

ISSN 2414-0171

**В**ОПРОСЫ  
**А**ТОМНОЙ  
**Н**АУКИ И  
**Т**ЕХНИКИ

Российский  
федеральный  
ядерный  
центр –  
ВНИИЭФ

---

СЕРИЯ

**Математическое моделирование  
физических процессов**

---

**2019**

ВЫПУСК 4

Главный редактор  
Шагалиев Р. М.

Заместители главного редактора:  
Алексеев А. В., Тишкин В. Ф.

Ответственный секретарь:  
Соколовская Е. В.

Члены редколлегии:

Бартенев Ю. Г., Бетелин В. Б., Бочков А. И., Вронский М. А.,  
Дрёмов В. В., Залялов Н. Н., Иванов Н. В., Кибзун А. И.,  
Козелков А. С., Козманов М. Ю., Куркин А. А., Петров И. Б.,  
Прилуцкий М. Х., Смирнов Н. Н., Соколов С. С., Старостин Н. В.,  
Степаненко С. А., Храмченков М. Г., Четверушкин Б. Н.,  
Шестаков А. А., Янилкин Ю. В.

Адрес редакции и издателя: 607188,  
г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37  
тел. (83130)28406, *e-mail*: sokol@vniief.ru.  
Адрес сайта журнала <http://vant.vniief.ru/>

---

# ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

## Математическое моделирование физических процессов

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

---

ВЫПУСК 4

Саров — 2019

Издается с 1978 г.

---

### СОДЕРЖАНИЕ

<i>Соболев И. В.</i> Метод решения многомерных задач электродинамики на неструктурированных сетках . . . . .	3
<i>Карлыханов Н. Г.</i> Учет спектральных и кинетических эффектов в приближении лучистой теплопроводности для расчета задач переноса излучения . . . . .	21
<i>Величко О. М.</i> Применение релаксационной модели вязкоупругости с трещинами для описания опытов с образцами ВВ на установке составных стержней Гопкинсона . . . . .	32
<i>Дерюгин Ю. Н., Машенькин П. А.</i> Решение задач однофазной фильтрации с использованием многосеточного решателя СЛАУ . . . . .	51
<i>Бартенев Ю. Г., Карпов А. П.</i> Многократное использование многоуровневой структуры данных в алгебраическом многосеточном решателе СЛАУ . . . . .	66
<i>Блохин А. И., Блохин П. А., Ванеев Ю. Е., Сипачёв И. В.</i> Программный комплекс КОРИДА для прогнозирования радиационных полей с учетом изменений характеристик источников излучения и инженерных барьеров безопасности . . . . .	78
<i>Коваленко О. В., Крючков И. А., Огородников А. В., Ежов Д. В., Собанин Д. С.</i> Возможности визуализационно-интеграционной платформы ОпТИМУС для имитационного моделирования вооружений, военной и специальной техники . . . . .	88
Сведения об авторах . . . . .	96
Перечень статей, опубликованных в 2019 г. в научно-техническом сборнике "Вопросы атомной науки и техники". Сер. "Математическое моделирование физических процессов" . . . . .	98

## C O N T E N T S

<i>Sobolev I. V.</i> A method for multi-dimensional electrodynamic simulations on unstructured meshes . . . . .	3
<i>Karlykhanov N. G.</i> Incorporating spectral and kinetic effects in the radiative heat transfer approximation for radiative transfer simulations . . . . .	21
<i>Velichko O. M.</i> Application of a relaxation model of fractured viscoelasticity for the description of high-explosive specimen testing using a split-Hopkinson pressure bar . . . . .	32
<i>Deryugin Yu. N., Mashenkin P. A.</i> Single-phase flow simulations using an algebraic multigrid solver for systems of linear algebraic equations . . . . .	51
<i>Bartenev Yu. G., Karpov A. P.</i> Repeated use of a hierarchical data structure in an algebraic multigrid solver for systems of linear algebraic equations . . . . .	66
<i>Blokhin A. I., Blokhin P. A., Vaneev Yu. E., Sipachev I. V.</i> CORIDA: a program package for predicting radiation fields based on the variations in the properties of radiation sources and engineering security barriers . . . . .	78
<i>Kovalenko O. V., Kryuchkov I. A., Ogorodnikov A. V., Ezhov D. V., Sobanin D. S.</i> Functionality of the OptIMUS visualization and integration platform for simulations of weapons and military and special-purpose equipment . . . . .	88
Information about authors . . . . .	97
The list of papers published in the sci-tech collected edition "Voprosy atomnoi nauki i tekhniki". Ser. "Matematicheskoe Modelirovanie Fizicheskikh Protseessov" during 2019 . . . . .	98

Ответственный за выпуск Е. В. Соколовская

Редактор Е. Н. Старченко	Корректоры Н. Ю. Костюничева Т. А. Меркушева Е. А. Окадьева А. В. Федоренко
--------------------------	--

Подписано в печать 20.11.2019	Формат 60×84/8
Усл. печ. л. ~ 12	Уч.-изд. л. ~ 15
Тираж 1000 экз.	Зак.тип. 1843-2019
	7 статей

Учредитель: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ"  
 Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-29789 от 04 октября 2007 г.  
 выдано Роскомнадзором

Оригинал-макет подготовлен  
 в Математическом отделении ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ"  
 Отпечатано в ИПЦ ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ"  
 607188, г. Саров Нижегородской обл., ул. Силкина, 23

УДК 519.633.6

## МЕТОД РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

И. В. Соболев

(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Описано численное решение уравнений электродинамики на неструктурированных многогранных сетках методом типа Годунова второго порядка. Для уравнений идеальной магнитной газовой динамики применяются три разностные схемы, основанные на приближенном решении задачи о распаде разрыва. Рассмотрено также исключение численного магнитного заряда методом СТ. Разностная схема для уравнений Максвелла использует точное решение задачи Римана. Приводятся тестовые расчеты и их сравнение с опубликованными данными.

*Ключевые слова:* уравнения идеальной магнитной газовой динамики, уравнения Максвелла, метод Годунова, неструктурированные сетки.

### Введение

Уравнения электродинамики широко используются в фундаментальных и прикладных научных исследованиях. В последние десятилетия интенсивно развиваются конечно-разностные методы решения этих уравнений. Первоначально разностные схемы использовали ортогональные матричные сетки, но в дальнейшем появилась необходимость расчетов задач в областях сложной формы. Наиболее универсальные численные методы получаются введением в счетной области неструктурированной сетки и применением метода конечных объемов.

