией.

При отсутствии электромагнитного поля ($A^\mu = 0$) уравнения (12), (13) представляют собой свободные уравнения Клейна–Гордона со спинорными волновыми функциями.

$$\left(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2\right) F_0^\pm(x, s) = 0. \quad (14)$$

В (14) $F_0^+(x, s) = \Phi_0(x, s)$, $F_0^-(x, s) = \mathbf{X}_0(x, s)$.

Решения (14) в виде плоских волн, нормированные в непрерывном спектре, имеют вид

$$F_0^\pm(x, p, s) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} e^{\mp i p x} U_s, \quad (15)$$

где $E_p = p^0 > 0$ и $p^2 = m^2$, U_s – нормированные двухкомпонентные спиновые функции Паули.

Условия ортонормированности:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x} \bar{F}_0^\pm(x, p', s') i\overleftrightarrow{\partial}_0 F_0^\pm(x, p, s) &= \pm \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'}, \\ \int d\mathbf{x} \bar{F}_0^\pm(x, p', s') i\overleftrightarrow{\partial}_0 F_0^\mp(x, p, s) &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где обозначение $a \overleftrightarrow{\partial}_0 b \equiv a \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial t} b$. В (16) черта над функцией означает эрмитовое сопряжение.

3. Формализм квантовой электродинамики с фермионными уравнениями со спинорными волновыми функциями

3.1. Пропагатор для уравнения Клейна–Гордона

Фейнмановский пропагатор находится из решения уравнения

$$\left(\square_{x'} + m^2\right) \Delta_F(x' - x) = -\delta^4(x' - x), \quad (17)$$

где $\square_{x'}$ – даламбертиан.

При переходе к импульсному представлению получаем (см., например, [10])

$$\Delta_F(x' - x) = \int d^4 p \frac{e^{-ip(x'-x)}}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (18)$$

3.2. Операторы взаимодействия

Перепишем уравнения (12), (13) в виде

$$\left(\left(p^0\right)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2\right) F^\pm(x, s) = V(p^\mu, eA^\mu, \pm m) F^\pm(x, s), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} V(p^\mu, eA^\mu, \pm m) &= p^0 eA^0 + eA^0 p^0 - e^2 A_0^2 - \mathbf{p}^2 + \left(p^0 - eA^0 \pm m\right)^{1/2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times \\ &\times \frac{1}{p^0 - eA^0 \pm m} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \left(p^0 - eA^0 \pm m\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (20)$$

В (20) знак (+) перед m соответствует уравнению (12), знак (–) перед m соответствует уравнению (13).

В отличие от дираковского представления КЭД, наше представление приводит к бесконечному множеству типов вершин взаимодействия с фотоном в зависимости от порядка теории возмущений.

В данной работе мы будем рассматривать квантово-электродинамические процессы $\sim e, e^2$ и e^3 .

Разложим выражение (20) до степеней $\sim e^3$.

Для удобства перейдем в представление, в котором диагональны импульсные переменные. В этом представлении матричный элемент

$$\langle \mathbf{p}' | e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} | \mathbf{p}'' \rangle = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'' - \mathbf{k}). \quad (21)$$

Представим поле $A^\mu(\mathbf{x}, t)$ интегралом Фурье. Для случая квантовой электродинамики в обозначениях [11] имеем

$$A^\mu(\mathbf{x}, t) = \sum_{\nu=\pm 1} \int A_{(\nu)\mathbf{k}}^\mu(t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (22)$$

где

$$A_{(\nu)\mathbf{k}}^\mu(t) = \begin{cases} A_{\mathbf{k}}^\mu e^{i\mathbf{k}\mathbf{0}t}, & \nu = 1, \\ \bar{A}_{(-\mathbf{k})}^\mu e^{-i\mathbf{k}\mathbf{0}t}, & \nu = -1. \end{cases} \quad (23)$$

В представлении (21)

$$\langle \mathbf{p}' | A^\mu | \mathbf{p}'' \rangle = \sum_{\nu=\pm 1} A_{(\nu)(\mathbf{p}''-\mathbf{p}')}^\mu(t); \quad |\mathbf{k}| = |\mathbf{p}'' - \mathbf{p}'|, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | A^\mu A^\lambda | \mathbf{p}'' \rangle &= \int d\mathbf{p}''' \langle \mathbf{p}' | A^\mu | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | A^\lambda | \mathbf{p}'' \rangle = \\ &= \sum_{\nu, \nu'=\pm 1} d\mathbf{p}''' A_{(\nu)(\mathbf{p}''-\mathbf{p}')}^\mu(t) A_{(\nu')(\mathbf{p}''-\mathbf{p}''')}^\lambda(t); \quad |\mathbf{k}| = |\mathbf{p}''' - \mathbf{p}'|, \quad |\mathbf{k}'| = |\mathbf{p}'' - \mathbf{p}'''|, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | A^\mu A^\lambda A^\delta | \mathbf{p}'' \rangle &= \sum_{\nu, \nu', \nu''=\pm 1} \int d\mathbf{p}''' d\mathbf{p}^{IV} A_{(\nu)(\mathbf{p}''-\mathbf{p}')}^\mu(t) A_{(\nu')(\mathbf{p}^{IV}-\mathbf{p}''')}^\lambda(t) \times \\ &\times A_{(\nu'')(\mathbf{p}''-\mathbf{p}^{IV})}^\delta(t); \quad |\mathbf{k}| = |\mathbf{p}''' - \mathbf{p}'|, \quad |\mathbf{k}'| = |\mathbf{p}^{IV} - \mathbf{p}'''|, \quad |\mathbf{k}''| = |\mathbf{p}'' - \mathbf{p}^{IV}|. \end{aligned} \quad (26)$$

Обозначим $X = p^0 \pm m$, где по-прежнему оператор $p^0 = i \frac{\partial}{\partial t}$. Тогда в (20)

$$\frac{1}{p^0 \pm m - eA^0} = \frac{1}{X} + \frac{1}{X} eA^0 \frac{1}{X} + \frac{1}{X} eA^0 \frac{1}{X} eA^0 \frac{1}{X} + \frac{1}{X} eA^0 \frac{1}{X} eA^0 \frac{1}{X} eA^0 \frac{1}{X} + \dots \quad (27)$$

При разложении $(p^0 - eA^0 \pm m)^{1/2}$ будем использовать представление (21)

$$(X - eA^0)^{1/2} = X^{1/2} + A + B + C. \quad (28)$$

В (28) операторы $A \sim e$, $B \sim e^2$, $C \sim e^3$.

$$X - eA^0 = (X^{1/2} + A + B + C)^2.$$

Отсюда

$$1. \quad AX^{1/2} + X^{1/2}A = -eA^0,$$

$$\langle \mathbf{p}' | A | \mathbf{p}'' \rangle = \left\langle \mathbf{p}' \left| -\frac{eA^0}{I + II} \right| \mathbf{p}'' \right\rangle, \quad (29)$$

где $I = (X')^{1/2}$, $II = (X'')^{1/2}$.

