

УДК 519.6

## УЧЕТ СПЕКТРАЛЬНЫХ И КИНЕТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ В ПРИБЛИЖЕНИИ ЛУЧИСТОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Н. Г. Карлыханов  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина",  
г. Снежинск Челябинской области)

Рассматривается один подход для усреднения по спектру и угловой переменной уравнения переноса излучения. В отличие от известных методов рассматриваемый здесь алгоритм сводит усредненную задачу к уравнению для приближения лучистой теплопроводности. Показано, что при выполнении определенных условий результаты расчетов, проведенных с использованием предлагаемого алгоритма, близки к результатам расчетов в кинетической постановке. Показано, что в оптически плотных средах данный алгоритм естественным образом переходит в приближение лучистой теплопроводности со средним росселандовым пробегом.

*Ключевые слова:* перенос теплового излучения, квазидиффузия, квазиспектральность.

### Введение

Существует несколько способов получения усредненных уравнений переноса излучения (см., например, [1–4]). Во всех этих подходах, кроме метода квазидиффузии [1], получаются усредненные уравнения специального типа, напоминающие уравнения двухтемпературной теплопроводности. Цель настоящей работы — привести усредненное уравнение к виду, максимально близкому к классическому уравнению для приближения лучистой теплопроводности. Расчет уравнения переноса излучения в постановке лучистой теплопроводности обладает преимуществами, заключающимися, главным образом, в простоте построения монотонных разностных схем второго порядка точности и организации классического ньютоновского итерационного процесса по нелинейности. Кроме того, имеется большое количество рабочих методик для расчета задач переноса излучения в приближении лучистой теплопроводности. В этих методиках без существенных доработок в соответствующих программах можно применить предлагаемый здесь подход для решения задач переноса излучения в спектральной кинетической постановке. Отметим, что решение кинетического уравнения и уравнения спектральной диффузии при известной температуре не представляет большой сложности, особенно в части, которая касается организации итерационного процесса по температуре. Кроме того, такой подход позволяет легко организовать распараллеливание по угловой и спектральной переменным.

Очевидно, что уравнениями в постановке лучистой теплопроводности нельзя описать весь класс решений исходной системы уравнений гиперболического типа. В работе [5] описаны ограничения при переходе от кинетического уравнения к уравнению диффузионного типа. Ограничений при переходе от уравнений спектральной диффузии к уравнениям в постановке лучистой теплопроводности при расчетах широкого класса задач не обнаружено.

### Постановка задачи

Рассмотрим суть предлагаемого подхода. Для простоты рассмотрим кинетическое уравнение переноса излучения в одномерном случае в приближении полного увлечения в лагранжевой системе координат:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} I_\varepsilon \right) + \frac{\partial}{\partial q} (\mu r^\nu I_\varepsilon) + \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1 - \mu^2}{r\rho} I_\varepsilon \right) + \frac{\kappa_{\varepsilon a} + \kappa_{\varepsilon s}}{\rho} I_\varepsilon = \frac{\kappa_{\varepsilon a}}{\rho} I_{\varepsilon r} + \frac{\kappa_{\varepsilon s}}{2\rho} \int_{-1}^1 I_\varepsilon d\mu. \quad (1)$$

Здесь приняты стандартные обозначения:  $c$  — скорость света;  $t$  — время;  $r$  — пространственная координата;  $\nu$  — признак геометрии:  $\nu = 0$  — плоская,  $\nu = 2$  — сферическая;  $\rho$  — плотность среды;  $dq = \rho r^\nu dr$ ;  $I_\varepsilon$  — интенсивность излучения с энергией  $\varepsilon$ ;  $\mu$  — косинус угла полета фотона относительно нормали к поверхности сферы;  $\kappa_{\varepsilon a}$ ,  $\kappa_{\varepsilon s}$  — коэффициенты поглощения и рассеяния излучения соответственно;  $I_{\varepsilon r} = k \frac{\varepsilon^3 \exp(-\varepsilon/T)}{1 - \exp(-\varepsilon/T)}$  — интенсивность равновесного излучения, где  $k$  — параметр, значение которого зависит от выбранной системы единиц измерения,  $T$  — температура.

Отметим, что  $\frac{1}{c} \int_0^\infty \int_{-1}^1 I_{\varepsilon r} d\mu d\varepsilon = \sigma T^4$ , где  $\sigma$  — постоянная Стефана—Больцмана.

Если проинтегрировать уравнение (1) по угловой переменной дважды, сначала с весом 1, а затем с весом  $\mu$ , то получится следующая система уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} U_\varepsilon \right) + \frac{\partial}{\partial q} (r^\nu S_\varepsilon) = \frac{c\kappa_{\varepsilon a}}{\rho} (U_{\varepsilon r} - U_\varepsilon); \quad (2)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} S_\varepsilon \right) + r^\nu \frac{\partial}{\partial q} (D_\varepsilon U_\varepsilon) + \frac{\nu}{2} \frac{3D_\varepsilon - 1}{\rho r} U_\varepsilon = -\frac{\kappa_{\varepsilon a} + \kappa_{\varepsilon s}}{c\rho} S_\varepsilon. \quad (3)$$

Здесь введены обозначения

$$U_\varepsilon = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 I_\varepsilon d\mu; \quad S_\varepsilon = \int_{-1}^1 \mu I_\varepsilon d\mu; \quad U_{\varepsilon r} = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 I_{\varepsilon r} d\mu; \quad D_\varepsilon = \frac{1}{cU_\varepsilon} \int_{-1}^1 \mu^2 I_\varepsilon d\mu.$$