Одним из наиболее распространенных методов численного решения гиперболических уравнений математической физики является метод Годунова [1]. В настоящей работе рассмотрено применение данного метода к уравнениям идеальной магнитной газовой динамики (МГД) и уравнениям Максвелла.

Разностные схемы идеальной МГД, встречающиеся в литературе, можно разделить на две группы. К первой относится схема Хартена—Лакса—ван Лира (HLL) и ее различные обобщения [1–3], ко второй — схемы типа Рунге [1, 2, 4]. Важной составной частью любой численной МГД-методики является процедура сохранения соленидальности магнитного поля. Методы исключения численного магнитного заряда описаны в работах [1, 4–12]. Решение уравнений Максвелла методом Годунова рассмотрено в статьях [13, 14].

В данной статье представлена практическая реализация методов и алгоритмов, опубликованных в работах [1–14]. Приводятся расчеты на сходимость и сравнение различных разностных схем на примере тестовых задач.

### 1. Метод второго порядка типа Годунова

**1.1. Общая схема.** В настоящей работе применяется разностная схема MUSCL [1, 15], которая имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространству, использует кусочно-линейную реконструкцию величин в ячейках и двухшаговый пересчет по времени.

Пусть имеется гиперболическая система уравнений вида

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(\vec{U})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}(\vec{U})}{\partial y} + \frac{\partial \vec{H}(\vec{U})}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

где  $\vec{U} = (u_1, \dots, u_n)^T$  — вектор консервативных переменных. Предположим, что счетная область заполнена сеткой, состоящей из ячеек, которые представляют собой произвольные несамопересекающиеся многогранники.

Решение уравнений (1) состоит из следующих трех этапов:

1. Построение кусочно-линейной реконструкции.
2. Продвижение на полшага вперед по времени.
3. Вычисление потоков вектора  $\vec{U}$  через грани ячеек.

Пусть в каждой ячейке  $C_i$  с центром  $(x_i^0, y_i^0, z_i^0)$  задан вектор  $\vec{U}_i^0$ . Построим линейную реконструкцию  $\vec{U}_i(x, y, z) = \vec{U}_i^0 + \vec{\alpha}_i(x - x_i^0) + \vec{\beta}_i(y - y_i^0) + \vec{\gamma}_i(z - z_i^0)$ . Вычисление коэффициентов  $\vec{\alpha}_i, \vec{\beta}_i, \vec{\gamma}_i$  более подробно описано в подразд. 1.2.

Пусть грань  $F_j$  разделяет ячейки  $C_i$  и  $C_k$ , а ее центр имеет координаты  $x_j, y_j, z_j$ . Обозначим  $\vec{U}_{j,i} = \vec{U}_i(x_j, y_j, z_j)$ ,  $\vec{U}_{j,k} = \vec{U}_k(x_j, y_j, z_j)$ .

Пусть ячейка  $C_i$  имеет грани  $F_{j_1}, \dots, F_{j_N}$ , а ее объем равен  $V_i$ ;  $\vec{S}_{j_k} = (S_{j_k}^x, S_{j_k}^y, S_{j_k}^z) = \int_{F_{j_k}} \vec{n}_k dS$ ,

где  $\vec{n}_k$  — единичная нормаль к грани  $F_{j_k}$ , направленная наружу от ячейки  $C_i$ .

На втором этапе (продвижение на полшага вперед по времени) решаются разностные уравнения

$$V_i \frac{\vec{U}_{j_k,i}^* - \vec{U}_{j_k,i}}{\tau/2} + \sum_{l=1}^N \left( \vec{F}(\vec{U}_{j_l,i}) S_{j_l}^x + \vec{G}(\vec{U}_{j_l,i}) S_{j_l}^y + \vec{H}(\vec{U}_{j_l,i}) S_{j_l}^z \right) = 0.$$

Пусть  $\vec{n}_j$  — вектор единичной нормали к  $F_j$ , направленный из ячейки  $C_i$  в ячейку  $C_k$ . Дополним вектор  $\vec{n}_j$  до ортонормированного базиса  $(\vec{n}_j, \vec{t}_j, \vec{s}_j)$  и образуем матрицу

$$T_j = \begin{pmatrix} n_j^x & n_j^y & n_j^z \\ t_j^x & t_j^y & t_j^z \\ s_j^x & s_j^y & s_j^z \end{pmatrix}.$$

Пусть вектор  $\vec{U}_i$  имеет вид  $\vec{U}_i = (u_i^1, \dots, u_i^a, u_i^{a+1}, u_i^{a+2}, u_i^{a+3}, \dots, u_i^{a+3b-2}, u_i^{a+3b-1}, u_i^{a+3b})$ , где величины  $u_i^1, \dots, u_i^a$  являются скалярными функциями, а величины  $u_i^{a+1}, u_i^{a+2}, u_i^{a+3}, \dots, u_i^{a+3b-2}, u_i^{a+3b-1}, u_i^{a+3b}$  — компоненты трехмерных векторов;  $0 \leq a \leq n$ ;  $a + 3b = n$ . Воспользуемся инвариантностью уравнений (1) относительно вращений в пространстве, чтобы свести вычисление потоков через грани к одномерному случаю ([15], гл. 16). Для получения нормальных и тангенциальных компонент векторов  $(u_i^{a+3k-2}, u_i^{a+3k-1}, u_i^{a+3k})$  рассмотрим блочно-диагональную матрицу

$$M_j = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & & & & & & & \\ a \left\{ \begin{matrix} \dots & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \end{matrix} \right. & & & & & & & \\ & & & & b \left\{ \begin{matrix} T_j & & & & & & & & \\ & & & \dots & & & & & \\ & & & & & & & & T_j \end{matrix} \right. & & & & & & & \end{matrix} \end{pmatrix}$$

и векторы  $\vec{U}_j^L = M_j \vec{U}_{i,j}^*$ ,  $\vec{U}_j^R = M_j \vec{U}_{k,j}^*$ . Различные методы вычисления потока через грань  $F_j$  используют точные или приближенные решения одномерной задачи Римана с начальными условиями  $\vec{U}_j^L$  и  $\vec{U}_j^R$ . Пусть  $\vec{\Phi}_j(\vec{U}_j^L, \vec{U}_j^R)$  — поток, полученный по какому-либо из известных алгоритмов. Разностная схема для решения уравнений (1) имеет вид

$$\frac{\vec{U}_i^{n+1} - \vec{U}_i^n}{\tau} = -\frac{1}{V_i} \sum_{k=1}^N S(F_{jk}) M_{jk}^{-1} \vec{\Phi}_{jk}, \quad (2)$$

где  $S(F_{jk})$  — площадь грани  $F_{jk}$ .