$$2. \quad BX^{1/2} + X^{1/2}B + A^2 = 0,$$

$$\langle \mathbf{p}' | B | \mathbf{p}'' \rangle = -\int d\mathbf{p}''' \frac{\langle \mathbf{p}' | eA^0 | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | eA^0 | \mathbf{p}'' \rangle}{(I + II)(I + III)(III + II)}. \quad (30)$$

$$3. CX^{1/2} + X^{1/2}C + BA + AB = 0,$$

$$\langle \mathbf{p}' | C | \mathbf{p}'' \rangle = - \int d\mathbf{p}''' d\mathbf{p}^{IV} \frac{(I + III + IV + II) \langle \mathbf{p}' | eA^0 | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | eA^0 | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | eA^0 | \mathbf{p}'' \rangle}{(I + II)(I + III)(I + IV)(III + II)(IV + II)}. \quad (31)$$

$$\text{В (30), (31) } III = (X''')^{1/2}, \quad IV = (X^{IV})^{1/2}.$$

С учетом (27) – (31) искомое разложение (20) можно представить в виде

$$V = V_1 + V_2 + V_3, \quad \text{где } V_1 \sim e, \quad V_2 \sim e^2, \quad V_3 \sim e^3.$$

В импульсном представлении

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | V_1 | \mathbf{p}'' \rangle = & e \left((p')^0 + (p'')^0 - \frac{(p')^2}{I(I + II)} + \frac{\sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{p}''}{I \cdot II} - \frac{(p'')^2}{II(I + II)} \right) \langle \mathbf{p}' | A^0 | \mathbf{p}'' \rangle + \\ & + e \left(-\frac{II}{I} \sigma \mathbf{p}' \sigma^i - \frac{I}{II} \sigma^i \sigma \mathbf{p}'' \right) \langle \mathbf{p}' | A^i | \mathbf{p}'' \rangle. \end{aligned} \quad (32)$$

Выражения для V_2, V_3 , имеющие более громоздкий вид, приведены в Приложении 1. В (32) и в формулах Приложения 1 для удобства множители, не зависящие от A^μ , вынесены из-под знаков матричных элементов.

3.3. Правила Фейнмана

Фейнмановский пропагатор представлен в выражении (18). В отличие от дираковского представления, в нашем случае существует бесконечное множество типов вершин взаимодействия с фотоном в зависимости от порядка теории возмущений (см. (20)): вершине взаимодействия с одним фотоном соответствует фактор $(-iV_{1\mu})$, вершине взаимодействия с двумя фотонами соответствует фактор $(-iV_{2\mu\nu})$ и т. д. Для удобства величинами $V_{1\mu}, V_{2\mu\nu}, \dots$ обозначены соответствующие члены оператора взаимодействия (20) без электромагнитных потенциалов $A^\mu, A^\mu A^\nu, \dots$

Каждой внешней фермионной линии соответствует одна из функций (15). Решения с положительной энергией $\Phi_0(x, p, s)$ соответствуют электронам, решения с отрицательной энергией $X_0(x, p, s)$ – позитронам.

Остальные правила Фейнмана остаются такими же, как в спинорной электродинамике в дираковском представлении.

3.4. Расчеты процессов КЭД

С учетом сформулированных правил Фейнмана рассмотрены некоторые процессы КЭД в первом и во втором порядке теории возмущений. Вычислены матричные элементы кулоновского рассеяния электронов, меллеровского рассеяния, комптон-эффекта, аннигиляции электрон-позитронной пары, а также матричные элементы для определения собственной энергии электрона, аномального магнитного момента электрона.

В следующей статье предполагается вычислить матричные элементы для определения лэмбовского сдвига атомных энергетических уровней.

На рис. 1–4 приведены диаграммы Фейнмана некоторых рассмотренных процессов. Краткие детали расчетов содержатся в Приложении 2.

Конечные результаты расчетов амплитуды процессов КЭД, диаграммы которых приведены на рис. 1–3, совпадают с аналогичными величинами, вычисленными в представлении Дирака.

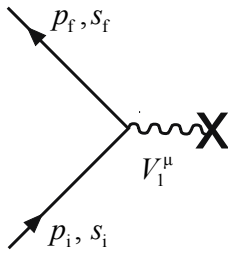


Рис. 1. Рассеяние электронов в кулоновском поле

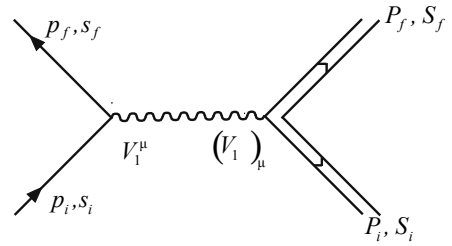


Рис. 2. Рассеяние электрона на дираковском протоне (рассеяние Меллера)

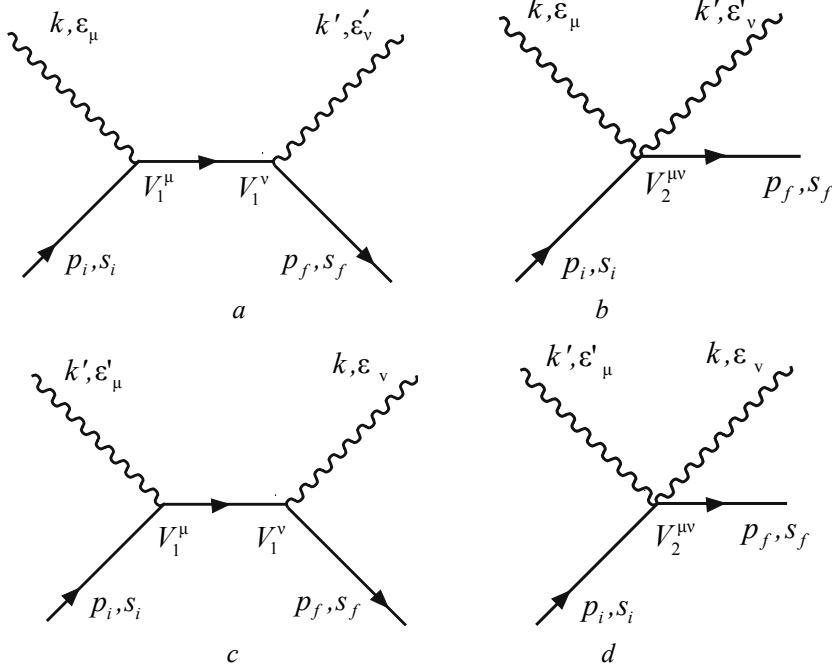


Рис. 3. Комптоновское рассеяние электронов

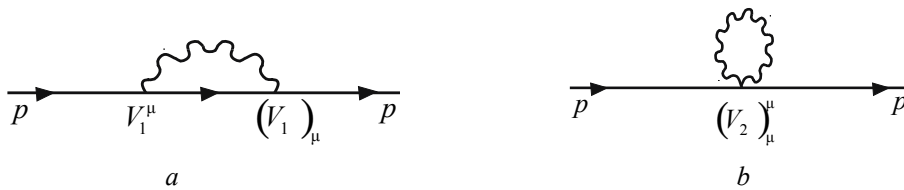


Рис. 4. Собственная энергия электрона

Расчеты собственной энергии с ультрафиолетовыми логарифмическими расходимостями (см. диаграммы рис. 4) также совпадают с результатами, вычисленными в представлении Дирака. Некоторые новые нюансы обсуждаются в следующем разделе.