Система уравнений (2), (3) является системой уравнений квазидиффузии. Следуя работе [5], запишем уравнение (3) в виде

$$\frac{r^\nu}{3} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial q} = -\frac{\kappa_{\varepsilon a} + \kappa_{\varepsilon s} + \kappa_{\varepsilon k}}{c\rho} S_\varepsilon, \quad (4)$$

где

$$\kappa_{\varepsilon k} = \frac{c\rho}{S_\varepsilon} \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{\rho} S_\varepsilon \right) + r^\nu \frac{\partial}{\partial q} \left[ \left( D_\varepsilon - \frac{1}{3} \right) U_\varepsilon \right] + \frac{3D_\varepsilon - 1}{\rho r} U_\varepsilon \right\}.$$

Если с помощью уравнения (4) исключить поток из уравнения (2), то получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} U_\varepsilon \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left[ r^\nu \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{r^\nu U_\varepsilon}{\kappa_{\varepsilon a} + \kappa_{\varepsilon s} + \kappa_{\varepsilon k}} \frac{c\rho}{3} \right) \right] = \frac{c\kappa_{\varepsilon a}}{\rho} (U_{\varepsilon r} - U_\varepsilon). \quad (5)$$

Уравнение (5) дополняется уравнением баланса энергии

$$\frac{\partial E(T)}{\partial t} = \frac{c}{\rho} \int_0^\infty \kappa_{\varepsilon a} (U_\varepsilon - U_{\varepsilon r}) d\varepsilon. \quad (6)$$

Если уравнение (5) проинтегрировать по всему спектру и сложить с уравнением (6), то получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( E(T) + \frac{1}{\rho} U \right) + \frac{\partial}{\partial q} (r^\nu S) = 0, \quad (7)$$

где  $U = \int_0^{\infty} U_{\varepsilon} d\varepsilon$ ;  $S = \int_0^{\infty} S_{\varepsilon} d\varepsilon$ .

### Алгоритм построения усредненного уравнения

Предлагается следующий подход к решению уравнения вида (7). Как и для квазидиффузии, он содержит два этапа. На первом при известной температуре решается кинетическое уравнение (1). Затем по вычисленным значениям параметра  $\kappa_{\varepsilon k}$  решается система уравнений (2), (4). На втором этапе рассчитывается уравнение (7) по алгоритму, изложенному ниже.

Запишем уравнение (5) в разностном виде. Для простоты изложения рассмотрим плоскую геометрию и равномерную сетку по пространству и времени, а также положим плотность среды равной единице. Тогда получим

$$\frac{U_{\varepsilon, i+1/2}^{n+1} - U_{\varepsilon, i+1/2}^n}{\tau} - \frac{c}{3h^2} \left[ L_{\varepsilon, i+1} U_{\varepsilon, i+3/2}^{n+1} - (L_{\varepsilon, i+1} + L_{\varepsilon, i}) U_{\varepsilon, i+1/2}^{n+1} + L_{\varepsilon, i} U_{\varepsilon, i-1/2}^{n+1} \right] + c\kappa_{\varepsilon a, i+1/2} U_{\varepsilon, i+1/2}^{n+1} = c\kappa_{\varepsilon a, i+1/2} U_{\varepsilon r, i+1/2}^{n+1}. \quad (8)$$

Здесь  $L_{\varepsilon} = (\kappa_{\varepsilon a} + \kappa_{\varepsilon s} + \kappa_{\varepsilon k})^{-1}$ . Если следовать подходу из работы [4] для случая выделения только диагонального элемента и брать значения величин  $U_{\varepsilon, i+3/2}^{n+1}$ ,  $U_{\varepsilon, i-1/2}^{n+1}$ , полученные из расчета на первом этапе, то можно выразить плотность энергии излучения  $U_{\varepsilon, i+1/2}^{n+1}$  через плотность энергии равновесного излучения  $U_{\varepsilon r, i+1/2}^{n+1}$  следующим образом:

$$U_{\varepsilon, i+1/2}^{n+1} = \alpha_{\varepsilon, i+1/2} U_{\varepsilon r, i+1/2}^{n+1} + \beta_{\varepsilon, i+1/2}, \quad (9)$$

где

$$\alpha_{\varepsilon, i+1/2} = \frac{c\kappa_{\varepsilon a}\tau}{1 + c\kappa_{\varepsilon a}\tau + \frac{c\tau}{3h^2} (L_{\varepsilon, i+1} + L_{\varepsilon, i})};$$

$$\beta_{\varepsilon, i+1/2} = \frac{\frac{c\tau}{3h^2} (L_{\varepsilon, i+1} U_{\varepsilon, i+3/2}^p + L_{\varepsilon, i} U_{\varepsilon, i-1/2}^p)}{1 + c\kappa_{\varepsilon a, i+1/2}\tau + \frac{c\tau}{3h^2} (L_{\varepsilon, i+1} + L_{\varepsilon, i})}. \quad (10)$$

Здесь верхний индекс  $p$  показывает, что значение величины взято из расчета на промежуточном этапе. Очевидно, что если  $\kappa_{\varepsilon a} + \kappa_{\varepsilon s} + \kappa_{\varepsilon k} \geq 0^1$ , то  $0 \leq \alpha_{\varepsilon, i+1/2} < 1$ ,  $\beta_{\varepsilon, i+1/2} > 0$ . Отметим, что коэффициент  $\alpha_{\varepsilon, i+1/2}$  является дробно-линейным функционалом, который по аналогии с коэффициентом квазидиффузии слабо зависит от получаемого решения, поэтому его можно брать явным образом. Напротив, коэффициент  $\beta_{\varepsilon, i+1/2}$  явно и линейно зависит от получаемого решения, поэтому брать его явным способом не представляется возможным.