**1.2. Кусочно-линейная реконструкция и ограничители.** Пусть имеется трехмерная счетная сетка, состоящая из произвольных многогранников, причем в центре каждой ячейки  $C_i$  задана функция  $u_i^0$ , которая постоянна внутри  $C_i$ . Для построения разностных схем второго порядка аппроксимации кусочно-постоянные функции  $u_i^0$  заменяются на кусочно-линейные  $u_i(x, y, z) = u_i^0 + \alpha_i(x - x_i^0) + \beta_i(y - y_i^0) + \gamma_i(z - z_i^0)$ , где  $x_i^0, y_i^0, z_i^0$  — координаты центра ячейки  $C_i$  [1]. Коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  определяются методом наименьших квадратов.

Пусть ячейка  $C_i$  соседствует с ячейками  $C_{i_1}, \dots, C_{i_M}$ , центр ячейки  $C_{i_k}$  имеет координаты  $x_k, y_k, z_k$ . Коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  находятся из условия минимизации функции  $F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = \sum_{k=1}^M [u_i^0 + \alpha_i(x_k - x_i^0) + \beta_i(y_k - y_i^0) + \gamma_i(z_k - z_i^0) - u_{i_k}^0]^2$ .

В соответствии с теоремой Годунова любая разностная схема, имеющая порядок аппроксимации выше первого, является немонотонной, т. е. приводит к появлению нефизических осцилляций. Для преодоления этого явления используются ограничители. Известно много видов ограничителей, которые применяются для построения одномерных монотонных разностных схем [1]. Одна из первых многомерных конструкций была предложена Бартом и Джесперсоном (см. [1]).

Пусть внутри каждой ячейки  $C_{i_k}$  ( $k \in \overline{1, M}$ ), соседней с  $C_i$ , задана функция  $u_{i_k}^0$ . Пусть  $u_{\min} = \min(u_i^0, \min_{k=1, M} u_{i_k}^0)$ ,  $u_{\max} = \max(u_i^0, \max_{k=1, M} u_{i_k}^0)$ . Предположим, что внутри ячейки  $C_i$  задана линейная функция

$$u_i(x, y, z) = u_i^0 + \alpha_i(x - x_i^0) + \beta_i(y - y_i^0) + \gamma_i(z - z_i^0).$$

Пусть  $x_j, y_j, z_j$  ( $j = 1, \dots, K$ ) — координаты вершин ячейки  $C_i$ . Рассмотрим числа

$$\psi_j = \begin{cases} \varphi\left(\frac{u_{\max} - u_i^0}{u_i(x_j, y_j, z_j) - u_i^0}\right), & u_i(x_j, y_j, z_j) > u_i^0; \\ \varphi\left(\frac{u_{\min} - u_i^0}{u_i(x_j, y_j, z_j) - u_i^0}\right), & u_i(x_j, y_j, z_j) < u_i^0; \\ 1, & u_i(x_j, y_j, z_j) = u_i^0. \end{cases}$$

Здесь функция  $\varphi$  имеет вид  $\varphi(x) = \min(1, x)$ . Для сохранения монотонности коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  заменяются на коэффициенты  $\psi\alpha_i, \psi\beta_i, \psi\gamma_i$ , где  $\psi = \min(\psi_1, \dots, \psi_K)$ .

## 2. Уравнения идеальной МГД

Уравнения идеальной МГД для идеального газа с показателем адиабаты  $\gamma$  в консервативной форме имеют вид

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(\vec{U})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}(\vec{U})}{\partial y} + \frac{\partial \vec{H}(\vec{U})}{\partial z} = 0,$$

$$\text{где } \vec{U} = (\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, B_x, B_y, B_z, E)^T; \quad \vec{F}(\vec{U}) = \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + p + \frac{|\vec{B}|^2}{2} - B_x^2 \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ 0 \\ u_x B_y - u_y B_x \\ u_x B_z - u_z B_x \\ u_x \left( E + p + \frac{|\vec{B}|^2}{2} \right) - B_x (\vec{u} \cdot \vec{B}) \end{pmatrix};$$

$$\vec{G}(\vec{U}) = \begin{pmatrix} \rho u_y \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_y^2 + p + \frac{|\vec{B}|^2}{2} - B_y^2 \\ \rho u_y u_z - B_y B_z \\ u_y B_x - u_x B_y \\ 0 \\ u_y B_z - u_z B_y \\ u_y \left( E + p + \frac{|\vec{B}|^2}{2} \right) - B_y (\vec{u} \cdot \vec{B}) \end{pmatrix}; \quad \vec{H}(\vec{U}) = \begin{pmatrix} \rho u_z \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ \rho u_y u_z - B_y B_z \\ \rho u_z^2 + p + \frac{|\vec{B}|^2}{2} - B_z^2 \\ u_z B_x - u_x B_z \\ u_z B_y - u_y B_z \\ 0 \\ u_z \left( E + p + \frac{|\vec{B}|^2}{2} \right) - B_z (\vec{u} \cdot \vec{B}) \end{pmatrix};$$

$\rho$  — плотность среды;  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  — вектор скорости;  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$  — вектор напряженности магнитного поля;  $p$  — давление;  $E = \rho \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \frac{|\vec{B}|^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}$  — полная энергия.

