УДК 539.377

РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУСФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ И СТЕРЖНЯ

В. Ф. Колесов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл., просп. Мира, 37

Для алгоритмов расчета быстрых импульсных реакторов важно наличие аналитических решений динамических задач термоупругости. В этой связи реальные структурные элементы активной зоны обычно сводятся к деталям типа круглого диска, стержня, сферы, сферической оболочки и т. п., допускающим такие решения. В статье приведены аналитические решения задач термоупругости для полусферической оболочки с пространственно однородным, произвольным по времени распределением температуры и для стержня. Зависимость температуры стержня от осевой координаты и времени произвольная, но разделяющаяся.

Ключевые слова: быстрые импульсные реакторы, структурные элементы активной зоны, аналитические решения задач термоупругости, метод разложения по собственным функциям, полусферическая оболочка, стержень.

SOLUTIONS OF DYNAMICAL THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR SEMI-SPERICAL SHELL AND ROD / V. F. KOLESOV // The presence of analytical solutions of dynamical thermoelasticity problems is important for algorithms of calculations of fast pulsed reactors. In this connection the real core structure elements usually are brought to the parts like a round disk, rod, a sphere, spherical shell and so on, allowing such solutions. The article presents analytical solutions of thermoelasticity problems for the semispherical shell with spatially uniform, time arbitrary temperature distribution and for the rod. The rod temperature dependence on the axial coordinate and time is arbitrary, but divided

Key words: fast pulsed reactors, core structure elements, analytical solutions of thermoelasticity problems, eigenfunction expansion method, semi-spherical shell, rod.

Введение

В настоящее время имеются хорошо отработанные методы расчета динамики быстрых импульсных реакторов [1]. Как правило, уравнения динамики быстрых импульсных реакторов формулируются на основе линейной теории термоупругости и линейных возмущений реактивности в предположении, что в объеме реактора пространственная и временная зависимости температуры разделяются:

$$\theta(\vec{r},t)=\theta_0(\vec{r})q(t),$$
$$q(t)=\int_0^t n(\xi)\,d\xi. \qquad (1)$$

Реактивностная обратная связь в уравнениях динамики представляется функционалом

$$\Delta\rho(t)=\int_V \vec{u}(\vec{r},t)\,\mathrm{grad}W(\vec{r})\,d\vec{r}\ . \qquad (2)$$

В выражениях (1), (2) введены обозначения: $\theta(\vec{r},t)$ − температура в точке $\vec{r}$ в момент времени t; $n(t)$ и $q(t)$ − мощность реактора и энерговыделение в реакторе в зависимости от времени; $\Delta\rho(t)$ – изменение реактивности, производимое термоупругими смещениями среды реактора при ее разогреве; $\vec{u}(\vec{r},t)$ –

вектор термоупругих смещений среды реактора; $W(\vec{r})$ – функция возмущений реактивности, определяемая как изменение реактивности ρ при внесении внутрь реактора в точку $\vec{r}$ малого образца из материала реактора в этой точке, отнесенное к объему образца; V – объём реактора.

Термоупругие смещения $\vec{u}(\vec{r},t)$ в элементах активной зоны и других областей реактора в реальных случаях могут быть определены в процессе решения весьма сложных систем уравнений в частных производных. Однако непосредственное включение этих уравнений в полную систему уравнений реакторной динамики чрезмерно усложнило бы задачу расчета импульсов делений. К тому же для расчета коэффициентов температурного гашения реактивности, входящих в полную систему уравнений реактора, требуются не какие угодно, а только аналитические решения уравнений термоупругости. Если механические напряжения в элементах реактора могут быть определены также с помощью двумерных и трехмерных численных программ, то для расчета динамических коэффициентов гашения реактивности требуются именно аналитические решения. Такие коэффициенты гашения реактивности наиболее просто встраиваются в общие уравнения реакторной динамики.

В традиционном алгоритме решения указанной задачи реальные структурные элементы реактора обычно сводятся к деталям идеализированной формы, а именно к деталям типа круглого диска, стержня, сферы, сферической оболочки и т. п. Решения задач термоупругости для этих идеализированных элементов удается получать аналитически с помощью метода разложения по собственным функциям. В этом случае решения представляются в виде рядов из слагаемых с разделением пространственной и временной зависимостей. При таком подходе, после выполнения интегрирования по пространственным координатам в функционале (2), уравнения динамики быстрого реактора преобразуются к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если нейтроны, отраженные от стен зала и окружающих реактор предметов, трактовать как дополнительные группы запаздывающих нейтронов, то преобразованная система уравнений динамики быстрого импульсного реактора будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{dn}{dt} = \frac{\rho(t)-\beta_{\text{эф}}}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^{L} \lambda_i C_i(t) + S(t);\\
&\frac{dC_i}{dt} = \frac{\beta_{i\text{эф}}}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ L;\\
&\rho = \rho_0(t) + A_0 q(t) + \sum_{j=1}^{\infty} A_j u_j(t);\\
&\frac{d^2 u_j}{dt^2} + \omega_j^2 u_j = \omega_j^2 q(t), \quad j = 1,\ 2,\ \ldots;\\
&u(0) = u'(0) = 0; \quad n(0) = n_0;\\
&q(t) = \int_0^t n(t')\,dt'.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Здесь использованы обозначения: $C_i(t)$ – мощность источников запаздывающих или отраженных нейтронов; $\rho_0(t)$ – реактивность без учета влияния реактивностных обратных связей; $u_j(t)$ – условное, выраженное в единицах энерговыделения смещение в j-й гармонике колебаний; A_0, A_j – парциальные коэффициенты реактивности, отнесенные к $q(t)$ или к j-й гармонике; ω_j – круговые собственные частоты гармоник; L – суммарное число групп запаздывающих и отраженных нейтронов.