Для разрешения данной проблемы воспользуемся подходом, который изложен в работе [4]. Запишем уравнение баланса энергии (6) в разностном виде, заменив плотность энергии излучения на выражение (9):

$$\frac{E(T_{i+1/2}^{n+1}) - E(T_{i+1/2}^n)}{\tau} = c \int_0^{\infty} \kappa_{\varepsilon a, i+1/2} \left[ (\alpha_{\varepsilon, i+1/2} - 1) U_{\varepsilon r}(T_{i+1/2}^{n+1}) - \beta_{\varepsilon, i+1/2} \right] d\varepsilon. \quad (11)$$

Запишем уравнение (11) в следующем виде, введя новую искомую функцию  $\beta_{i+1/2}^{n+1}$ :

$$\frac{E(T_{i+1/2}^{n+1}) - E(T_{i+1/2}^n)}{\tau} + c \langle \kappa(T_{i+1/2}^{n+1}) \rangle = c \langle \kappa \beta \rangle_{i+1/2} \beta_{i+1/2}^{n+1}. \quad (12)$$

<sup>1</sup>Следуя работе [5], не будем допускать отрицательного значения данного параметра.

Здесь введены обозначения

$$\langle \kappa (T_{i+1/2}^{n+1}) \rangle = \int_0^{\infty} \kappa_{\varepsilon a, i+1/2} \left[ (1 - \alpha_{\varepsilon, i+1/2}) U_{\varepsilon r} (T_{i+1/2}^{n+1}) \right] d\varepsilon; \quad (13)$$

$$\langle \kappa_{\beta} \rangle_{i+1/2} = \frac{\int_0^{\infty} \kappa_{\varepsilon a, i+1/2} \beta_{\varepsilon, i+1/2}^p d\varepsilon}{\int_0^{\infty} \beta_{\varepsilon, i+1/2}^p d\varepsilon}. \quad (14)$$

Отметим, что подынтегральное выражение в формуле (13) строго положительно, следовательно, величина  $\langle \kappa (T_{i+1/2}^{n+1}) \rangle$  будет положительна. Для расчета параметра  $\langle \kappa_{\beta} \rangle_{i+1/2}$  в формуле (14) воспользуемся следующим приемом. На промежуточном этапе решим систему уравнений (2), (4) при известной температуре. Далее по формуле (10) рассчитаем параметр  $\beta_{\varepsilon, i+1/2}$ , с которым вычислим выражение (14). Поскольку параметр  $\beta_{\varepsilon, i+1/2}$  положителен, следовательно, функция  $\langle \kappa_{\beta} \rangle_{i+1/2}$  также будет положительна. Из уравнения (12)  $\beta_{i+1/2}^{n+1}$  можно выразить следующим образом:

$$\beta_{i+1/2}^{n+1} = \frac{c\tau \langle \kappa (T_{i+1/2}^{n+1}) \rangle + E (T_{i+1/2}^{n+1}) - E (T_{i+1/2}^n)}{c\tau \langle \kappa_{\beta} \rangle_{i+1/2}}. \quad (15)$$

Далее проинтегрируем уравнения (4) по спектру с заменой плотности энергии излучения по формуле (9). В результате получим

$$\begin{aligned} S_i^{n+1} = & \int_0^{\infty} \left( L_{\varepsilon, i} \alpha_{\varepsilon, i+1/2} U_{\varepsilon r} (T_{i+1/2}^{n+1}) - L_{\varepsilon, i} \alpha_{\varepsilon, i-1/2} U_{\varepsilon r} (T_{i-1/2}^{n+1}) \right) d\varepsilon + \\ & + \int_0^{\infty} \left( L_{\varepsilon, i} \beta_{\varepsilon, i+1/2}^p - L_{\varepsilon, i} \beta_{\varepsilon, i-1/2}^p \right) d\varepsilon. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение (16) можно записать в следующем виде:

$$S_i^{n+1} = -\frac{cr^{\nu}}{3h} \langle L_{Tp, i} (T_{i+1/2}^{n+1}) \rangle - \langle L_{Tl, i} (T_{i-1/2}^{n+1}) \rangle + \langle L_{\beta p, i} \rangle \beta_{i+1/2}^{n+1} - \langle L_{\beta k, i} \rangle \beta_{i-1/2}^{n+1}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \langle L_{Tp, i} (T_{i+1/2}^{n+1}) \rangle &= \int_0^{\infty} L_{\varepsilon, i} \alpha_{\varepsilon, i+1/2} U_{\varepsilon r} (T_{i+1/2}^{n+1}) d\varepsilon; & \langle L_{Tl, i} (T_{i-1/2}^{n+1}) \rangle &= \int_0^{\infty} L_{\varepsilon, i} \alpha_{\varepsilon, i-1/2} U_{\varepsilon r} (T_{i-1/2}^{n+1}) d\varepsilon; \\ \langle L_{\beta p, i} \rangle &= \frac{\int_0^{\infty} L_{\varepsilon, i} \beta_{\varepsilon, i+1/2}^p d\varepsilon}{\int_0^{\infty} \beta_{\varepsilon, i+1/2}^p d\varepsilon}; & \langle L_{\beta l, i} \rangle &= \frac{\int_0^{\infty} L_{\varepsilon, i} \beta_{\varepsilon, i-1/2}^p d\varepsilon}{\int_0^{\infty} \beta_{\varepsilon, i-1/2}^p d\varepsilon}. \end{aligned}$$