На рис. 5 представлены диаграммы для радиационных поправок к рассеянию электрона в кулоновском поле. Эти диаграммы необходимо учитывать при вычислениях аномального магнитного момента электрона (см. раздел 5 данной статьи) и лэмбовского сдвига атомарных энергетических уровней.

При проведении перенормировки массы электрона необходимо вычесть контрчлены, соответствующие диаграммам 5,a-d с $p' = p^{IV}$ и диаграммам 5,e-h с $p'' = p'''$. В результате вклад диаграмм 5,c, d, g, h зануляется. Вклад перенормированных диаграмм 5,a, b, e, f конечен и вычислен в разделе 5.

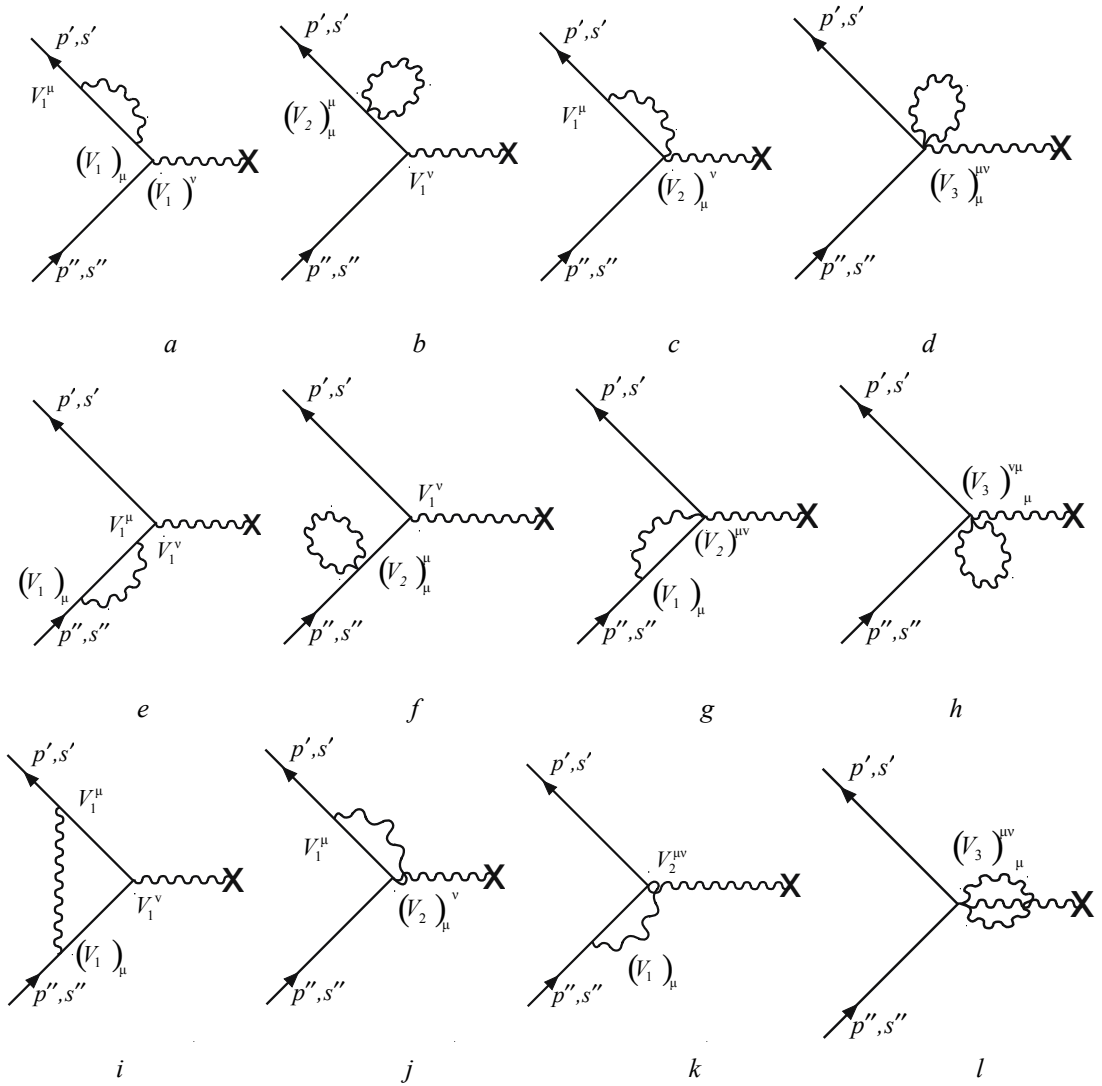


Рис. 5. Радиационные поправки к рассеянию электронов во внешнем поле

4. Собственная энергия электрона

Диаграммы Фейнмана для определения собственной энергии электрона во втором порядке теории возмущений приведены на рис. 4.

Массовый оператор $-i\Sigma^{(2)}(p)$ записывается в виде

$$-i\Sigma^{(2)}(p) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^2} \left[V_1^\mu(p', p''') \frac{1}{(p''')^2 - m^2} V_1^\mu(p''', p') + V_2^{\mu\mu}(p', p'') \right]. \quad (33)$$

В (33) $p''' = p' - k$; для электрона $I = ((p')^0 + m)^{1/2}$, $III = ((p')^0 - k^0 + m)^{1/2}$.

В соответствии с (32)

$$\begin{aligned} V_1^0(p', p''') &= (p')^0 + (p''')^0 - \frac{(\mathbf{p}')^2}{I(I+III)} + \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'''}{I \cdot III} - \frac{(p''')^2}{III(I+III)} = \\ &= 2(p')^0 - k^0 + \frac{2\mathbf{p}'\mathbf{k}}{III(I+III)} - \frac{k^2}{III(I+III)} - \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}}{I \cdot III}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$V_1^i(p', p''') = -\frac{III}{I} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}' \sigma^i - \frac{I}{III} \sigma^i (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}' - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{k}), \quad (35)$$

$$V_1^0(p''', p') = 2(p')^0 - k^0 + \frac{2\mathbf{p}'\mathbf{k}}{III(I+III)} - \frac{k^2}{III(I+III)} - \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{k} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}'}{I \cdot III}, \quad (36)$$

$$V_1^i(p''', p') = -\frac{I}{III} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}' - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{k}) \sigma^i - \frac{III}{I} \sigma^i \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}'. \quad (37)$$

В соответствии с (П1.1)

$$V_2^{00} = -1 + \frac{2\mathbf{p}'\mathbf{k}}{I \cdot III (I+III)^2} + \frac{k^2}{III^2 (I+III)^2}, \quad (38)$$

$$V_2^{ik} = \frac{I^2}{III^2} \sigma^i \sigma^k. \quad (39)$$

После подстановки в (33) выражений (34)–(39) получаем

$$-i\Sigma^{(2)}(p) = -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{pk + m^2}{k^2 (p-k)^2 - m^2}. \quad (40)$$

Выражение (40) с учетом вида спиноров (15) во внешних электронных линиях совпадает с массовым оператором в дираковском представлении. Интересным является, что выражение (40) с логарифмической ультрафиолетовой расходимостью получено при использовании только виртуальных состояний с положительной энергией электрона. Другими словами, выражение (40) получено при использовании лишь самосопряженного уравнения (12) с положительными энергиями электрона. В дираковском представлении это привело бы к линейной расходимости собственной энергии. В дираковском представлении лишь учет промежуточных состояний с отрицательными энергиями приводит к виду для собственной энергии с ультрафиолетовой логарифмической расходимостью.