**2.1. Вычисление потоков по схемам HLL и HLLC.** Схема HLL пригодна для любой гиперболической системы уравнений вида  $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(\vec{U})}{\partial x} = 0$ . Из всех разрывов, появляющихся в задаче Римана, метод HLL учитывает только две самые быстрые ударные волны. Если заданы начальные условия  $\vec{U}^L$  и  $\vec{U}^R$ , то поток  $\vec{\Phi}_{HLL}$  вычисляется по формуле

$$\vec{\Phi}_{HLL} = \begin{cases} \vec{F}(\vec{U}^L), & \lambda^L > 0; \\ \frac{\lambda^R \vec{F}(\vec{U}^L) - \lambda^L \vec{F}(\vec{U}^R) + \lambda^R \lambda^L (\vec{U}^R - \vec{U}^L)}{\lambda^R - \lambda^L}, & \lambda^L \leq 0 \leq \lambda^R; \\ \vec{F}(\vec{U}^R), & \lambda^R < 0, \end{cases}$$

где  $\lambda^L$  и  $\lambda^R$  — соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{U}}$  [1].

В случае идеальной МГД используются оценки чисел  $\lambda^L$  и  $\lambda^R$ , приведенные в работе [2].



$$\text{Пусть } a^2 = \frac{\gamma \max(p^L, p^R)}{\min(\rho^L, \rho^R)}; \quad u_a^2 = \frac{\max\left(|\vec{B}^L|^2, |\vec{B}^R|^2\right)}{\min(\rho^L, \rho^R)}; \quad u_{ax}^2 = \frac{\max\left((B_x^L)^2, (B_x^R)^2\right)}{\min(\rho^L, \rho^R)};$$

$$u_f = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a^2 + u_a^2 + \sqrt{(a^2 + u_a^2)^2 - 4a^2u_{ax}^2}\right)}. \quad \text{Тогда } \lambda^L = \min(u_x^L, u_x^R) - u_f; \quad \lambda^R = \max(u_x^L, u_x^R) + u_f.$$

Уточненный метод HLLC дополнительно учитывает центральный контактный разрыв. В настоящей работе реализуется схема HLLC для уравнений идеальной МГД, описанная в работе [3].

Поток  $\vec{\Phi}_{HLLC}$  вычисляется по формуле

$$\vec{\Phi}_{HLLC} = \begin{cases} \vec{F}(\vec{U}^L), & \lambda^L > 0; \\ \vec{F}_L^*, & \lambda^L \leq 0 < \lambda_M; \\ \vec{F}_R^*, & \lambda_M \leq 0 < \lambda^R; \\ \vec{F}(\vec{U}^R), & \lambda^R < 0, \end{cases}$$

где величины  $\lambda_M$ ,  $\vec{F}_L^*$ ,  $\vec{F}_R^*$  определены в [3].

**2.2. Вычисление потоков по схеме Рои.** Схема Рои также применима для любой гиперболической системы уравнений  $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(\vec{U})}{\partial x} = 0$  [1]. Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — собственные числа матрицы  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{U}}$ ;  $\vec{R}_i$  и  $\vec{L}_i$  — соответственно правый и левый собственные векторы, отвечающие собственному значению  $\lambda_i$ . Поток схемы Рои  $\vec{\Phi}_{Roe}$  вычисляется по формуле

$$\vec{\Phi}_{Roe} = \frac{1}{2} \left[ \vec{F}(\vec{U}^L) + \vec{F}(\vec{U}^R) - \sum_{i=1}^n \vec{L}_i (\vec{U}^R - \vec{U}^L) |\lambda_i| \vec{R}_i \right].$$

Величины  $\lambda_i$ ,  $\vec{R}_i$  и  $\vec{L}_i$  для уравнений идеальной МГД приводятся в работе [4].

### 3. Методы исключения численного магнитного заряда

Различные методы исключения численного магнитного заряда можно разделить на три группы [1].

К первой группе относится использование искусственного скалярного потенциала  $\varphi$ , удовлетворяющего уравнению Пуассона  $\Delta \varphi = -\text{div} \vec{B}$  [5]. Если ввести новое магнитное поле  $\vec{B}' = \vec{B} + \nabla \varphi$ , то его дивергенция будет равна нулю. Недостатком этого метода является необходимость решения эллиптического уравнения, что сильно увеличивает время расчетов.

Вторая группа методов использует модифицированную МГД-систему, для которой магнитный заряд удовлетворяет уравнению конвекции [4] или волновому уравнению [6] и переносится к границам счетной области. Эти методы требуют небольшой модификации разностных схем и незначительно увеличивают время счетного шага, но не обеспечивают точного обнуления дивергенции магнитного поля.

К третьей группе относятся различные варианты метода СТ (Constrained Transport), описанные в работах [7–12]. Данный метод требует введения разнесенного шаблона для магнитного поля, при этом его пересчет на гранях сетки осуществляется с помощью дискретного аналога закона Фарадея. Однако реализация метода СТ описана в литературе только для прямоугольных [7–10] или треугольных [11, 12] сеток.

В настоящей работе алгоритмы из статьи [9] обобщаются на произвольные неструктурированные многогранные сетки. В расчетах двумерных задач, приведенных в подразд. 5.3 и 5.4, исключение магнитного заряда выполнялось методом СТ.

**3.1. Магнитное поле на гранях.** Пусть  $P_i$  — грань некоторой ячейки сетки;  $V_{i,j_1}, \dots, V_{i,j_M}$  — ее вершины;  $\vec{n}_i$  — единичная нормаль к грани  $P_i$ ;  $\vec{\Phi}_i = (\Phi_{i,1}, \dots, \Phi_{i,8})$  — поток на этой грани. Предположим, что, кроме вектора напряженности магнитного поля, заданного в центрах ячеек, на каждой грани  $P_i$  задана нормальная компонента  $B_{n,i} = \vec{B} \cdot \vec{n}_i$ . Рассмотрим трехмерный вектор  $\vec{F}_i = (\Phi_{i,5}, \Phi_{i,6}, \Phi_{i,7})$ . Тогда верно равенство  $\vec{F}_i = \vec{n}_i \times \vec{E}_i$ , где  $\vec{E}_i = -(\vec{u} \times \vec{B})_i$  — вектор напряженности электрического поля на грани  $P_i$ . Пусть  $d\vec{l}_{i,k} = \overrightarrow{V_{i,j_k} V_{i,j_{k+1}}}$ . По формулам векторной алгебры

$$\vec{F}_i \cdot (\vec{n}_i \times d\vec{l}_{i,k}) = (\vec{n}_i \times \vec{E}_i) \cdot (\vec{n}_i \times d\vec{l}_{i,k}) = (\vec{n}_i \cdot \vec{n}_i) (\vec{E}_i \cdot d\vec{l}_{i,k}) - (\vec{n}_i \cdot d\vec{l}_{i,k}) (\vec{E}_i \cdot \vec{n}_i) = \vec{E}_i \cdot d\vec{l}_{i,k}, \quad (3)$$

так как ребро  $\overrightarrow{V_{i,j_k} V_{i,j_{k+1}}}$  лежит в плоскости грани  $P_i$  и, следовательно,  $\vec{n}_i \cdot d\vec{l}_{i,k} = 0$ .