С помощью выражения (15) можно исключить функцию  $\beta_{i+1/2}^{n+1}$  из уравнения (17). Тогда получим выражение для потока

$$S_i^{n+1} = -\frac{cr^{\nu}}{3h} \left( \chi_{i, i+1/2} (T_{i+1/2}^{n+1}) - \chi_{i, i-1/2} (T_{i-1/2}^{n+1}) \right). \quad (18)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}\chi_{i,i+1/2} &= \left\langle L_{Tp,i} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) \right\rangle + \left\langle L_{\beta p,i} \right\rangle \frac{c\tau \left\langle \kappa \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) \right\rangle + E \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) - E \left( T_{i+1/2}^n \right)}{c\tau \left\langle \kappa_{\beta} \right\rangle_{i+1/2}}; \\ \chi_{i,i-1/2} &= \left\langle L_{Tl,i} \left( T_{i-1/2}^{n+1} \right) \right\rangle + \left\langle L_{\beta l,i} \right\rangle \frac{c\tau \left\langle \kappa \left( T_{i-1/2}^{n+1} \right) \right\rangle + E \left( T_{i-1/2}^{n+1} \right) - E \left( T_{i-1/2}^n \right)}{c\tau \left\langle \kappa_{\beta} \right\rangle_{i-1/2}}.\end{aligned}\quad (19)$$

Разностный аналог уравнения (7) имеет следующий вид:

$$E \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) + \int_0^{\infty} \alpha_{\varepsilon,i+1/2} U_{\varepsilon r} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) d\varepsilon + \beta_{i+1/2}^{n+1} - E \left( T_{i+1/2}^n \right) - U_{i+1/2}^n + \frac{\tau}{h} \left( r_{i+1}^{\nu} S_{i+1}^{n+1} - r_i^{\nu} S_i^{n+1} \right) = 0. \quad (20)$$

Исключив функцию  $\beta_{i+1/2}^{n+1}$  из уравнения (20), с помощью (15) получим

$$\begin{aligned}E \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) + \int_0^{\infty} \alpha_{\varepsilon,i+1/2} U_{\varepsilon r} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) d\varepsilon + \frac{c\tau \left\langle \kappa \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) \right\rangle + E \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) - E \left( T_{i+1/2}^n \right)}{c\tau \left\langle \kappa_{\beta} \right\rangle_{i+1/2}} - \\ - E \left( T_{i+1/2}^n \right) - U_{i+1/2}^n + \frac{\tau}{h} \left( r_{i+1}^{\nu} S_{i+1}^{n+1} - r_i^{\nu} S_i^{n+1} \right) = 0.\end{aligned}\quad (21)$$

Окончательно система усредненных уравнений примет вид

$$\begin{aligned}\tilde{E} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) - \tilde{E} \left( T_{i+1/2}^n \right) + \frac{\tau}{h} \left( r_{i+1}^{\nu} S_{i+1}^{n+1} - r_i^{\nu} S_i^{n+1} \right) = 0; \\ S_i^{n+1} = \frac{c r_i^{\nu}}{3h} l_{r,i} \left( T_{i+1/2}^{n+1} - T_{i-1/2}^{n+1} \right).\end{aligned}\quad (22)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\tilde{E} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) = E \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) + \int_0^{\infty} \alpha_{\varepsilon,i+1/2} U_{\varepsilon r} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) d\varepsilon + \frac{c\tau \left\langle \kappa \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) \right\rangle + E \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) - E \left( T_{i+1/2}^n \right)}{c\tau \left\langle \kappa_{\beta} \right\rangle_{i+1/2}}; \\ l_{r,i} = \frac{\chi_{i,i+1/2} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) - \chi_{i,i-1/2} \left( T_{i-1/2}^{n+1} \right)}{T_{i+1/2}^{n+1} - T_{i-1/2}^{n+1}}.\end{aligned}\quad (23)$$

Отметим, что плотность энергии излучения  $\tilde{E} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right)$  в выражении (23) является функцией температуры. Таким образом, уравнение (22) имеет вид уравнения для приближения лучистой теплопроводности.

Уравнение (22) дополняется начальными и граничными условиями. Вид начальных условий не существен. Для согласованности граничных условий в кинетическом и рассматриваемом подходах воспользуемся приемом из работы [6].

Запишем поток на левой границе в виде двух слагаемых:

$$S_{\varepsilon} = \int_0^1 \mu I_{\varepsilon} d\mu + \int_{-1}^0 \mu I_{\varepsilon} d\mu. \quad (24)$$

Первое слагаемое полностью определяется заданной граничной интенсивностью излучения, второе запишем в виде дроби. Тогда выражение (24) примет вид

$$S_{\varepsilon} = a_{\varepsilon} U_{\varepsilon} + b_{\varepsilon}, \quad (25)$$

$$\text{где } a_\varepsilon = \frac{\int_{-1}^0 \mu I_\varepsilon d\mu}{\frac{1}{c} \int_{-1}^1 I_\varepsilon d\mu}; \quad b_\varepsilon = \int_0^1 \mu I_\varepsilon d\mu.$$