Коэффициенты A_0, A_j связаны с обычным квазистатическим коэффициентом реактивности A соотношением

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j = A.$$

Уравнения (3), если ограничиться конечным числом гармоник колебаний, легко решаются численно.

В настоящей статье приведены аналитические решения динамической задачи термоупругости для полусферической оболочки с пространственно однородным, произвольным по времени распределением температуры и для стержня. Зависимость температуры стержня от осевой координаты и времени произвольная, но разделяющаяся. Детали указанных геометрических форм часто используются в конструкциях импульсных реакторов. Отметим, что в доступных литературных источниках уже содержатся решения для стержня [2, 3]. Эти решения, однако, относятся лишь к случаям симметричного относительно середины стержня разогреву.

1. Динамическая задача термоупругости для оболочки в форме полусферы с пространственно однородной, произвольно зависящей от времени температурой

Используя уравнения равновесия для оболочки [4] и выражения для усилий и моментов с учетом термических сил [5], получим следующие уравнения динамической термоупругости для сферической оболочки в случае осевой симметрии:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\mathrm{ctg}\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}+(1+\nu)\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\left(\mathrm{ctg}^2\alpha+\nu\right)u+\\
+\frac{h^2}{12R^2}\left[-\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3}+\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-\mathrm{ctg}\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+\mathrm{ctg}\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\left(\mathrm{ctg}^2\alpha+\nu\right)\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\left(\mathrm{ctg}^2\alpha+\nu\right)u\right]-\\
-(1+\nu)KR\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}=\frac{\left(1-\nu^2\right)\rho R^2}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};\\
-\frac{\partial u}{\partial\alpha}-(\mathrm{ctg}\alpha)u-2w+\frac{h^2}{12(1+\nu)R^2}\times\\
\times\left[-\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}+\frac{\partial^3 u}{\partial\alpha^3}-2\mathrm{ctg}\alpha\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3}+2\mathrm{ctg}\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-\left(1+\nu+\mathrm{ctg}^2\alpha\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}-\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right)+\mathrm{ctg}\alpha\left(2-\nu+\mathrm{ctg}^2\alpha\right)\left(u-\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)\right]+\\
+2KR\theta(\alpha,t)=\frac{(1-\nu)\rho R^2}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},
\end{gathered}\tag{4}$$

при граничных условиях, выражающих отсутствие сил и моментов на краях оболочки. В уравнениях (4) приняты обозначения: α, β − углы, фиксирующие широту и меридиан, соответственно (ортогональные координаты оболочки); u, w − смещения оболочки в касательном меридиану и в радиальном направлениях; ν − коэффициент Пуассона; R, h − радиус срединной поверхности и толщина оболочки.

Решение уравнений (4) в полном объеме получить трудно. Однако в ряде важных случаев при решении этих уравнений допустимы существенные упрощения, например в случаях очень быстрого нагревания оболочки, как это происходит в импульсных ядерных реакторах [2], [6]−[8]. Процессы в оболочке при этом резко динамичны, и основная роль в них принадлежит динамическим нормальным напряжениям. В этих случаях не вносится заметной ошибки в результат, если из уравнений (4) исключить представляющие вклад сдвиговых и моментных сил члены с множителем h^2 [9]. В указанном приближении в качестве граничных условий сохраняются лишь условия равенства нулю нормальных напряжений, направленных вдоль оси α, на краях оболочки. Для полусферической оболочки с однородным пространственным распределением температуры уравнения принимают вид

$$\frac{\partial^2 u_*}{\partial\alpha^2}+\mathrm{ctg}\alpha\frac{\partial u_*}{\partial\alpha}+(1+\nu)\frac{\partial w_*}{\partial\alpha}-\left(\mathrm{ctg}^2\alpha+\nu\right)u_*=\frac{1}{\gamma_1^2}\frac{\partial^2 u_*}{\partial t^2};\tag{5}$$

$$\frac{\partial u_*}{\partial\alpha}+(\operatorname{ctg}\alpha)u_*+2w_*-\frac{2}{1+\nu}\theta(t)=-\frac{1}{\gamma_2^2}\frac{\partial^2 w_*}{\partial t^2};$$

$$\gamma_1^2=\frac{E}{\left(1-\nu^2\right)\rho R^2};\quad \gamma_2^2=\frac{E}{(1-\nu)\rho R^2}; \tag{5}$$

$$u_*=\frac{u(\alpha,t)}{(1+\nu)KR};\ w_*=\frac{w(\alpha,t)}{(1+\nu)KR},$$

при граничном условии –

$$\left.\frac{\partial u_*}{\partial\alpha}+\nu(\operatorname{ctg}\alpha)u_*+(1+\nu)w_*=\theta(t)\right|_{\alpha=\pi/2}, \tag{6}$$

при нулевых начальных условиях –

$$u_*(\alpha,0)=w_*(\alpha,0)=0;\ \frac{\partial u_*}{\partial t}(\alpha,0)=\frac{\partial w_*}{\partial t}(\alpha,0)=0. \tag{7}$$

Решение задачи (5−7) приведено ниже.