5. Аномальный магнитный момент электрона

Диаграммы Фейнмана, необходимые для вычисления поправок к магнитному моменту электрона во втором порядке теории возмущений, приведены на рис. 5.

В рассматриваемом процессе статические потенциалы $A^i(\mathbf{x}) \neq 0$, $A^0(\mathbf{x}) = 0$. Амплитуда процесса в первом порядке теории возмущений равна

$$-e \frac{i\delta(E_f - E_i)}{(2\pi)^2 2E_i} \bar{U}_{s_f} \langle \mathbf{p}_f | -\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_f \boldsymbol{\sigma} \mathbf{A} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_i | \mathbf{p}_i \rangle U_{s_i}. \quad (41)$$

Обозначим в (41)

$$L = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_f \boldsymbol{\sigma} \mathbf{A} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{p}_i + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}. \quad (42)$$

Ниже будем рассматривать движение электрона в слабом магнитном поле и учитывать лишь слагаемые, пропорциональные p^i и $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}$, где \mathbf{H} – магнитное поле. В наших обозначениях $\mathbf{p}_f = \mathbf{p}'$, $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}''$,

$$\mathbf{p}''' = \mathbf{p}' - \mathbf{k}, \quad \mathbf{p}^{IV} = \mathbf{p}'' - \mathbf{k}, \quad q = p' - p'' = \begin{cases} q^0 = 0, & (p')^0 = (p'')^0, \\ q^i = (p')^i - (p'')^i. \end{cases}$$

Рассмотрим вклад в аномальный магнитный момент диаграмм 5, i, j, k, l . Для данного типа диаграмм выполняется равенство $III = IV$. Амплитуду процессов записываем в виде

$$-e \frac{i\delta(E' - E'')}{(2\pi)^2 2E''} \bar{U}_{s'} \left\langle \mathbf{p}' \left| \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2} \Lambda^i(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') A_{\mathbf{p}' - \mathbf{p}''}^i \right| \mathbf{p}'' \right\rangle U_{s''}. \quad (43)$$

5.1. Вклад диаграммы 5,i

$$\begin{aligned}
 (\Lambda^i A^i)_{5i} &= \left[V_1^0(p', p''') V_1^i(p''', p^{IV}) A^i V_1^0(p^{IV}, p'') - \right. \\
 & \left. - V_1^l(p', p''') V_1^i(p''', p^{IV}) A^i V_1^l(p^{IV}, p'') \right] \frac{1}{\left((p''')^2 - m^2 \right) \left((p^{IV})^2 - m^2 \right)} = \\
 & = \left\{ - \left(2m - k^0 - \frac{\mathbf{k}^2}{III(I+III)} \right)^2 L - \left[\left(2m - k^0 - \frac{\mathbf{k}^2}{III(I+III)} \right) \frac{1}{I \cdot III} + 1 \right] \times \right. \\
 & \left. \times 2\mathbf{kA}(\sigma\mathbf{p}'\sigma\mathbf{k} + \sigma\mathbf{k}\sigma\mathbf{p}'') - \frac{I^2}{III^2} \mathbf{k}^2 L + \frac{I^2}{III^2} \left[(2\mathbf{p}'\mathbf{k})\sigma\mathbf{k}\sigma\mathbf{A} + (2\mathbf{p}''\mathbf{k})\sigma\mathbf{A}\sigma\mathbf{k} \right] \right\} \times \\
 & \times \frac{1}{\left[(2m - k^0)k^0 + \mathbf{k}^2 \right]^2}.
 \end{aligned} \tag{44}$$

5.2. Вклад диаграмм 5,j, k

$$\begin{aligned}
 (\Lambda^i A^i)_{5j} + (\Lambda^i A^i)_{5k} &= \left[V_1^0(p', p''') V_2^{i0}(p''', p'') A^i - \right. \\
 & \left. - V_1^l(p', p''') V_2^{il}(p''', p'') A^i \right] \frac{1}{(p''')^2 - m^2} + \left[V_2^{0i}(p', p^{IV}) A^i V_1^0(p^{IV}, p'') - \right. \\
 & \left. - V_2^{li}(p', p^{IV}) A^i V_1^l(p^{IV}, p'') \right] \frac{1}{(p^{IV})^2 - m^2} = \\
 & = \left\{ \left(2m - k^0 - \frac{\mathbf{k}^2}{III(I+III)} \right) \left(\frac{2}{III(I+III)} - \frac{1}{I \cdot III} \right) L - L - \frac{I^2}{III^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{I \cdot III^2(I+III)} 2\mathbf{kA}(\sigma\mathbf{p}'\sigma\mathbf{k} + \sigma\mathbf{k}\sigma\mathbf{p}'') \right\} \frac{1}{\left[-(2m - k^0)k^0 - \mathbf{k}^2 \right]} - \\
 & - \frac{I^2}{III^2} \left[2\mathbf{p}'\mathbf{k}\sigma\mathbf{k}\sigma\mathbf{A} + 2\mathbf{p}''\mathbf{k}\sigma\mathbf{A}\sigma\mathbf{k} \right] \frac{1}{\left[(2m - k^0)k^0 + \mathbf{k}^2 \right]^2}.
 \end{aligned} \tag{45}$$

5.3. Вклад диаграммы 5,l

$$(\Lambda^i A^i)_{5l} = V_3^{0i0} A^i = \frac{L}{I \cdot III(I+III)^2}. \tag{46}$$

Сумма выражений (44), (45), (46) равна

$$(\Lambda^i A^i)_{5i+5j+5k+5l} = - \frac{\left(2(k^0)^2 - 2\mathbf{k}^2 - 8mk^0 + 4m^2 \right) L + 4\mathbf{kA}(\sigma\mathbf{p}'\sigma\mathbf{k} + \sigma\mathbf{k}\sigma\mathbf{p}'')}{\left[(2m - k^0)k^0 + \mathbf{k}^2 \right]^2}. \tag{47}$$

Выражение (47) совпадает с вкладом единственной диаграммы 5,i с вершинами $-ie\gamma^\mu$ в дираковском представлении (см., например, [8]).

Обратимся теперь к вкладу собственно-энергетических диаграмм 5,a-h. Для диаграмм 5,a-d выполняются равенства $I = II = IV$. Для диаграмм 5,e-h выполняются равенства $I = II = III$.