Подставив соотношение (9) в формулу (25) и выполнив интегрирование по спектру, получим

$$S_0^{n+1} = \int_0^\infty a_\varepsilon \alpha_{\varepsilon,1/2} U_{\varepsilon r} \left( T_{1/2}^{n+1} \right) d\varepsilon + \langle a_\beta \rangle \beta_{1/2}^{n+1} + b, \quad (26)$$

$$\text{где } \langle a_\beta \rangle = \frac{\int_0^\infty a_\varepsilon \beta_{1/2}^p d\varepsilon}{\int_0^\infty \beta_{1/2}^p d\varepsilon}; \quad b = \int_0^\infty b_\varepsilon d\varepsilon.$$

При помощи уравнения (15) исключим функцию  $\beta_{i+1/2}^{n+1}$  из выражения (26). Получим следующее соотношение:

$$S_0^{n+1} = A_0 \left( T_{1/2}^{n+1} \right) + b, \quad (27)$$

$$\text{где } A \left( T_{1/2}^{n+1} \right) = \int_0^\infty a_\varepsilon \alpha_{\varepsilon,1/2} U_{\varepsilon r} \left( T_{1/2}^{n+1} \right) d\varepsilon + \langle a_\beta \rangle \frac{c\tau \langle \kappa \left( T_{1/2}^{n+1} \right) \rangle + E \left( T_{1/2}^{n+1} \right) - E \left( T_{1/2}^n \right)}{c\tau \langle \kappa_\beta \rangle_{1/2}}.$$

Первый член в правой части выражения (27) является функцией температуры, а второй полностью определяется граничным условием.

На правой границе согласование граничных условий происходит аналогично.

Таким образом, данный подход можно использовать в программных комплексах, в которых имеется решатель уравнения теплопроводности. При этом требуется только специальным образом рассчитывать плотность энергии и пробег излучения, в остальном никаких существенных доработок в существующем коде не требуется.

### Исследование предельных случаев

Рассмотрим первый случай, когда  $\kappa_{\varepsilon a, i+1/2} \rightarrow \infty$ . В этом случае  $\alpha_{\varepsilon, i+1/2} \rightarrow \frac{c\tau \kappa_{\varepsilon a, i+1/2}}{1 + c\tau \kappa_{\varepsilon a, i+1/2}} \rightarrow 1$ , а

$$\beta_{\varepsilon, i+1/2} \rightarrow \frac{1}{3h^2 \kappa_{\varepsilon a, i+1/2}^2} \rightarrow 0. \quad \text{Тогда из выражения (14) следует}$$

$$\langle \kappa_\beta \rangle_{i+1/2} \rightarrow \frac{\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\kappa_{\varepsilon a, i+1/2}}}{\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\kappa_{\varepsilon a, i+1/2}^2}} \rightarrow \infty,$$

а выражение (13) переходит в

$$\langle \kappa \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) \rangle \rightarrow \int_0^\infty \kappa_{\varepsilon a, i+1/2} \left[ \left( 1 - \frac{c\tau \kappa_{\varepsilon a, i+1/2}}{1 + c\tau \kappa_{\varepsilon a, i+1/2}} \right) U_{\varepsilon r} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) \right] d\varepsilon \rightarrow \frac{1}{c\tau} \sigma \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right)^4.$$

В этом случае из уравнения (15) следует, что  $\beta_{i+1/2}^{n+1} \rightarrow 0$ . Выражения в формулах (19) при этом примут вид

$$\chi_{i, i+1/2} = \left\langle L_{T_p, i} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) \right\rangle = \int_0^\infty L_{\varepsilon, i} U_{\varepsilon r} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) d\varepsilon;$$

$$\chi_{i,i-1/2} = \langle L_{Tl,i} (T_{i-1/2}^{n+1}) \rangle = \int_0^{\infty} L_{\varepsilon,i} U_{\varepsilon r} (T_{i-1/2}^{n+1}) d\varepsilon.$$

Уравнение (18) можно записать в виде

$$S_i^{n+1} = -\frac{cr_i^\nu}{3h} \frac{\langle L_{Tp,i} (T_{i+1/2}^{n+1}) \rangle - \langle L_{Tl,i} (T_{i-1/2}^{n+1}) \rangle}{T_{i+1/2}^{n+1} - T_{i-1/2}^{n+1}} (T_{i+1/2}^{n+1} - T_{i-1/2}^{n+1}).$$

Величина  $\frac{\langle L_{Tp,i} (T_{i+1/2}^{n+1}) \rangle - \langle L_{Tl,i} (T_{i-1/2}^{n+1}) \rangle}{T_{i+1/2}^{n+1} - T_{i-1/2}^{n+1}}$  есть не что иное, как разностный аналог усреднения спектрального пробега по Росселанду. Уравнение (21) в этом случае можно записать в виде

$$E (T_{i+1/2}^{n+1}) + \sigma (T_{i+1/2}^{n+1})^4 - E (T_{i+1/2}^n) - \sigma (T_{i+1/2}^n)^4 + \frac{\tau}{h} (r_{i+1}^\nu S_{i+1}^{n+1} - r_i^\nu S_i^{n+1}) = 0. \quad (28)$$

Уравнение (28) приобретает вид классического уравнения для приближения лучистой теплопроводности. Данный предельный случай соответствует условию его применимости. Граничное условие (27) на левой границе в этом случае примет вид  $S_0^{n+1} = \int_0^{\infty} a_\varepsilon U_{\varepsilon r} (T_{1/2}^{n+1}) d\varepsilon + b$ .