Вначале уравнения (5−7) были преобразованы к виду

$$w_*(\alpha,t)=\frac{\sqrt{2}\cdot\gamma_2}{1+\nu}\int_0^t\theta(\xi)\sin\left[\sqrt{2}\cdot\gamma_2(t-\xi)\right]d\xi-\frac{\gamma_2}{\sqrt{2}}\int_0^t\left(\frac{\partial u_*}{\partial\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha\cdot u_*\right)\sin\left[\sqrt{2}\cdot\gamma_2(t-\xi)\right]d\xi;$$

$$\left[\frac{\partial^2 u_*}{\partial\alpha^2}+\operatorname{ctg}\alpha\frac{\partial u_*}{\partial\alpha}+\left(1-\operatorname{ctg}^2\alpha\right)u_*\right]+\frac{1}{\gamma_3^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 u_*}{\partial\alpha^2}+\operatorname{ctg}\alpha\frac{\partial u_*}{\partial\alpha}+\left(1-\operatorname{ctg}^2\alpha\right)u_*\right]=\frac{1}{\gamma_1^2\gamma_3^2}\left(3\gamma_2^2\frac{\partial^2 u_*}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u_*}{\partial t^4}\right); \tag{8}$$

$$\gamma_3^2=(1-\nu)\gamma_2^2;$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial u_*}{\partial\alpha}+\gamma_3^2\frac{\partial u_*}{\partial\alpha}=\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right|_{\alpha=\pi/2}; \tag{9}$$

$$u_*(\alpha,0)=0;\ \frac{\partial^k u_*}{\partial t^k}(\alpha,0)=0;\ \ k=1,2,3. \tag{10}$$

Уравнения (8−10) можно решить с помощью разложения по собственным функциям. Однако получаемые при этом ряды неудобны в применениях из-за их плохой сходимости. С целью устранения этого недостатка было найдено целесообразным искусственное видоизменение граничного условия (9), а именно: запись его в форме

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial u_*}{\partial\alpha}+\gamma_0^2\frac{\partial u_*}{\partial\alpha}=\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right|_{\alpha=\pi/2}, \tag{11}$$

где γ_0 − сколь угодно близкая, но не равная γ_3 величина. Можно показать, что это видоизменение граничного условия эквивалентно искусственному наложению на краю оболочки малых осциллирующих напряжений. Отношение амплитуды этих напряжений к амплитуде реальных напряжений в оболочке характеризуется величиной порядка $\frac{(\gamma_0-\gamma_3)}{\gamma_3}$. Если γ_0 близко γ_3, указанная замена практически не изменяет физическую постановку задачи. (Конкретный вид алгоритма выбора γ_0 указан в конце настоящего раздела.)

При этом, однако, необходимо иметь в виду, что при сколь угодно малой амплитуде искусственно наложенных сил последние, вследствие резонансных эффектов, с течением времени могут привести к заметным ошибкам. Поэтому полученное ниже решение следует использовать лишь в области не слишком больших значений t, т. е. в области, в которой резонансные эффекты заведомо не успевают проявиться.

Подстановка

$$u_*(\alpha,t)=v(\alpha,t)+\frac{1-\cos\alpha}{\gamma_0}\int_0^t\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(\xi)\sin\gamma_0(t-\xi)\,d\xi \tag{12}$$

приводит задачу (8), (10), (11) к виду

$$\gamma_1^2\gamma_3^2\left[\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}+\operatorname{ctg}\alpha\frac{\partial v}{\partial\alpha}+\left(1-\operatorname{ctg}^2\alpha\right)v\right]+\gamma_1^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}+\operatorname{ctg}\alpha\frac{\partial v}{\partial\alpha}+\left(1-\operatorname{ctg}^2\alpha\right)v\right]+f(\alpha,t)=3\gamma_2^2\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 v}{\partial t^4};$$

$$f(\alpha,t)=\gamma_1^2\left(2-\frac{1-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right)\times\left[\frac{\gamma_3^2-\gamma_0^2}{\gamma_0}\int_0^t\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(\xi)\sin\gamma_0(t-\xi)\,d\xi+\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right]- \tag{13}$$

$$-(1-\cos\alpha)\left[\frac{\partial^4\theta}{\partial t^4}+\left(3\gamma_2^2-\gamma_0^2\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}--\left(3\gamma_2^2-\gamma_0^2\right)\gamma_0\int_0^t\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(\xi)\sin\gamma_0(t-\xi)\,d\right];$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial\alpha}=0\right|_{\alpha=\frac{\pi}{2}};$$

$$v(\alpha,0)=\frac{\partial v}{\partial t}(\alpha,0)=0; \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\alpha,0)=-(1-\cos\alpha)\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(0);$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}(\alpha,0)=-(1-\cos\alpha)\frac{\partial^3\theta}{\partial t^3}(0).$$

С помощью использования процедуры разделения переменных получено следующее решение задачи (13), (14):

$$v(\alpha,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k(t)P^1_{\nu_0^{(k)}}(\cos\alpha), \tag{15}$$

где $P^1_{\nu_0^{(k)}}(\cos\alpha)-$ шаровые функции 1-го рода с индексом $\nu_0^{(k)}=1, 3, 5, 7,\ldots$ [8]; $A_k(t)-$ зависящие от времени коэффициенты, являющиеся решениями уравнений

$$\frac{d^4A_k}{dt^4}+\left(3\gamma_2^2+\gamma_1^2\lambda_k^2\right)\frac{d^2A_k}{dt^2}+\gamma_1^2\gamma_3^2\lambda_k^2A_k(t)=\frac{\left(2\nu_0^{(k)}+1\right)}{\nu_0^{(k)}\left(\nu_0^{(k)}+1\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha f(\alpha,t)P^1_{\nu_0^{(k)}}(\cos\alpha)\,d\alpha;$$

$$\tag{16}$$

$$\lambda_k^2=\left(\nu_0^{(k)}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4};\;\;\lambda_k^2=0,10,28,54,\ldots$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (16), являются чисто мнимыми величинами, равными