Рассмотрим теперь закон Фарадея

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} = 0. \quad (4)$$

Проинтегрировав уравнение (4) по грани  $P_i$ , получим равенство

$$S(P_i) \frac{\partial B_{n,i}}{\partial t} + \int_{P_i} (\text{rot} \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0,$$

где  $S(P_i)$  — площадь грани  $P_i$ .

Применяя формулу Стокса, получаем

$$S(P_i) \frac{\partial B_{n,i}}{\partial t} + \int_{\partial P_i} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Заменяя интеграл конечной суммой, получаем

$$\frac{\partial B_{n,i}}{\partial t} \approx -\frac{1}{S(P_i)} \sum_{k=1}^M \vec{E}_{i,k} \cdot d\vec{l}_{i,k}. \quad (5)$$

Пусть  $P_{i_1,k}, \dots, P_{i_{N_k},k}$  — все грани, содержащие ребро  $\overrightarrow{V_{i,j_k} V_{i,j_{k+1}}}$ . Тогда в силу (3) величину  $\vec{E}_{i,k} \cdot d\vec{l}_{i,k}$  можно представить в виде

$$\vec{E}_{i,k} \cdot d\vec{l}_{i,k} \approx \frac{1}{N_k} \sum_{s=1}^{N_k} \vec{F}_{i_s,k} \cdot (\vec{n}_{i_s,k} \times d\vec{l}_{i,k}). \quad (6)$$

**3.2. Интерполяция магнитного поля.** Изложенный здесь алгоритм интерполяции магнитного поля с граней в ячейки взят из книги [16].

Пусть  $P_{i,j}$  — грань ячейки  $C_i$ , а  $V_{i,j,1}, \dots, V_{i,j,N_{ij}}$  — вершины грани  $P_{i,j}$ ;  $Q_{i,j,k}$  — грань ячейки  $C_i$ , отличная от  $P_{i,j}$  и содержащая вершины  $V_{i,j,k-1}$  и  $V_{i,j,k}$ .

Пусть  $B_{n,1}$  — нормальная компонента магнитного поля на грани  $P_{i,j}$ ;  $B_{n,2}, B_{n,3}$  — нормальные компоненты магнитного поля соответственно на гранях  $Q_{i,j,k}, Q_{i,j,k+1}$ ;  $\vec{n}_1$  — вектор единичной нормали к грани  $P_{i,j}$ ;  $\vec{n}_2, \vec{n}_3$  — векторы единичных нормалей соответственно к граням  $Q_{i,j,k}, Q_{i,j,k+1}$ . Рассмотрим вектор  $\vec{B}_{i,j,k}$ , компоненты которого находятся из системы трех линейных уравнений  $\vec{B}_{i,j,k} \cdot \vec{n}_s = B_{n,s}, s = 1, 2, 3$ .

Пусть  $K \equiv V_{i,j,k}$ ;  $L$  — центр ребра  $V_{i,j,k-1} V_{i,j,k}$ ;  $M$  — центр ребра  $V_{i,j,k} V_{i,j,k+1}$ ;  $N$  — центр грани  $P_{i,j}$ ;  $O$  — центр ячейки  $C_i$ ;  $W_{i,j,k}$  — объем четырехугольной пирамиды  $KLNM O$ . Тогда вектор напряженности магнитного поля в центре ячейки  $C_i$  найдем по формуле

$$\vec{B}_i = \frac{\sum_j \sum_k \vec{B}_{i,j,k} W_{i,j,k}}{\sum_j \sum_k W_{i,j,k}}. \quad (7)$$

**3.3. Метод СТ.** Решение уравнений идеальной МГД методом СТ состоит из следующих трех шагов:

1. Пересчет вектора консервативных переменных в каждой ячейке по формуле (2).
2. Пересчет нормальной компоненты магнитного поля на каждой грани по формулам (5), (6). При этом для численной дивергенции магнитного поля в ячейке  $C_l$  будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{B})_l = \frac{1}{V_l} \sum_i \frac{\partial B_{n,i}}{\partial t} S(P_i) = -\frac{1}{V_l} \sum_i \sum_k \vec{E}_{i,k} \cdot d\vec{l}_{i,k}. \quad (8)$$

В сумме (8) каждое слагаемое встречается два раза с противоположными знаками, значит, эта сумма равна нулю.

3. Интерполяция магнитного поля с граней в центры ячеек по формуле (7).

#### 4. Уравнения Максвелла

Система уравнений Максвелла в отсутствие зарядов и токов имеет вид

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}; \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (9)$$

где  $\vec{E}$  — вектор напряженности электрического поля;  $\vec{H}$  — вектор напряженности магнитного поля;  $\vec{D}$  — вектор электрической индукции;  $\vec{B}$  — вектор магнитной индукции;  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды;  $\mu$  — магнитная проницаемость среды.

Система уравнений (9) может быть переписана в виде

$$Q \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + B \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} + C \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} = 0, \quad (10)$$

$$\text{где } \vec{U} = (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)^T; \quad Q = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как система уравнений (10) является линейной, потоки через грани можно вычислять, используя точное решение задачи Римана [13]. Пусть  $\vec{U}^L = (E_x^L, E_y^L, E_z^L, H_x^L, H_y^L, H_z^L)$ ,  $\vec{U}^R = (E_x^R, E_y^R, E_z^R, H_x^R, H_y^R, H_z^R)$  — начальные условия одномерной задачи. Обозначим

$$c^L = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^L \mu^L}}; \quad c^R = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^R \mu^R}};$$

$$E_y^* = \frac{E_y^L \varepsilon^L c^L + E_y^R \varepsilon^R c^R + H_z^L - H_z^R}{\varepsilon^L c^L + \varepsilon^R c^R}; \quad E_z^* = \frac{E_z^L \varepsilon^L c^L + E_z^R \varepsilon^R c^R - H_y^L + H_y^R}{\varepsilon^L c^L + \varepsilon^R c^R};$$

$$H_y^* = \frac{H_y^L \mu^L c^L + H_y^R \mu^R c^R - E_z^L + E_z^R}{\mu^L c^L + \mu^R c^R}; \quad H_z^* = \frac{H_z^L \mu^L c^L + H_z^R \mu^R c^R + E_y^L - E_y^R}{\mu^L c^L + \mu^R c^R}.$$

Тогда  $\vec{\Phi}(\vec{U}^L, \vec{U}^R) = (0, H_z^*, -H_y^*, 0, -E_z^*, E_y^*)^T$ .