Рассмотрим второй случай, когда  $\kappa_{\varepsilon a, i+1/2} \rightarrow 0$ . В этом случае  $\alpha_{\varepsilon, i+1/2} \rightarrow h^2 \kappa_{\varepsilon, i+1/2}^2 \rightarrow 0$ ,  $\beta_{\varepsilon, i+1/2} = \frac{L_{\varepsilon, i+1} U_{\varepsilon, i+3/1}^p + L_{\varepsilon, i} U_{\varepsilon, i-1/1}^p}{L_{\varepsilon, i+1} + L_{\varepsilon, i}}$ . Тогда из выражения (14) следует

$$\langle \kappa \beta \rangle_{i+1/2} = \frac{\int_0^{\infty} \kappa_{\varepsilon a, i+1/2} \beta_{\varepsilon, i+1/2} d\varepsilon}{\int_0^{\infty} \beta_{\varepsilon, i+1/2} d\varepsilon} \rightarrow 0,$$

а выражение (13) переходит в

$$\langle \kappa (T_{i+1/2}^{n+1}) \rangle = \int_0^{\infty} \kappa_{\varepsilon a, i+1/2} [(\alpha_{\varepsilon, i+1/2} - 1) U_{\varepsilon r} (T_{i+1/2}^{n+1})] d\varepsilon \rightarrow 0.$$

Следовательно, уравнение (12) примет вид

$$\frac{E (T_{i+1/2}^{n+1}) - E (T_{i+1/2}^n)}{\tau} = 0. \quad (29)$$

Уравнение (29) отвечает случаю, когда нет взаимодействия излучения и вещества.

Обратим внимание на выражение  $\frac{c\tau \langle \kappa (T_{i+1/2}^{n+1}) \rangle + E (T_{i+1/2}^{n+1}) - E (T_{i+1/2}^n)}{c\tau \langle \kappa \beta \rangle}$ , которое присутствует во многих формулах. В рассматриваемом предельном случае при расчете данного выражения возникает неопределенность типа  $\frac{0}{0}$ . Для выхода из данной ситуации будем ограничивать снизу безразмерное выражение  $c\tau \langle \kappa \beta \rangle$ <sup>2</sup> некоторой достаточно малой константой, которая подбирается экспериментально. В приведенном далее расчете данная константа полагалась равной  $10^{-5}$ .

<sup>2</sup> Данное выражение характеризует скорость обмена энергией между излучением и веществом. Если вместо нуля подставить малое значение, то, очевидно, получаемое решение немного исказится.

### Линеаризация разностных уравнений

Для применения метода Ньютона к системе уравнений (22) разложим все нелинейные члены в ряд Тейлора с точностью до членов первого порядка:

$$\begin{aligned} \tilde{E}(T_{i+1/2}^{n+1}) + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial T} \Delta T_{i+1/2}^{s+1} - \tilde{E}(T_{i+1/2}^n) + \frac{\tau}{h} [r_{i+1}^\nu (S_{i+1}^s + \Delta S_{i+1}^{s+1}) - r_i^\nu (S_i^s + \Delta S_i^{s+1})] = 0; \\ S_i^s + \Delta S_i^{s+1} = -\frac{cr_i^\nu}{3h} \left\{ l_{r,i}(T_{i+1/2}^s, T_{i-1/2}^s) (T_{i+1/2}^s - T_{i-1/2}^s) + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\partial l_{r,i}(T_{i+1/2}^s, T_{i-1/2}^s)}{\partial T_{i+1/2}} (T_{i+1/2}^s - T_{i-1/2}^s) + l_{r,i}(T_{i+1/2}^s, T_{i-1/2}^s) \right] \Delta T_{i+1/2}^{s+1} - \right. \\ \left. - \left[ \frac{\partial l_{r,i}(T_{i+1/2}^s, T_{i-1/2}^s)}{\partial T_{i-1/2}} (T_{i+1/2}^s - T_{i-1/2}^s) - l_{r,i}(T_{i+1/2}^s, T_{i-1/2}^s) \right] \Delta T_{i-1/2}^{s+1} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь  $s$  — номер ньютоновской итерации;  $\Delta T_{i+1/2}^{s+1} = T_{i+1/2}^{s+1} - T_{i+1/2}^s$ ;  $\Delta S_i^{s+1} = S_i^{s+1} - S_i^s$ .

Линеаризованная система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} A_{i+1/2} \Delta T_{i+1/2}^{s+1} + B_{i+1/2} \Delta S_{i+1}^{s+1} - C_{i+1/2} \Delta S_i^{s+1} &= D_{i+1/2}; \\ \Delta S_i^{s+1} &= -P_i \Delta T_{i+1/2}^{s+1} - H_i \Delta T_{i-1/2}^{s+1} - F_i. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{i+1/2} &= \left( \frac{\partial \tilde{E}}{\partial T} \right)_{i+1/2}^s; \quad B_{i+1/2} = \frac{\tau}{h} r_{i+1}^\nu; \quad C_{i+1/2} = \frac{\tau}{h} r_i^\nu; \quad D_{i+1/2} = \tilde{E}_{i+1/2}^n - \tilde{E}_{i+1/2}^s - \frac{\tau}{h} (S_{i+1}^s - S_i^s); \\ P_i &= -\frac{cr_i^\nu}{3h} \left( \frac{\partial l_{r,i}}{\partial T_{i+1/2}} + l_{r,i} \right); \quad H_i = \frac{cr_i^\nu}{3h} \left( \frac{\partial l_{r,i}}{\partial T_{i-1/2}} - l_{r,i} \right); \quad F_i = S_i^s + \frac{cr_i^\nu}{3h} (T_{i+1/2}^s - T_{i-1/2}^s). \end{aligned}$$

Система линейных уравнений (30) дополняется уравнениями для граничных условий на правой и левой границах следующего вида:

$$\Delta S_N^{s+1} = K_N \Delta T_{N-1/2}^{s+1} + M_N; \quad \Delta S_0^{s+1} = K_0 \Delta T_{1/2}^{s+1} + M_0, \quad (31)$$

где  $K_N = \frac{\partial A_N}{\partial T_{N-1/2}}$ ;  $M_N = A_N (T_{N-1/2}^s) - S_N^s$ ;  $K_0 = \frac{\partial A_0}{\partial T_{1/2}}$ ;  $M_0 = A_0 (T_{1/2}^s) - S_0^s$ .