$$\mu_1^{(k)}=\gamma_3\sqrt{\frac{\left(3+3\nu+\lambda_k^2\right)}{2\left(1-\nu^2\right)}\left[1-\sqrt{1-\frac{4\lambda_k^2\left(1-\nu^2\right)}{\left(3+3\nu+\lambda_k^2\right)^2}}\right]}; \tag{17}$$

$$\mu_2^{(k)} = \gamma_3 \sqrt{\frac{\left(3+3\nu+\lambda_k^2\right)}{2\left(1-\nu^2\right)}\left[1+\sqrt{1-\frac{4\lambda_k^2\left(1-\nu^2\right)}{\left(3+3\nu+\lambda_k^2\right)^2}}\right]}. \tag{17}$$

Решение уравнения (16) имеет вид

$$A_k(t) = \rho_1^{(k)}\theta(t) + \rho_2^{(k)}\Phi(\gamma_0, t) + \rho_3^{(k)}\Phi\left(\mu_1^{(k)}, t\right) + \rho_4^{(k)}\Phi\left(\mu_2^{(k)}, t\right) + \rho_5^{(k)}\sin\gamma_0 t + \rho_6^{(k)}\sin\mu_1^{(k)} t +$$
$$+ \rho_7^{(k)}\sin\mu_2^{(k)} t + \rho_8^{(k)}\cos\mu_1^{(k)} t + \rho_9^{(k)}\cos\mu_2^{(k)} t, \tag{18}$$

где $\Phi(\gamma, t) = \int\limits_0^t \theta(\xi)\sin\gamma(t-\xi)\,d\xi$, $\xi_i^{(k)}$, $\rho_i^{(k)}$ – коэффициенты:

$$\rho_1^{(k)} = b_2^{(k)};\ \rho_2^{(k)} = -\frac{\gamma_0^2 b_3^{(k)}}{\left[\left(\mu_1^{(k)}\right)^2 - \gamma_0^2\right]\left[\left(\mu_2^{(k)}\right)^2 - \gamma_0^2\right]};$$

$$\rho_3^{(k)} = -\frac{\mu_1^{(k)}}{3\gamma_2^2 + \gamma_1^2\lambda_k^2 - 2\left(\mu_1^{(k)}\right)^2} \times \left[b_1^{(k)} - b_2^{(k)}\left(\mu_1^{(k)}\right)^2 - \frac{b_2^{(k)}\gamma_0}{\left(\mu_1^{(k)}\right)^2 - \gamma_0^2}\right];$$

$$\rho_4^{(k)} = -\frac{\mu_2^{(k)}}{3\gamma_2^2 + \gamma_1^2\lambda_k^2 - 2\left(\mu_2^{(k)}\right)^2} \times \left[b_1^{(k)} - b_2^{(k)}\left(\mu_2^{(k)}\right)^2 - \frac{b_3^{(k)}\gamma_0}{\left(\mu_2^{(k)}\right)^2 - \gamma_0^2}\right];$$

$$\rho_5^{(k)} = -\frac{b_3^{(k)}\dfrac{d\theta}{dt}(0)}{\left[\left(\mu_1^{(k)}\right)^2 - \gamma_0^2\right]\left[\left(\mu_2^{(k)}\right)^2 - \gamma_0^2\right]};$$

$$\rho_6^{(k)} = \frac{\beta_k^{(3)}}{\mu_1^{(k)}\left[\left(\mu_2^{(k)}\right)^2 - \left(\mu_1^{(k)}\right)^2\right]} - \frac{1}{\mu_1^{(k)}\left[3\gamma_2^2 + \gamma_1^2\lambda_k^2 - 2\left(\mu_2^{(k)}\right)^2\right]} \times$$
$$\times\left\{b_2^{(k)}\frac{\partial^3\theta}{\partial t^3}(0) + \left[b_1^{(k)} - b_2^{(k)}\left(\mu_1^{(k)}\right)^2 - \frac{b_3^{(k)}\gamma_0}{\left(\mu_1^{(k)}\right)^2 - \gamma_0^2}\right]\frac{\partial\theta}{\partial t}(0)\right\};$$

$$\rho_7^{(k)} = -\frac{\beta_k^{(3)}}{\mu_2^{(k)}\left[\left(\mu_2^{(k)}\right)^2 - \left(\mu_1^{(k)}\right)^2\right]} - \frac{1}{\mu_2^{(k)}\left[3\gamma_2^2 + \gamma_1^2\lambda_k^2 - 2\left(\mu_2^{(k)}\right)^2\right]} \times$$
$$\times\left\{b_2^{(k)}\frac{\partial^3\theta}{\partial t^3}(0) + \left[b_1^{(k)} - b_2^{(k)}\left(\mu_2^{(k)}\right)^2 - \frac{b_3^{(k)}\gamma_0}{\left(\mu_2^{(k)}\right)^2 - \gamma_0^2}\right]\frac{\partial\theta}{\partial t}(0)\right\};$$

$$\rho_8^{(k)} = \frac{\beta_k^{(2)}}{\left[\left(\mu_2^{(k)}\right)^2 - \left(\mu_1^{(k)}\right)^2\right]} - \frac{b_2^{(k)}}{\left[3\gamma_2^2 + \gamma_1^2\lambda_k^2 - 2\left(\mu_1^{(k)}\right)^2\right]}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(0);$$