5.4. Вклад диаграмм 5,c, d

$$\begin{aligned}
 (\Lambda^i A^i)_{5c+5d} &= \left[V_1^0(p', p''') V_2^{0i}(p''', p'') A^i - V_1^l(p', p''') V_2^{li}(p''', p'') A^i \right] \frac{1}{(p''')^2 - m^2} + \\
 &+ V_3^{00i} A^i = \left[\left(2m - k^0 - \frac{\mathbf{k}^2}{III(I+III)} \right) \left(\frac{L}{I(I+III)} - \frac{\sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{A}}{I \cdot III} \right) - \frac{\mathbf{k}^2}{I^2 III^2} \sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{A} + \right. \\
 &+ \frac{3III^2}{I^2} \sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{A} - \sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{A} + \left. \left(2m - k^0 - \frac{\mathbf{k}^2}{III(I+III)} \right) \frac{\sigma \mathbf{k} \sigma \mathbf{A}}{I \cdot III} + \sigma \mathbf{k} \sigma \mathbf{A} + \right. \\
 &+ \left. \frac{2\mathbf{p}' \mathbf{k}}{I \cdot III^2(I+III)} \sigma \mathbf{k} \sigma \mathbf{A} \right] \frac{1}{(p''')^2 - m^2} + \frac{1}{2I^2(I+III)^2} L - \\
 &- \frac{1}{I^2 \cdot III(I+III)} \sigma \mathbf{p}' \sigma \mathbf{A} - \frac{1}{I \cdot III^2(I+III)} \sigma \mathbf{k} \sigma \mathbf{A}.
 \end{aligned} \tag{48}$$

5.5. Вклад диаграмм 5,g, h

$$\begin{aligned}
 (\Lambda^i A^i)_{5g+5h} &= \left[V_2^{i0}(p', p^{IV}) A^i V_1^0(p^{IV}, p'') - V_2^{il}(p', p^{IV}) A^i V_1^l(p^{IV}, p'') \right] \times \\
 &\times \frac{1}{(p^{IV})^2 - m^2} + V_3^{i00} A^i = \left[\left(2m - k^0 - \frac{\mathbf{k}^2}{IV(I+IV)} \right) \left(\frac{L}{I(I+IV)} - \frac{\sigma \mathbf{A} \sigma \mathbf{p}''}{I \cdot IV} \right) - \right. \\
 &- \frac{\mathbf{k}^2}{IV(I+IV)} \sigma \mathbf{A} \sigma \mathbf{p}'' + \left(\frac{3IV^2}{I^2} - 1 \right) \sigma \mathbf{A} \sigma \mathbf{p}'' + \left(2m - k^0 - \frac{\mathbf{k}^2}{IV(I+IV)} \right) \frac{\sigma \mathbf{A} \sigma \mathbf{k}}{I \cdot IV} + \\
 &+ \sigma \mathbf{A} \sigma \mathbf{k} + \left. \frac{2\mathbf{p}'' \mathbf{k}}{I \cdot IV^2(I+IV)} \sigma \mathbf{A} \sigma \mathbf{k} \right] \frac{1}{(p^{IV})^2 - m^2} + \frac{1}{2I^2(I+IV)^2} L - \\
 &- \frac{1}{I^2 \cdot IV(I+IV)} \sigma \mathbf{A} \sigma \mathbf{p}'' - \frac{\sigma \mathbf{A} \sigma \mathbf{k}}{I \cdot IV^2(I+IV)}.
 \end{aligned} \tag{49}$$

В (49) $IV = III$, так как $p_0^{IV} = p_0'' - k_0 = p_0''' = p_0' - k_0$.

С учетом этого суммарный вклад (48), (49) равен

$$\begin{aligned}
 (\Lambda^i A^i)_{5c+5d+5g+5h} &= \left[-\frac{\mathbf{k}^2 IV(2I+III)}{I^2 III(I+III)^2} + \frac{3III^2}{I^2} - 1 \right] \frac{L}{(-(2m - k^0)k^0 - \mathbf{k}^2)} - \\
 &- \frac{4(\mathbf{p}' \mathbf{k} \sigma \mathbf{k} \sigma \mathbf{A} + \mathbf{p}'' \mathbf{k} \sigma \mathbf{A} \sigma \mathbf{k})}{\left[(2m - k^0)k^0 + \mathbf{k}^2 \right]^2}.
 \end{aligned} \tag{50}$$

Равенство $p' = p^{IV}$ в диаграммах 5,c, d и равенство $p' = p'''$ в диаграммах 5,g, h не приводят к появлению сингулярных знаменателей в (48), (49). В результате вклады (48), (49) полностью компенсируются после перенормировки массы соответствующими массовыми контрчленами.

5.6. Вклад диаграмм 5,а, б

$$\begin{aligned}
 (\Lambda^i A^i)_{5a+5b} &= \left\{ \left[V_1^0(p', p''') V_1^0(p''', p^{IV}) V_1^i(p^{IV}, p'') A^i - \right. \right. \\
 &- V_1^I(p', p''') V_1^I(p''', p^{IV}) A^i V_1^i(p^{IV}, p'') \left. \right] \frac{1}{(p''')^2 - m^2} + V_2^{00}(p', p^{IV}) V_1^i(p^{IV}, p'') A^i - \\
 &- V_2^{II}(p', p^{IV}) V_1^i(p^{IV}, p'') A^i \left. \right\} \frac{1}{(p^{IV})^2 - m^2} = \\
 &= \left\{ \left[\left(p'_0 + p_0''' - \frac{\mathbf{k}^2}{III(I+III)} \right) \left(p_0''' + p_0^{IV} - \frac{\mathbf{k}^2}{III(III+IV)} \right) - \frac{3I \cdot IV}{III^2} \mathbf{k}^2 \right] \frac{1}{(p''')^2 - m^2} - 1 - \right. \\
 &- \left. \frac{3I \cdot IV}{III^2} + \frac{\mathbf{k}^2}{III^2(I+III)(III+IV)} \right\} \left(-\frac{II}{IV} \sigma \mathbf{p}^{IV} \sigma \Lambda - \frac{IV}{II} \sigma \Lambda \sigma \mathbf{p}'' \right) \frac{1}{(p^{IV})^2 - m^2}.
 \end{aligned} \tag{51}$$

После алгебраических преобразований

$$\begin{aligned}
 (\Lambda^i A^i)_{5a+5b} &= \left[p'_0 p_0''' + p_0' p_0^{IV} + p_0''' + p_0^{IV} - \frac{\mathbf{k}^2}{III(I+III)} (p_0''' + p_0^{IV}) - \frac{\mathbf{k}^2}{III(III+IV)} (p'_0 + p_0''') + \right. \\
 &+ \mathbf{k}^2 + m^2 - 3I \cdot IV (III^2 - I^2) + \left. \frac{\mathbf{k}^2 (III - I)}{III + IV} \right] \left(-\frac{II}{IV} \sigma \mathbf{p}^{IV} \sigma \Lambda - \frac{IV}{II} \sigma \Lambda \sigma \mathbf{p}'' \right) \times \\
 &\times \frac{1}{(p''')^2 - m^2} \frac{1}{(p^{IV})^2 - m^2} = f(p'_\mu - k_\mu, p'_\mu) \frac{1}{(p^{IV})^2 - m^2}.
 \end{aligned} \tag{52}$$

В (51), (52) $p^{IV} = p'$, и мы сталкиваемся с проблемой сингулярного знаменателя в выражении $\frac{\mathcal{P}}{(p')^2 - m^2}$, где \mathcal{P} – знак главного значения. Для решения проблемы используем предельный процесс Гайтлера [8].

Осуществим замену

$$p_\mu''' \rightarrow p'_\mu (1 + \epsilon') - k_\mu, \tag{53}$$

$$p_\mu^{IV} \rightarrow p'_\mu (1 + \epsilon), \tag{54}$$

где инварианты ϵ', ϵ стремятся к нулю.