## 5. Расчеты тестовых МГД-задач

**5.1. Расчеты на сходимость теста Даи—Вудварда.** Данный тест представляет собой задачу о распаде разрыва, в которой возникают все виды ударных МГД-волн. Постановка задачи взята из работы [17].

Счетная область задачи представляет собой прямоугольный параллелепипед  $[0; 1] \times [0; 0,1] \times [0; 0,1]$ . Счетная сетка — ортогональная шестигранная. Число ячеек по направлениям  $y, z$  равнялось 5, а для направления  $x$  число ячеек  $N$  бралось из множества  $\{100, 200, 500, 1\,000, 2\,000\}$ . Расчеты проводились по трем разностным схемам: Роу, HLL и HLLC.

На рис. 1 показаны профили плотности, полученные в расчетах на сетке с 2 000 ячеек по направлению  $x$ . Видно, что схема HLLC лучше, чем HLL, описывает контактную границу.

В табл. 1 представлены значения нормы погрешности для расчетов с различным числом ячеек,

которая вычисляется по формуле  $\|\rho - \rho_{et}\|_{L_1} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i |\rho_i - \tilde{\rho}_i|}{\sum_{i=1}^n V_i}$ , где  $V_i$  — объем, а  $\tilde{\rho}_i$  — значение эталонной плотности  $i$ -й ячейки; суммирование ведется по всем ячейкам сетки. Также вычисляется локальный порядок сходимости плотности в норме  $L_1$  по формуле  $\alpha = \ln \frac{\|\rho_1 - \rho_{et}\|_{L_1}}{\|\rho_2 - \rho_{et}\|_{L_1}} / \ln \frac{N_2}{N_1}$ , где

$\rho_i$  — функция плотности, полученная в расчете с числом ячеек  $N_i$  ( $i = 1, 2$ ).

На рис. 2 показаны зависимости нормы погрешности от сетки в логарифмическом масштабе (по оси абсцисс отложена величина  $1/N$ ). Видно, что схема Роу дает наиболее быструю сходимость.

Таблица 1

**Норма погрешности вычислений и порядок сходимости в задаче Даи—Вудварда**

N	Схема Роу		Схема HLL		Схема HLLC	
	погрешность	сходимость	погрешность	сходимость	погрешность	сходимость
100	0,036761	0,650435	0,065921	0,600685	0,050637	0,594826
200	0,023420	0,826719	0,043471	0,679818	0,033528	0,739931
500	0,010980	0,621691	0,023317	0,577064	0,017020	0,584285
1 000	0,007136	0,667115	0,015630	0,603075	0,011352	0,642920
2 000	0,004494		0,010290		0,007270	

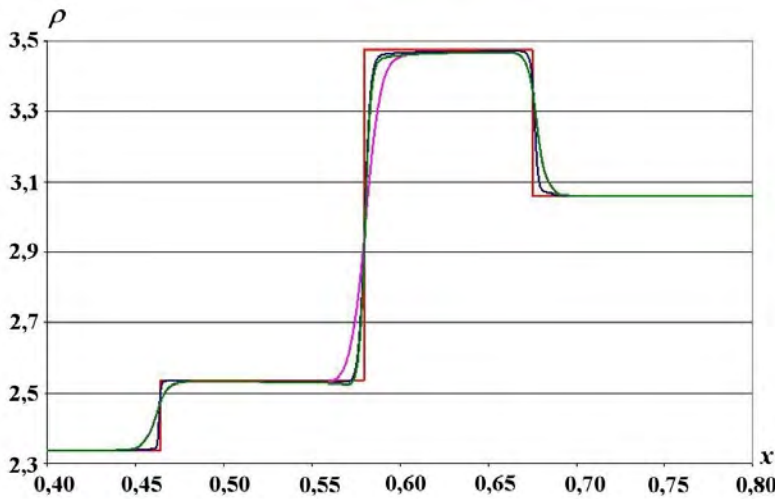


Рис. 1. Профили плотности в момент времени  $t = 0,15$ ,  $N = 2\,000$ :  
 — аналитическое решение; — схема Роу; — схема HLL;  
 — схема HLLC

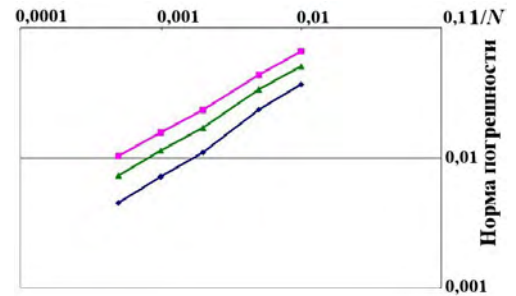


Рис. 2. Зависимости нормы погрешности плотности от сетки в задаче Даи—Вудварда: — схема Роу; — схема HLL; — схема HLLC

**5.2. Расчеты на сходимость теста Брио—Ву.** Данный тест используется для численного исследования распада неэволюционных разрывов. Постановка задачи приведена в работе [18].

Счетная область задачи представляет собой прямоугольный параллелепипед  $[0; 1] \times [0; 0,1] \times [0; 0,1]$ . Счетная сетка — ортогональная шестигранная. Число ячеек по направлениям  $y, z$  равнялось 5, а для направления  $x$  число ячеек  $N$  бралось из множества  $\{100, 200, 500, 1\,000, 2\,000\}$ . Расчеты проводились по трем разностным схемам: Роу, HLL и HLLC.

На рис. 3 показаны профили плотности, полученные в расчетах на сетке с 500 ячейками по направлению  $x$ . Эталонное решение получено с помощью одномерного расчета по схеме Лакса—Вендрофа [15] с числом точек  $N = 10\,000$ .