$$\rho_9^{(k)} = -\frac{\beta_k^{(2)}}{\left[\left(\mu_2^{(k)}\right)^2 - \left(\mu_1^{(k)}\right)^2\right]} - \frac{b_2^{(k)}}{\left[3\gamma_2^2 + \gamma_1^2\lambda_k^2 - 2\left(\mu_2^{(k)}\right)^2\right]}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(0);$$

$$b_1^{(k)} = \gamma_1^2 \alpha_1^{(k)} - \left(3\gamma_2^2 - \gamma_0^2\right)\alpha_2^{(k)};$$

$$b_2^{(k)} = -\alpha_2^{(k)};$$

$$b_3^{(k)} = \frac{\gamma_1^2\left(\gamma_3^2 - \gamma_0^2\right)}{\gamma_0}\alpha_1^{(k)} + \gamma_0\left(3\gamma_2^2 - \gamma_0^2\right)\alpha_2^{(k)};$$

$$\alpha_1^{(k)} = \frac{2\nu_0^{(k)} + 1}{\nu_0^{(k)}\left(\nu_0^{(k)} + 1\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\left(2 - \frac{1-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right)P^1_{\nu_0^{(k)}}\left(\cos\alpha\right)d\alpha;$$

$$\alpha_2^{(k)} = \frac{2\nu_0^{(k)} + 1}{\nu_0^{(k)}\left(\nu_0^{(k)} + 1\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\left(1 - \cos\alpha\right)P^1_{\nu_0^{(k)}}\left(\cos\alpha\right)d\alpha.$$

Величины $\beta_k^{(n)}$ являются коэффициентами разложения $\frac{\partial^n v}{\partial t^n}(\alpha, 0)$ в выражениях (14) в ряды по шаровым функциям:

$$\frac{\partial^n v}{\partial t^n}(\alpha, 0) = \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^{(n)} P^1_{\nu_0^{(k)}}\left(\cos\alpha\right),\ n = 0,1,2,3;$$

$$\beta_k^{(0)} = \beta_k^{(1)} = 0;$$

$$\beta_k^{(2)} = -\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(0)\alpha_2^{(k)};\ \beta_k^{(3)} = -\frac{\partial^3\theta}{\partial t^3}(0)\alpha_2^{(k)}.$$

С помощью формул (10), (15), (18), с учетом соотношения

$$\int_0^t \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(\xi)\sin\gamma_0\left(t-\xi\right)d\xi = \gamma_0\theta(t) - \frac{d\theta}{dt}(0)\sin\gamma_0 t - \gamma_0^2\int_0^t \theta(\xi)\sin\gamma_0\left(t-\xi\right)d\xi,$$

получено

$$u_*\left(\alpha, t\right) = \left(1-\cos\alpha\right)\left[\theta(t) - \gamma_0\Phi\left(\gamma_0, t\right) - \frac{1}{\gamma_0}\frac{d\theta}{dt}(0)\sin\gamma_0 t\right] - \sum_{k=1}^{\infty}A_k(t)P^1_{\nu_0^{(k)}}\left(\cos\alpha\right) \qquad (19)$$

и далее, с помощью первого выражения в (8),

$$w_*\left(\alpha, t\right) = \frac{\gamma_4}{1+\nu}\Phi\left(\gamma_4, t\right) - \frac{\gamma_4^2}{2\left(\gamma_4^2 - \gamma_0^2\right)}\left[\sin\alpha + \mathrm{ctg}\alpha\left(1-\cos\alpha\right)\right]\times$$
$$\times\left[\gamma_4\Phi\left(\gamma_4, t\right) - \gamma_0\Phi\left(\gamma_0, t\right) + \frac{d\theta}{dt}(0)\left(\frac{\sin\gamma_4 t}{\gamma_4} - \frac{\sin\gamma_0 t}{\gamma_0}\right)\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu_0^{(k)}}{\sin\alpha}\left[P^1_{\nu_0^{(k)}+1}\left(\cos\alpha\right) - \cos\alpha P^1_{\nu_0^{(k)}}\left(\cos\alpha\right)\right]\times$$
$$\times\left[\begin{array}{l}\xi_1^{(k)}\Phi\left(\gamma_0, t\right) + \xi_2^{(k)}\Phi\left(\gamma_4, t\right) + \xi_3^{(k)}\Phi\left(\mu_1^{(k)}, t\right) + \xi_4^{(k)}\Phi\left(\mu_2^{(k)}, t\right) + \xi_5^{(k)}\sin\gamma_0 t + \xi_6^{(k)}\sin\gamma_4 t + \\ + \xi_7^{(k)}\sin\mu_1^{(k)}t + \xi_8^{(k)}\sin\mu_2^{(k)}t + \xi_9^{(k)}\cos\gamma_4 t + \xi_{10}^{(k)}\cos\mu_1^{(k)}t + \xi_{11}^{(k)}\cos\mu_2^{(k)}t\end{array}\right]; \qquad (20)$$

$$\gamma_4 = \sqrt{2}\gamma_2;$$

$$\xi_1^{(k)} = \frac{\gamma_4^2\rho_2^{(k)}}{2\left(\gamma_4^2 - \gamma_0^2\right)};$$

$$\xi_2^{(k)} = -\left[\rho_1^{(k)} - \frac{\gamma_0\rho_2^{(k)}}{\gamma_4^2 - \gamma_0^2} - \frac{\mu_1^{(k)}\rho_3^{(k)}}{\gamma_4^2 - \left(\mu_1^{(k)}\right)^2} - \frac{\mu_2^{(k)}\rho_4^{(k)}}{\gamma_4^2 - \left(\mu_2^{(k)}\right)^2}\right]\frac{\gamma_4}{2};$$