Система уравнений (30), (31) содержит  $2N+1$  уравнение, где  $N$  — число интервалов относительно неизвестных  $T, S$ . Перенумеруем их следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & 2N & 2N+1 \\ S_0, & T_{1/2}, & S_1, & \dots & T_{N-1/2}, & S_N \end{array}$$

Полученная система уравнений решается методом Гаусса для трехдиагональной матрицы.



## Примеры численных расчетов

В качестве примера рассмотрим решение второй задачи Флека из работы [7] с использованием описанного подхода.

Постановка задачи следующая. На поверхности плоского слоя толщиной 4 см задан изотропный планковский источник излучения с температурой 1 кэВ. Слой состоит из трех физических областей:  $x \in \{0; 2\}$  — первая;  $x \in \{2; 2,4\}$  — вторая;  $x \in \{2,4; 4\}$  — третья<sup>3</sup>. Коэффициент поглощения вычисляется по формуле  $\kappa_\varepsilon = \kappa_0 \frac{1 - \exp(-\varepsilon/T)}{\varepsilon^3}$ ;  $\kappa_0 = 27$  в первой и третьей областях,  $\kappa_0 = 10\,000$  во второй области. Уравнение состояния вещества взято в виде  $E = 0,81T$ .

Пространственная сетка — неравномерная в каждой области и имеет вид  $x_0 = 0; 0,004; 0,04; x_3 = 0,1; \dots; x_{21} = 1,9$  (18 интервалов,  $h = 0,1$  см);  $x_{22} = 1,987; 1,999; 2; 2,001; 2,004; 2,013; x_{28} = 2,04; \dots; x_{36} = 2,36$  (8 интервалов,  $h = 0,04$  см);  $x_{37} = 2,396; 2,4; 2,404; 2,44; x_{41} = 2,5; \dots; x_{56} = 4$  (15 интервалов,  $h = 0,1$  см). Число интервалов в первой, второй и третьей областях равно 24, 14, 18 соответственно, итого 56 интервалов по пространству. Сетка по  $\mu$  задавалась равномерной с 16 интервалами. Сетка по спектру состояла из 28 групп:  $\{\varepsilon\} = 0,0001; 0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,1; 0,15; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,7; 1,0; 1,4; 1,8; 2,2; 2,6; 3,0; 3,5; 4,0; 4,5; 5,0; 5,5; 6,0; 7,0; 8,0; 10,0; 12,0; 15,0$ .

Задача рассчитывалась с постоянным шагом по времени  $\tau = 10^{-4}$  с. Результаты расчета данной задачи представлены на рис. 1, 2. За *точное* принято решение, полученное в спектральной квазидиффузионной постановке.

Как видно из рисунков, решение, полученное в постановке лучистой теплопроводности с учетом спектральных и кинетических эффектов, не только качественно, но и количественно близко к профилю температуры вещества, рассчитанному в классической спектральной квазидиффузионной постановке. Количественное отличие по температуре вещества в норме  $L_2$  на момент времени  $ct = 9$  см составляет 0,14%. Отметим, что с использованием классического приближения лучистой теплопроводности получить профиль температуры с нарушением принципа максимума теоретически невозможно.

Время расчета данной задачи в классической спектральной квазидиффузионной постановке составило 34 с, с использованием предлагаемого подхода — 24 с. Как видно, экономия не очень большая. Это объясняется тем, что на этапе лучистой теплопроводности приходится в каждой пространственной точке рассчитывать несколько интегралов по спектру, что приводит к удорожанию счета.

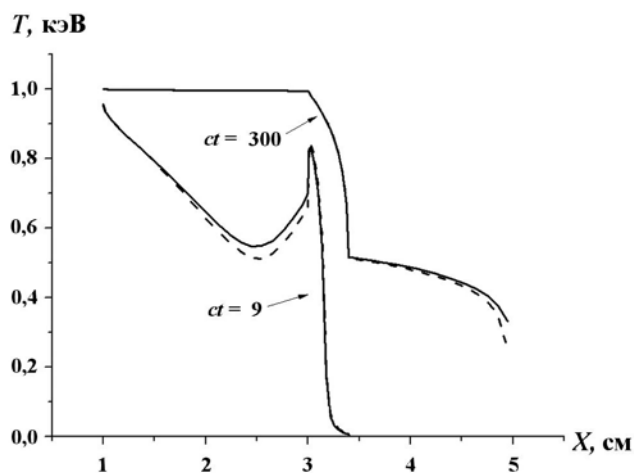


Рис. 1. Профиль температуры вещества на моменты времени  $ct = 9$  и 300 см: — — расчет в классической квазидиффузионной постановке; - - - — расчет по предлагаемому методу