В табл. 2 представлены норма погрешности и локальный порядок сходимости плотности в норме  $L_1$  для расчетов с различным числом ячеек.

На рис. 4 показаны зависимости нормы погрешности от сетки в логарифмическом масштабе (по оси абсцисс отложена величина  $1/N$ ).

Таблица 2

**Норма погрешности вычислений и порядок сходимости в задаче Брио—Ву**

$N$	Схема Роу		Схема HLL		Схема HLLC	
	погрешность	сходимость	погрешность	сходимость	погрешность	сходимость
100	0,013377	0,682327	0,019744	0,622680	0,017914	0,624477
200	0,008336	0,744233	0,012823	0,650081	0,011620	0,685919
500	0,004215	0,808896	0,007068	0,708268	0,006198	0,744277
1 000	0,002406	0,917271	0,004326	0,768205	0,003700	0,823332
2 000	0,001274		0,002540		0,002091	

**5.3. Задача о двумерном МГД-вихре.** Постановка задачи взята из работы [19]. Счетная область задачи — прямоугольный параллелепипед  $[0; 1] \times [0; 1] \times [0; 0,01]$ . Счетная сетка была получена трансляцией в один слой двумерной равномерной шестиугольной сетки (рис. 5). Число ячеек двумерной сетки 160 200.

Задача считалась по схеме Роу. На рис. 6—9 показано сравнение результатов расчетов с данными, опубликованными в работе [19].

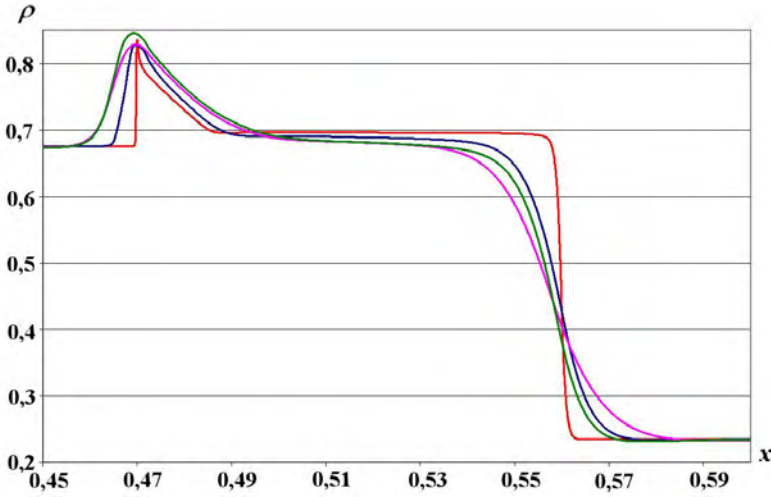


Рис. 3. Профили плотности в момент времени  $t = 0,1$ ,  $N = 500$ :  
 — эталонное решение; — схема Роу; — схема HLL;  
 — схема HLLC

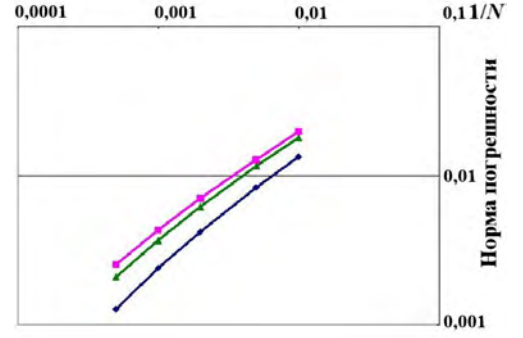


Рис. 4. Зависимости нормы погрешности плотности от сетки в задаче Брио—  
 Ву: — схема Роу; — схема HLL;  
 — схема HLLC

Рассмотрим максимальную дивергенцию магнитного поля по всей счетной области, которая считалась по формуле  $\text{div} \vec{B} = \max_i \frac{1}{V_i} \left| \sum_j S(P_j) B_{n,j} \right|$ , где максимум берется по всем ячейкам, а суммирование происходит по всем граням ячейки. Значение максимальной численной дивергенции в начале расчета составляло  $7,61 \cdot 10^{-11}$ , в конце расчета —  $7,45 \cdot 10^{-11}$ .

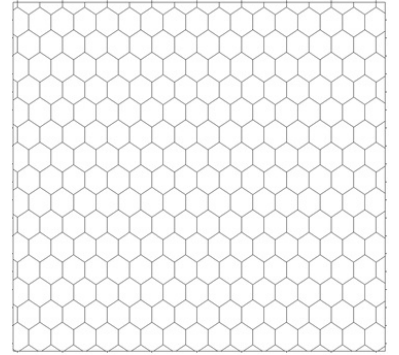


Рис. 5. Фрагмент двумерной сетки для задачи о МГД-вихре

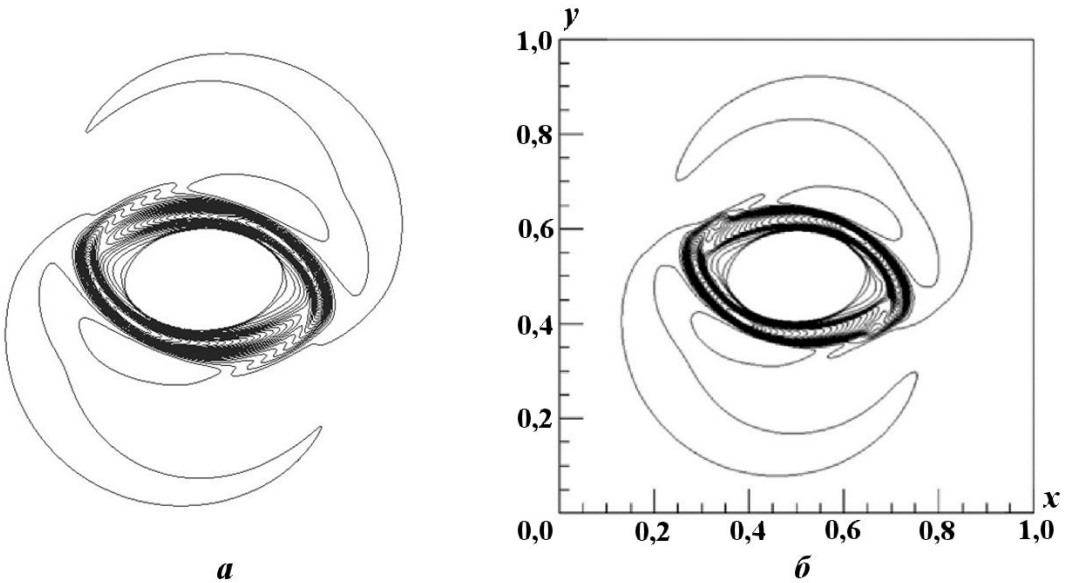


Рис. 6. Изолинии плотности на момент времени  $t = 0,15$  в задаче о МГД-вихре: *a* — расчет; *б* — из работы [19]