$$\xi_3^{(k)} = -\frac{\gamma_4^2 \rho_3^{(k)}}{2\left[\gamma_4^2 - \left(\mu_1^{(k)}\right)^2\right]}; \quad \xi_4^{(k)} = -\frac{\gamma_4^2 \rho_4^{(k)}}{2\left[\gamma_4^2 - \left(\mu_2^{(k)}\right)^2\right]};$$

$$\xi_5^{(k)} = -\frac{\gamma_4^2 \rho_5^{(k)}}{2\left[\gamma_4^2 - \gamma_0^2\right]};$$

$$\xi_6^{(k)} = \left[\frac{\gamma_0 \rho_5^{(k)}}{\gamma_4^2 - \gamma_0^2} + \frac{\mu_1^{(k)} \rho_6^{(k)}}{\gamma_4^2 - \left(\mu_1^{(k)}\right)^2} + \frac{\mu_2^{(k)} \rho_7^{(k)}}{\gamma_4^2 - \left(\mu_2^{(k)}\right)^2}\right] \frac{\gamma_4}{2};$$

$$\xi_7^{(k)} = -\frac{\gamma_4^2 \rho_6^{(k)}}{2\left[\gamma_4^2 - \left(\mu_1^{(k)}\right)^2\right]}; \quad \xi_8^{(k)} = -\frac{\gamma_4^2 \rho_7^{(k)}}{2\left[\gamma_4^2 - \left(\mu_2^{(k)}\right)^2\right]};$$

$$\xi_9^{(k)} = \left[\frac{\rho_8^{(k)}}{\left[\gamma_4^2 - \left(\mu_1^{(k)}\right)^2\right]} + \frac{\rho_9^{(k)}}{\left[\gamma_4^2 - \left(\mu_2^{(k)}\right)^2\right]}\right] \frac{\gamma_4^2}{2};$$

$$\xi_{10}^{(k)} = -\frac{\gamma_4^2 \rho_8^{(k)}}{2\left[\gamma_4^2 - \left(\mu_1^{(k)}\right)^2\right]}; \quad \xi_{11}^{(k)} = -\frac{\gamma_4^2 \rho_9^{(k)}}{2\left[\gamma_4^2 - \left(\mu_2^{(k)}\right)^2\right]}.$$

Выражения (17)−(20) представляют полное решение задачи (8)−(11).

Нормальные напряжения σ_1, σ_2, направленные соответственно вдоль координатных линий α и β, определяются из выражений:

$$\frac{1-\nu}{EK}\sigma_1(\alpha,t) = (1+\nu) w_* + \nu \operatorname{ctg}\alpha \cdot u_* + \frac{\partial u_*}{\partial \alpha} - \theta(t);$$

$$\frac{1-\nu}{EK}\sigma_2(\alpha,t) = (1+\nu) w_* + \operatorname{ctg}\alpha \cdot u_* + \nu \frac{\partial u_*}{\partial \alpha} - \theta(t).$$

Приведенное решение в применении к импульсным реакторам допускает еще одно существенное упрощение, связанное с тем обстоятельством, что в этом случае величины $\frac{\partial \theta}{\partial t}(0)$, $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(0)$, $\frac{\partial^3 \theta}{\partial t^3}(0)$,... и, следовательно, коэффициенты $\rho_5^{(k)},..., \rho_9^{(k)}$; $\xi_5^{(k)},..., \xi_{11}^{(k)}$ можно положить равными нулю.

Напряжения σ_1, σ_2 в указанном случае представляются выражениями

$$\frac{1-\nu}{EK}\sigma_1(\alpha,t) = \gamma_4 \Phi(\gamma_4,t) - \frac{(1+\nu)\gamma_4^2}{2\left(\gamma_4^2 - \gamma_0^2\right)}\left[\sin\alpha + \operatorname{ctg}\alpha(1-\cos\alpha)\right] \times \left[\gamma_4 \Phi(\gamma_4,t) - \gamma_0 \Phi(\gamma_0,t)\right] +$$

$$+\left[\sin\alpha + \nu \operatorname{ctg}\alpha(1-\cos\alpha)\right] \times \left[\theta(t) - \gamma_0 \Phi(\gamma_0,t)\right] - \theta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\nu)\nu_0^{(k)}}{\sin\alpha}\left[P^1_{\nu_0^{(k)}+1}(\cos\alpha) - \cos\alpha P^1_{\nu_0^{(k)}}(\cos\alpha)\right] \times$$

$$\times\left[\xi_1 \Phi(\gamma_0,t) + \xi_2 \Phi(\gamma_4,t) + \xi_3 \Phi\left(\mu_1^{(k)},t\right) + \xi_4 \Phi\left(\mu_2^{(k)},t\right)\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\nu_0^{(k)}}{\sin\alpha} P^1_{\nu_0^{(k)}+1}(\cos\alpha) + \left(\nu - \nu_0^{(k)} - 1\right)\operatorname{ctg}\alpha P^1_{\nu_0^{(k)}}(\cos\alpha)\right] \times$$

$$\times\left[\rho_1^{(k)}\theta(t)+\rho_2^{(k)}\Phi(\gamma_0,t)+\rho_3^{(k)}\Phi\left(\mu_1^{(k)},t\right)+\rho_4^{(k)}\Phi\left(\mu_2^{(k)},t\right)\right];$$

$$\frac{1-\nu}{EK}\sigma_2(\alpha,t)=\gamma_4\Phi(\gamma_4,t)-\frac{(1+\nu)\gamma_4^2}{2\left(\gamma_4^2-\gamma_0^2\right)}\left[\sin\alpha+\operatorname{ctg}\alpha(1-\cos\alpha)\right]\times\left[\gamma_4\Phi(\gamma_4,t)-\gamma_0\Phi(\gamma_0,t)\right]+$$