Теперь запишем равенство (52) в виде

$$(\Lambda^i A^i)_{5a+5b} = \int f(p'_\mu (1 + \epsilon') - k_\mu, p'_\mu (1 + \epsilon)) \frac{\mathcal{P}}{m^2 (2\epsilon + \epsilon^2)} \delta(\epsilon - \epsilon') \delta(\epsilon') d\epsilon d\epsilon'. \tag{55}$$

Для устранения расходящихся выражений вычтем массовый контрчлен

$$(\Lambda^i A^i)_m = \int f(p'_\mu - k_\mu, p'_\mu (1 + \epsilon)) \frac{\mathcal{P}}{m^2 (2\epsilon + \epsilon^2)} \delta(\epsilon) d\epsilon. \tag{56}$$

В (55), (56)

$$\frac{\mathcal{P}}{2\epsilon + \epsilon^2} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{P}}{\epsilon} - \frac{1}{2} \frac{1}{2 + \epsilon}, \tag{57}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\mathcal{P}}{\epsilon} \delta(\epsilon) = -\frac{1}{4} \delta'(\epsilon). \tag{58}$$

В (52), (56)

$$f(p'_\mu(1+\varepsilon') - k_\mu, p'_\mu(1+\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon', \varepsilon=0} = - \frac{4m^2 + 4mk^0}{-(2m - k^0)k^0 - \mathbf{k}^2} L. \quad (59)$$

Ниже обозначим $M^2 = 4m^2 + 4mk^0$.

После интегрирования в (55) по ε' суммарный вклад (55), (56) с учетом равенств (57), (58) можно записать в виде

$$\begin{aligned} (\Lambda^i A^i)_{5a+5b+m} &= -\frac{1}{4m^2} \int f(p'_\mu(1+\varepsilon), p'_\mu) \times \delta'(\varepsilon) d\varepsilon = \\ &= \frac{1}{4m^2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(p'_\mu(1+\varepsilon), p'_\mu) \Big|_{\varepsilon=0} \end{aligned} \quad (60)$$

Аналогичным образом можно рассчитать вклад диаграмм 5, e, f. Суммарный вклад этих диаграмм вместе с вкладом диаграмм (60) равен

$$(\Lambda^i A^i)_{SE} = 2 \frac{2m^2 - 2mk^0 - (k^0)^2 - \mathbf{k}^2}{(-2mk^0 + (k^0)^2 - \mathbf{k}^2)^2} L. \quad (61)$$

Общий вклад всех перенормированных диаграмм 5, a–5, l равен сумме выражений (47), (61)

$$(\Lambda^i A^i)_{amm} = \frac{(4m^2 - 4mk^0 - 2(k^0)^2 - 2\mathbf{k}^2)L - 4\mathbf{k}\mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'')}{(-2mk^0 + (k^0)^2 - \mathbf{k}^2)^2}. \quad (62)$$

Выражение (62) совпадает с аналогичным выражением в дираковском представлении [8]. Выражение (62) позволяет вычислить аномальный магнитный момент электрона в низшем порядке теории возмущений. Результаты вычислений совпадают с результатами вычислений аномального магнитного момента электрона в дираковском представлении.

6. Заключение

В работе рассмотрена квантовая электродинамика с самосопряженными уравнениями со спинорными волновыми функциями для фермионных полей.

Для рассматриваемого варианта КЭД рассчитан ряд диаграмм Фейнмана. В низшем порядке теории возмущений вычислены матричные элементы кулоновского рассеяния электронов, рассеяния электрона на протоне (рассеяние Меллера), комптон-эффекта, аннигиляции электрон-позитронной пары. Результаты расчетов совпадают с аналогичными величинами, вычисленными в стандартной КЭД с использованием уравнения Дирака с биспинорной волновой функцией.

Вычислена собственная энергия электрона с ультрафиолетовой логарифмической расходимостью, согласующаяся со значением, вычисленным в стандартной КЭД. Новым является отсутствие вклада в собственную энергию промежуточных состояний с отрицательной энергией. В стандартной КЭД в этом случае собственная энергия линейно расходится в ультрафиолетовом пределе. Только учет вклада промежуточных состояний с отрицательной энергией приводит к логарифмической ультрафиолетовой расходимости собственной энергии [8]. Вычисленная величина аномального магнитного момента электрона согласуется со значением, определенным в стандартной КЭД. Как и в случае собственной энергии электрона при вычислениях матричных элементов, связанных с аномальным моментом электрона, использовались лишь промежуточные состояния с положительной энергией.

В следующей работе мы рассчитаем матричные элементы, связанные с лэмбовским сдвигом энергетических уровней. Интригующим является отсутствие в теории диаграмм, связанных с вкладом поляризации вакуума в лэмбовский сдвиг.