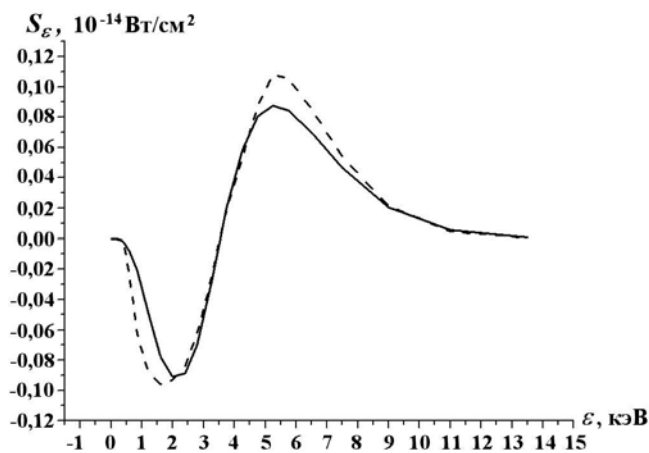


Рис. 2. Интегральные по времени спектральные потоки излучения на границе первой и второй областей на момент времени  $ct = 9$  см: — — расчет в классической квазидиффузионной постановке; - - - — расчет по предлагаемому методу

<sup>3</sup>Здесь и далее значения  $x$  даны в сантиметрах.

### Заключение

Учет спектральных и кинетических эффектов в постановке лучистой теплопроводности позволяет рассчитывать задачи переноса излучения с приемлемой точностью. Существенно сократить время счета, используя усреднение исходных уравнений по спектральной переменной, не удалось, поскольку на этапе лучистой теплопроводности приходится считать в каждом пространственном интервале несколько интегралов по спектру. Зато удалось сократить число итераций по нелинейности температуры, что позволило считать задачи с более крупным временным шагом.

Очевидно, что построение итерационного процесса по нелинейности по температуре для кинетического уравнения является чрезвычайно сложной задачей. Для уравнения типа теплопроводности данная задача существенно упрощается. В этом случае легко строится ньютоновский итерационный процесс, который обладает высокой скоростью сходимости. Как показала практика расчетов больших задач с числом групп по спектру больше 400, можно получить выигрыш по времени до 4 раз за счет более крупного шага по времени при отличии в решении  $\sim 1\text{--}2\%$  в сравнении с расчетом в полной кинетической постановке.

### Список литературы

1. *Гольдин В. Я.* Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1964. Т. 4, № 6. С. 1078—1087.  
*Goldin V. Ya.* Kvazidifuzionny metod resheniya kineticheskogo uravneniya // Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz. 1964. T. 4, № 6. S. 1078—1087.
2. *Немчинов И. В.* Об усредненных уравнениях переноса излучения и их использование при решении газодинамических задач // ПММ. 1970. Т. 34, № 4. С. 706—721.  
*Nemchinov I. V.* Ob usrednennykh uravneniyakh perenosa izlucheniya i ikh ispolzovanie pri reshenii gasodinamicheskikh zadach // PMM. 1970. T. 34, № 4. S. 706—721.
3. *Филippyчев Д. С., Четверушкин В. Н.* Об одном способе усреднения уравнений диффузионного типа по энергиям фотонов // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1976. Т. 6, № 6. С. 1601—1605.  
*Filippychev D. S., Chetverushkin V. N.* Ob odnom sposobe usredneniya uravneniy diffuzionnogo tipa po energiyam fotonov // Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz. 1976. T. 6, № 6. S. 1601—1605.
4. *Карлыханов Н. Г.* Метод расчета задач переноса излучения, с использованием усредненных по спектру уравнений // Там же. 1997. Т. 37, № 4. С. 494—498.  
*Karlykhanov N. G.* Metod rascheta zadach perenosa izlucheniya, s ispolzovaniem usrednennykh po spektru uravneniy // Tam zhe. 1997. T. 37, № 4. S. 494—498.
5. *Карлыханов Н. Г., Козманов М. Ю.* Учет кинетических эффектов в диффузионном приближении для расчета переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2010. Вып. 4. С. 3—9.  
*Karlykhanov N. G., Kozmanov M. Yu.* Uchet kineticheskikh effektiv v diffuzionnom priblizhenii dlya rascheta perenosa izlucheniya // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2010. Vyp. 4. S. 3—9.
6. *Карлыханов Н. Г.* Применение метода квазидиффузии для решения задач переноса излучения // Там же. Вып. 1. С. 32—38.  
*Karlykhanov N. G.* Primenenie metoda kvazidiffuzii dlya resheniya zadach perenosa izlucheniya // Tam zhe. Vyp. 1. S. 32—38.
7. *Fleck J. F., Cummings Jr. and J. D.* An implicit Monte Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8. P. 313—342.

INCORPORATING SPECTRAL AND KINETIC EFFECTS IN THE RADIATIVE HEAT TRANSFER APPROXIMATION FOR RADIATIVE TRANSFER SIMULATIONS / N. G. Karlykhanov (FSUE “RFNC-VNIITF n.a. Academician E.I. Zababakhin”, Snezhinsk, Chelyabinsk region).

The paper considers an approach to averaging the radiative transfer equation over spectrum and angular variable. As distinct from the known methods, the algorithm under consideration reduces an averaged problem to an equation for the radiative heat transfer approximation. It is demonstrated that the simulation results obtained using the proposed algorithm – provided that some conditions are satisfied – are close to the simulation results obtained in the kinetic statement. As applied to optically thick media, this algorithm is shown to naturally transform into the radiative heat transfer approximation with a mean Rosseland path.

*Keywords:* heat transfer, quasi-diffusion, quasi-spectral property.

---