$$+\left[\nu\sin\alpha+\operatorname{ctg}\alpha(1-\cos\alpha)\right]\cdot\left[\theta(t)-\gamma_0\Phi(\gamma_0,t)\right]-\theta(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+\nu)\nu_0^{(k)}}{\sin\alpha}\left[P^1_{\nu_0^{(k)}+1}(\cos\alpha)-\cos\alpha P^1_{\nu_0^{(k)}}(\cos\alpha)\right]\times$$

$$\times\left[\xi_1\Phi(\gamma_0,t)+\xi_2\Phi(\gamma_4,t)+\xi_3\Phi\left(\mu_1^{(k)},t\right)+\xi_4\Phi\left(\mu_2^{(k)},t\right)\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\nu\nu_0^{(k)}}{\sin\alpha}P^1_{\nu_0^{(k)}+1}(\cos\alpha)+\left(1-\nu\nu_0^{(k)}-\nu\right)\operatorname{ctg}\alpha P^1_{\nu_0^{(k)}}(\cos\alpha)\right]\times$$

$$\times\left[\rho_1^{(k)}\theta(t)+\rho_2^{(k)}\Phi(\gamma_0,t)+\rho_3^{(k)}\Phi\left(\mu_1^{(k)},t\right)+\rho_4^{(k)}\Phi\left(\mu_2^{(k)},t\right)\right].$$

При $\alpha\to 0$ функции $P_n^1(\cos\alpha)\to 0$ и, следовательно,

$$\frac{1-\nu}{EK}\sigma_1(\alpha,t)=\frac{1-\nu}{EK}\sigma_2(\alpha,t)=\gamma_4\Phi(\gamma_4,t)-\theta(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(1+\nu)\nu_0^{(k)}\left(\nu_0^{(k)}+1\right)\times$$

$$\times\left[\rho_1^{(k)}\theta(t)+\left(\rho_2^{(k)}+2\xi_1^{(k)}\right)\Phi(\gamma_0,t)2\xi_1^{(k)}+2\xi_2^{(k)}\Phi(\gamma_4,t)+\left(\rho_3^{(k)}+2\xi_3^{(k)}\right)\Phi\left(\mu_1^{(k)},t\right)+\left(\rho_4^{(k)}+2\xi_4^{(k)}\right)\Phi\left(\mu_2^{(k)},t\right)\right].$$

Корни $\mu_1^{(k)}$ характеристического уравнения в случае $k\to\infty$ стремятся к γ_3. В этой связи введенную выше величину γ_0 (см. условие (11)) целесообразно выбирать следующим образом:

$$\gamma_0=\frac{\mu_1^{(k_0)}+\mu_1^{(k_0+1)}}{2},$$

где k_0 − достаточно большое число.

В пределе при $k_0\to\infty$ $\gamma_0\to\gamma_3$.

Ряды в полученных выше решениях быстро сходятся. В расчетах следует учитывать несколько первых членов во всех рядах, а также несколько первых членов в рядах, содержащих $\mu_1^{(k_0)}$, $\mu_1^{(k_0+1)}$, $\mu_1^{(k_0-1)}$, $\mu_1^{(k_0+2)}$,... Члены, соответствующие $k=k_0$, k_0+1,... вносят большой вклад в суммы из-за наличия в знаменателях выражений для коэффициентов $\rho_2^{(k)}$, $\rho_3^{(k)}$, $\rho_5^{(k)}$, $\rho_6^{(k)}$ разности $\left(\mu_1^{(k)}\right)^2-\gamma_0^2$ (см. формулы (18)).

Отметим следующие моменты. Полученное здесь решение относится к полусферической оболочке (граничное значение α равно $\pi/2$) с однородным пространственным распределением температуры. Очевидно, что решение без труда можно распространить и на случай, когда распределение температуры зависит от α.

Условие полусферичности оболочки является более существенным: только в полусферической оболочке, вследствие равенства нулю $\operatorname{ctg}\alpha$ на границе, условие (6) приводится к виду (9) и первого соотношения в (14), допускающему разделение переменных. В случае, когда граничное значение α не равно $\pi/2$ или оболочка имеет полюсное отверстие, указанный выше способ решения не может быть использован.

2. Динамическая задача термоупругости для стержня при произвольной, но разделяющейся зависимости температуры от *z* и *t*

Динамическую задачу термоупругости для стержня длиной *L* записываем в виде уравнений:

$$\theta(z,t)=\theta_0(z)q(t); \qquad (21)$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - K\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
&\overset{\frown}{zz}(z,t) = E\left[\frac{\partial u}{\partial z} - K\theta(z,t)\right]
\end{aligned}
\tag{21}
$$

при нулевых начальных условиях и при граничных условиях

$$
\overset{\frown}{zz}(0,t) = \overset{\frown}{zz}(L,t) = 0
$$

или
$$
\frac{\partial u}{\partial z} = K\theta(z,t)\Big|_{z=0,L}.
$$

Здесь введены обозначения: z – осевая координата; $u(z,t)$ – термоупругое смещение в точке z стержня в момент t; $\theta(z,t) = \theta_0(z)q(t)$ – температура стержня, отсчитываемая от начального значения; $q(t)$ – энерговыделение в импульсе в зависимости от t; $\overset{\frown}{zz}$ − нормальные напряжения вдоль оси z.