Операторы взаимодействия $\sim e^2, e^3$

$$\begin{aligned}
 V_2 = & \left[-1 - \frac{(\mathbf{p}')^2}{I(I+II)(I+III)(III+II)} + \frac{(\mathbf{p}'')^2}{III^2(I+III)(II+III)} - \frac{(\mathbf{p}''')^2}{II(I+II)(I+III)(III+II)} + \right. \\
 & \left. + \frac{\sigma\mathbf{p}'\sigma\mathbf{p}''}{I \cdot II \cdot III^2} - \frac{\sigma\mathbf{p}'\sigma\mathbf{p}'''}{II \cdot III^2 \cdot (II+III)} - \frac{\sigma\mathbf{p}'''\sigma\mathbf{p}''}{II \cdot III^2 \cdot (I+III)} \right] \langle \mathbf{p}' | A^0 | \mathbf{p}'''' \rangle \langle \mathbf{p}'''' | A^0 | \mathbf{p}'' \rangle + \\
 & + \frac{I \cdot II}{III^2} \sigma^i \sigma^k \langle \mathbf{p}' | A^i | \mathbf{p}'''' \rangle \langle \mathbf{p}'''' | A^k | \mathbf{p}'' \rangle + \left[\frac{\sigma\mathbf{p}'\sigma^i}{I(I+III)} - \frac{I\sigma^i\sigma\mathbf{p}''}{II \cdot III^2} + \frac{I\sigma^i\sigma\mathbf{p}'''}{III^2(III+II)} \right] \times \\
 & \times \langle \mathbf{p}' | A^i | \mathbf{p}'''' \rangle \langle \mathbf{p}'''' | A^0 | \mathbf{p}'' \rangle + \left[-\frac{II}{I \cdot III^2} \sigma\mathbf{p}'\sigma^i + \frac{1}{II(I+III)} \sigma^i\sigma\mathbf{p}'' + -\frac{II}{III^2(I+III)} \sigma\mathbf{p}'''\sigma^i \right] \times \\
 & \times \langle \mathbf{p}' | A^0 | \mathbf{p}'''' \rangle \langle \mathbf{p}'''' | A^i | \mathbf{p}'' \rangle, \tag{П1.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_3 = & \left(\frac{(\mathbf{p}^{IV})^2}{IV^2 \cdot (I+IV)(I+III)(III+IV)(IV+II)} - \frac{\sigma\mathbf{p}'\sigma\mathbf{p}^{IV}}{I \cdot III^2 \cdot IV^2(IV+II)} - \frac{\sigma\mathbf{p}'''\sigma\mathbf{p}''}{II \cdot III^2 \cdot IV^2(I+III)} + \right. \\
 & + \frac{(\mathbf{p}''')^2}{III^2 \cdot (I+III)(III+IV)(III+II)(IV+II)} - \frac{\sigma\mathbf{p}^{IV}\sigma\mathbf{p}''}{II \cdot IV^2(I+III)(I+IV)(III+IV)} - \\
 & - \frac{\sigma\mathbf{p}'\sigma\mathbf{p}'''}{I \cdot III^2(III+II)(III+IV)(IV+II)} + \frac{\sigma\mathbf{p}'''\sigma\mathbf{p}^{IV}}{III^2 \cdot IV^2(I+III)(IV+II)} + \frac{\sigma\mathbf{p}'\sigma\mathbf{p}''}{I \cdot II \cdot III^2 \cdot IV^2} - \\
 & \left. \frac{(\mathbf{p}')^2(I+II+III+IV)}{I(I+II)(I+III)(I+IV)(III+IV)(III+II)(IV+II)} - \frac{(\mathbf{p}'')^2(I+II+III+IV)}{II(I+II)(I+III)(I+IV)(III+IV)(III+II)(IV+II)} \right) \times \\
 & \times \langle \mathbf{p}' | A^0 | \mathbf{p}'''' \rangle \langle \mathbf{p}'''' | A^0 | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | A^0 | \mathbf{p}'' \rangle + \frac{I \cdot II}{III^2 \cdot IV^2} \sigma^i \sigma^k \langle \mathbf{p}' | A^i | \mathbf{p}'''' \rangle \langle \mathbf{p}'''' | A^0 | \mathbf{p}^{IV} \rangle \times \langle \mathbf{p}^{IV} | A^k | \mathbf{p}'' \rangle + \\
 & + \left(-\frac{\sigma\mathbf{p}'''\sigma^i}{III^2(I+III)(IV+II)} - \frac{\sigma^i\sigma\mathbf{p}^{IV}}{IV^2(I+III)(IV+II)} + \frac{\sigma^i\sigma\mathbf{p}''}{II \cdot IV^2(I+III)} + \right. \\
 & \left. + \frac{\sigma\mathbf{p}'\sigma^i}{I \cdot III^2(IV+II)} \right) \langle \mathbf{p}' | A^0 | \mathbf{p}'''' \rangle \langle \mathbf{p}'''' | A^i | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | A^0 | \mathbf{p}'' \rangle - \frac{I\sigma^i\sigma^k}{III^2(IV+II)} \times \\
 & \times \langle \mathbf{p}' | A^i | \mathbf{p}'''' \rangle \langle \mathbf{p}'''' | A^k | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | A^0 | \mathbf{p}'' \rangle - \frac{\sigma^i\sigma^k II}{IV^2(I+III)} \langle \mathbf{p}' | A^0 | \mathbf{p}'''' \rangle \langle \mathbf{p}'''' | A^i | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | A^k | \mathbf{p}'' \rangle + \\
 & + \left(-\frac{\sigma\mathbf{p}'\sigma^i II}{I \cdot III^2 IV^2} + \frac{\sigma\mathbf{p}'''\sigma^i II}{III^2 IV^2(I+III)} + \frac{\sigma\mathbf{p}^{IV}\sigma^i II}{IV^2(I+IV)(I+III)(III+IV)} + \right. \\
 & \left. + \frac{\sigma^i\sigma\mathbf{p}''}{II(I+IV)(I+III)(III+IV)} \right) \langle \mathbf{p}' | A^0 | \mathbf{p}'''' \rangle \langle \mathbf{p}'''' | A^0 | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | A^i | \mathbf{p}'' \rangle + \\
 & + \left(-\frac{I\sigma^i\sigma\mathbf{p}''}{II \cdot III^2 IV^2} + \frac{I\sigma^i\sigma\mathbf{p}'''}{III^2(III+II)(III+IV)(IV+II)} + \frac{I\sigma^i\sigma\mathbf{p}^{IV}}{III^2 \cdot IV^2(IV+II)} + \right. \\
 & \left. + \frac{\sigma\mathbf{p}'\sigma^i}{I(III+II)(III+IV)(IV+II)} \right) \langle \mathbf{p}' | A^i | \mathbf{p}'''' \rangle \langle \mathbf{p}'''' | A^0 | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | A^0 | \mathbf{p}'' \rangle. \tag{П1.2}
 \end{aligned}$$

Расчеты матричных элементов процессов КЭД с уравнениями для фермионов со спинорными волновыми функциями

1. Рассеяние электронов в кулоновском поле $A^0(x) = Ze/|\mathbf{x}|$

Диаграмма Фейнмана представлена на рис. 1.

Матричный элемент S_{fi} равен

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i \int d^4x \bar{F}_0^+(x, p_f, s_f) V_{10} A^0 F_0^+(x, p_i, s_i) = -\frac{i\delta(E_f - E_i)}{(2\pi)^2 2E_i} \bar{U}_{s_f} \langle \mathbf{p}_f | V_{10} A^0(q) | \mathbf{p}_i \rangle U_{s_i} = \\ &= i \frac{Ze^2}{\mathbf{q}^2} \frac{\delta(E_f - E_i)}{\pi} \bar{U}_{s_f} \frac{1}{2E_i} \left(E_i + m + \frac{1}{E_i + m} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_f \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_i \right) U_{s_i}, \end{aligned} \quad (\text{П2.1})$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$, $A^0(\mathbf{q}) = 4\pi/\mathbf{q}^2$.

При записи S_{fi} для электрона использовалась функция $F_0^+(x, p_i, s_i)$ и равенство $\Pi = (E_i + m)^{1/2}$ (см. (15), (27), (29)).

Выражение (П2.1) совпадает с выражением, полученным ранее в представлении Фолди–Ваутхайзена [12]. Далее обычными методами с помощью матричного элемента S_{fi} можно получить дифференциальное сечение рассеяния Мотта, переходящее в нерелятивистском случае в Резерфордское (см., например, [10]).

2. Рассеяние электрона на дираковском протоне (рассеяние Меллера)

Диаграмма Фейнмана представлена на рис. 2.

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i \int d^4x d^4y \bar{F}_0^+(x, p_f, s_f) V_1^\alpha F_0^+(x, p_i, s_i) D_f(x-y) \bar{F}^+(y, P_f, S_f) (-V_1)_\alpha F^+(y, P_i, S_i) = \\ &= -\frac{i\delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i)}{(p_f - p_i)^2} 2\pi \left(\bar{U}_{s_f} \langle \mathbf{p}_f | V_1^\alpha | \mathbf{p}_i \rangle U_{s_i} \right) \left(\bar{U}_{S_f} \langle \mathbf{P}_f | (V_1)_\alpha | \mathbf{P}_i \rangle U_{S_i} \right). \end{aligned} \quad (\text{П2.2})$$

Выше $D_f(x-y)$ – фотонный пропагатор. Матричный элемент S_{fi} позволяет определить меллеровское сечение рассеяния.

3. Комптоновское рассеяние электронов

Диаграммы Фейнмана представлены на рис. 3.