Путем замены

$$
u(z,t) = v(z,t) + Kq(t)\left[\theta_0^{(1)}z + \frac{z^2}{2L}\left(\theta_0^{(2)} - \theta_0^{(1)}\right) - \frac{L}{6}\left(2\theta_0^{(1)} + \theta_0^{(2)}\right)\right],,
$$

$$
\theta_0^{(1)} = \theta_0^{(1)} = \theta_0(0),\ \theta_0^{(2)} = \theta_0(L)
$$

уравнения (21) сводятся к задаче:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - F(z,t) = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2};\quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0\\
&v(0) = \frac{\partial v}{\partial t}(0) = 0;\\
&\frac{\partial v}{\partial z} = 0\Big|_{z=0,L};
\end{aligned}
\tag{22}
$$

$$
F(z,t) = -Kq(t)\left[\frac{\theta_0^{(2)} - \theta_0^{(1)}}{L} - \frac{d\theta_0}{dz}\right] + \frac{K\rho}{E}\frac{d^2 q}{dt^2}(t)\left[\theta_0^{(1)}z + \frac{z^2}{2L}\left(\theta_0^{(2)} - \theta_0^{(1)}\right) - \frac{L}{6}\left(2\theta_0^{(1)} + \theta_0^{(2)}\right)\right].
$$

Решение задачи (22) получено с помощью метода разложения по собственным функциям, которые для этой задачи имеют вид

$$
w_n(z) = \cos\frac{n\pi}{L}z,\ n = 0,1,2,...
$$

В итоге применения процедуры разложения по собственным функциям и учета соотношения

$$
\int_0^t \frac{d^2 q}{dt^2}(\eta)\sin\left[\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}(t-\eta)\right]d\eta = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}q(t) - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\frac{E}{\rho}\int_0^t q(\eta)\sin\left[\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}(t-\eta)\right]d\eta
$$

получено:

$$
u(z,t) = \varphi_0(z)q(t) - \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1^{(n)}(z)\int_0^t q(\eta)\sin\left[\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}(t-\eta)\right]d\eta,
\tag{23}
$$

где
$$
\varphi_0(z) = K\left[\theta_0^{(1)}z + \frac{z^2}{2L}\left(\theta_0^{(2)} - \theta_0^{(1)}\right) - \frac{L}{6}\left(2\theta_0^{(1)} + \theta_0^{(2)}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L}{(n\pi)^2}\left((-1)^n\theta_0^{(2)} - \theta_0^{(1)}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}z\right)\right],
$$

$$\varphi_1^{(n)}(z) = \frac{2K}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cos(\frac{n\pi}{L}z)\int_0^L \theta_0(z)\sin(\frac{n\pi}{L}z)dz.$$

В квазистатических условиях

$$u(z,t) = Kq(t)\left\{\begin{aligned}&\theta_0^{(1)}z + \frac{z^2}{2L}\left(\theta_0^{(2)} - \theta_0^{(1)}\right) - \frac{L}{6}\left(2\theta_0^{(1)} + \theta_0^{(2)}\right) - \\ &-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}z\right)\left[\frac{L}{n\pi}\left(\left(-1\right)^n\theta_0^{(2)} - \theta_0^{(1)}\right) + \int_0^L \theta_0\left(z\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right)dz\right]\end{aligned}\right\}. \quad (24)$$

Решение, применимое в квазистатических условиях, было получено также прямым способом, т. е. без использования метода разложения по собственным функциям. Это решение имеет вид

$$u(z,t) = Kq(t)\left[\int_0^z \theta_0\left(z\right)dz - \frac{1}{L}\int_0^L dy\int_0^y \theta_0\left(x\right)dx\right]. \quad (25)$$

Это решение, как и решения (23), (24), удовлетворяет требованию равенства нулю полного механического импульса стержня в любой момент времени. Расчет смещений по формулам (24), (25) приводит к одному и тому же результату.

Список литературы

1. Колесов В. Ф. Апериодические импульсные реакторы. – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2007. Т. 1, 2.

2. Randles J. Feedback due to elastic waves and doppler coefficient during the excursions of a pulsed fast reactor // J. Nucl. Energy, part A/B.1966, vol. 20, N 1, part A/B, p. 1–16.

3. Michaels J. S. Thermally induced elastic wave propagation in slender bars // Proc. of the Third U.S. National Congress of Applied Mechanics. Providence, Rhode Island, 1958, New York, 1958, p. 209−213.

4. Власов В. З. Общая теория оболочек. – М.–Л.: Гостехтеориздат, 1949.

5. Новацкий В. Вопросы термоупругости. − М.: Изд. АН СССР, 1962.

6. Burgreen D. Thermoelastic dynamics of rods, thin shells and solid spheres // Nucl. Sci. Engng., 1962, vol. 12, N 2, p. 203–217.

7. McTaggart M.H. Fast burst reactor kinetics // Fast Burst Reactors. Proc. of the National Topical Meeting at the University of New Mexico, Albuquerque, January 28–30, 1969. USAEC CONF–690102, 1969, p. 31–50.

8. Колесов В. Ф. К динамике сферически симметричного быстрого импульсного реактора // Атомная энергия, 1963, т. 14, вып. 3, с. 273–280.

9. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник в 3-х томах / Под общей ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. − М.: Машиностроение, 1968. Т. 3.

Контактная информация –

Колесов Владимир Федорович,
главный научный сотрудник ИЯРФ,
РФЯЦ-ВНИИЭФ,
тел. (831 30) 2-75-11,
e-mail: kolesov@expd.vniief.ru

Статья поступила в редакцию 10.06.2014.

Вопросы атомной науки и техники.
Сер. Физика ядерных реакторов, 2012, вып. 3, с. 61–71.