Падающий фотон с импульсом k^μ и поляризацией ϵ^μ будем описывать плоской волной

$$A^\mu(x, k) = \frac{\epsilon^\mu}{\sqrt{2k^0} (2\pi)^3} e^{-ikx}.$$

Испускаемый фотон с импульсом k'^μ и поляризацией ϵ'^μ описывается плоской волной

$$A^\mu(y, k') = \frac{(\epsilon')^\mu}{\sqrt{2(k')^0} (2\pi)^3} e^{ik'y}.$$

Матричный элемент процесса равен

$$\begin{aligned}
 S_{fi} = & -i\bar{U}_{s_f} \left\{ \int \frac{d^4 z d^4 y d^4 p'''}{(2\pi)^{10} \sqrt{2k^0 2(k')^0 2p_i^0 2p_f^0}} \left(e^{ip_f y} V_{1\mu} \varepsilon'^\mu e^{ik' y} \frac{e^{-ip'' y}}{(p''')^2 - m^2} e^{ip'' z} V_{1\mu} \varepsilon^\nu e^{-ikz} e^{ip_i z} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + e^{ip_f y} V_{1\mu} \varepsilon^\mu e^{-iky} \frac{e^{-ip'' y}}{(p''')^2 - m^2} e^{ip'' z} V_{1\nu} \varepsilon'^\nu e^{ik' z} e^{-ip_i z} \right) + \right. \\
 & \left. + \int d^4 y \frac{1}{(2\pi)^6 \sqrt{2k^0 2(k')^0 2E_i 2E_f}} \left(e^{ip_f y} V_{2\mu\nu} \varepsilon'^\mu e^{ik' y} \varepsilon^\nu e^{-iky} e^{-ip_i y} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + e^{ip_f y} V_{2\mu\nu} \varepsilon^\mu e^{-iky} \varepsilon'^\nu e^{ik' y} e^{-ip_i y} \right) \right\} U_{s_i} = -\frac{i\delta^4(p_i + k - p_f - k')}{(2\pi)^2 \sqrt{2k^0 2(k')^0 2p_i^0 2p_f^0}} (\bar{U}_{s_f} M U_{s_i}), \quad (\text{П2.3})
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 M = & V_{1\mu}(p_f; p_i + k) \varepsilon'^\mu \frac{1}{(p_i + k)^2 - m^2} V_{1\mu}(p_i + k; p_i) \varepsilon^\mu + V_{2\mu\nu}(p_f; p_i + k; p_i) \varepsilon'^\mu \varepsilon^\nu + \\
 & + V_{1\mu}(p_f; p_i - k') \varepsilon'^\mu \frac{1}{(p_i - k')^2 - m^2} V_{1\mu}(p_i - k'; p_i) \varepsilon'^\mu + V_{2\mu\nu}(p_f; p_i - k'; p_i) \varepsilon'^\mu \varepsilon'^\nu.
 \end{aligned}$$

Здесь операторы $V_{1\mu}, V_{2\mu}$ определяются с учетом закона сохранения энергии-импульса ($p_i + k = p_f - k'$) из выражений (32), (П1.1), взятых без полей $A^\mu, A^\mu A^\nu$.

Если выбрать специальную калибровку, в которой начальный и конечный фотоны поперечно поляризованы в лабораторной системе отсчета ($\mathbf{p}_i = 0, p_i^0 = m, \varepsilon^0 = (\varepsilon')^0, \mathbf{\varepsilon k} = \mathbf{\varepsilon' k'} = 0$), то выражение для S_{fi} упрощается:

$$\begin{aligned}
 M = & e^2 \sqrt{\frac{2m + k^0 - (k')^0}{2m}} \cdot 2 \left\{ \mathbf{\varepsilon' \varepsilon} + \frac{1}{2k^0 (2m + k^0 - k'^0)} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \boldsymbol{\sigma \varepsilon' \sigma k \sigma \varepsilon} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2(k')^0 (2m + k^0 - k'^0)} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \boldsymbol{\sigma \varepsilon \sigma k' \sigma \varepsilon'} \right\}. \quad (\text{П2.4})
 \end{aligned}$$

При получении последнего выражения использовались равенства $I \equiv \sqrt{2m + k^0 - (k')^0}, II = \sqrt{2m}, III \equiv \sqrt{2m + k^0}$, либо $III \equiv \sqrt{2m - (k')^0}, \boldsymbol{\sigma p'} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \boldsymbol{\sigma p''} = 0, \boldsymbol{\sigma p'''} = \boldsymbol{\sigma k}$, либо $\boldsymbol{\sigma p'''} = -\boldsymbol{\sigma k'}$.

Далее обычными методами можно получить формулу Клейна–Нишины–Тамма для дифференциального сечения комптоновского рассеяния.

4. Аннигиляция электрон-позитронной пары

Процессу аннигиляции электрон-позитронной пары соответствуют диаграммы рис. 3 с заменой $\varepsilon, k \rightarrow \varepsilon_1, -k_1, \varepsilon', k' \rightarrow \varepsilon_2, k_2, p_i s_i \rightarrow p_- s_-, p_f s_f \rightarrow -p_+ s_+$. При записи матричного элемента S_{+-} для позитрона используется функция $F_0^-(x, p, s)$ и $\Pi = (-p_+ - m)^{1/2}$ (см. (15), (27), (29)).

По аналогии с комптоновским рассеянием матричный элемент процесса S_{+-} равен

$$S_{+-} = -\frac{\delta^4(p_- + p_+ - k_1 - k_2)}{(2\pi)^2 \sqrt{2k_1^0 2k_2^0 \cdot 2p_-^0 2p_+^0}} \bar{U}_{s_+} M_1 U_{s_-}, \quad (\text{П2.5})$$

где оператор M_1 по своей структуре с учетом указанной выше замены совпадает с оператором M в выражении S_{fi} для комптоновского рассеяния электронов. Выражение (П2.5) позволяет получить дифференциальное сечение аннигиляции электрон-позитронной пары, которое совпадает с сечением этого процесса, вычисленным в представлении Дирака.

Автор благодарит А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

Список литературы

1. Dirac P. A. M. *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford University Press, 1930).
2. Незнамов В. П. // ТМФ. 2018. Vol. 197:3. P. 493.
3. Незнамов В. П., Сафронов И. И. // ЖЭТФ. 2018. Vol. 154. P. 761.
4. Незнамов В. П., Сафронов И. И., Шемарулин В. Е. // ЖЭТФ. 2018. Vol. 154. P. 802.
5. Незнамов В. П., Сафронов И. И., Шемарулин В. Е. // ЖЭТФ. 2019. Vol. 155. P. 69.
6. Незнамов В. П., Сафронов И. И. // ЖЭТФ. 2019. Vol. 155. P. 792.
7. Gabrielse G., Hanneke D., Kinoshita T., Noi M. and Odom B. // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 97. P. 030809.
8. Гайтлер В. *Квантовая теория излучения*. М.: ИЛ, 1956.
9. Зельдович Я. Б., Попов В.С. // УФН. 1971. Vol. 105. P. 403.
10. Бьеркен Д. Д., Дрелл С. Д. *Релятивистская квантовая теория*. Т. 1. М.: Наука, 1978.
11. Дирак П. А. М. *Лекции по квантовой теории поля*. М.: Мир, 1971.
12. Незнамов В. П. ЭЧАЯ. 2006. Т. 37. С. 152.

Статья поступила в редакцию 19.12.2019