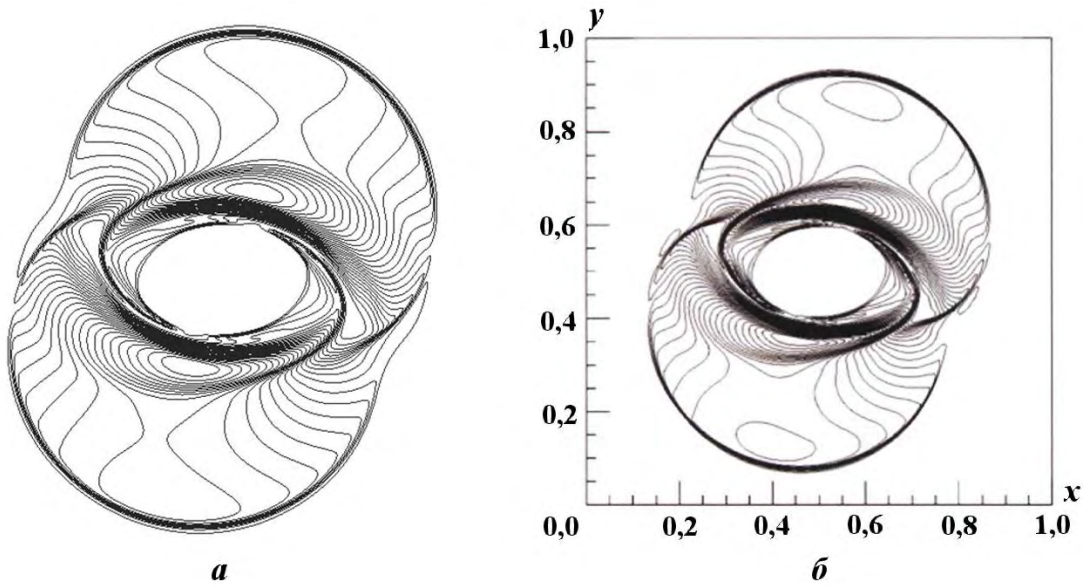


Рис. 7. Изолинии магнитного давления на момент времени  $t = 0,15$  в задаче о МГД-вихре:  $a$  — расчет;  $b$  — из работы [19]

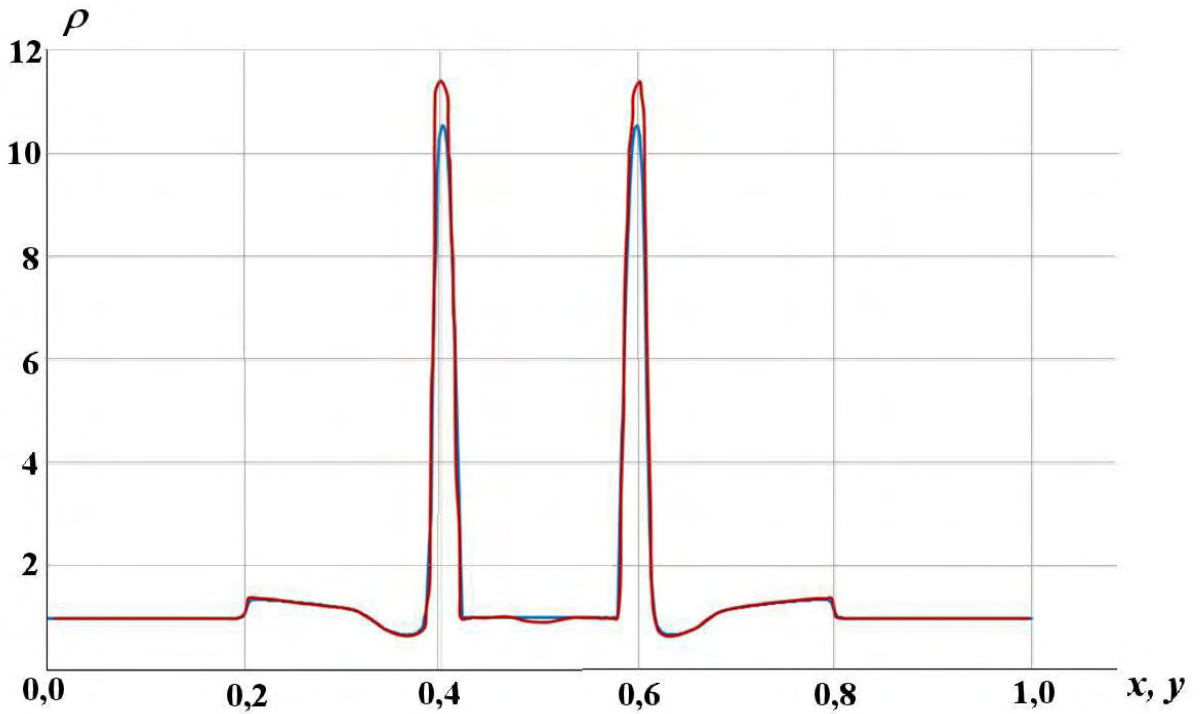


Рис. 8. Профили плотности вдоль прямой  $x = y$  в момент времени  $t = 0,15$  в задаче о МГД-вихре: — — расчет; — — из работы [19]

**5.4. Двумерный тест "MHD blast wave".** Постановка задачи взята из работы [19]. Задача считалась на той же сетке, что и предыдущая, по схеме Роу.

На рис. 10–13 показано сравнение результатов расчетов с данными из [19].

Значение максимальной численной дивергенции в начале расчета составляло  $1,52 \cdot 10^{-9}$ , в конце расчета —  $1,7 \cdot 10^{-9}$ .

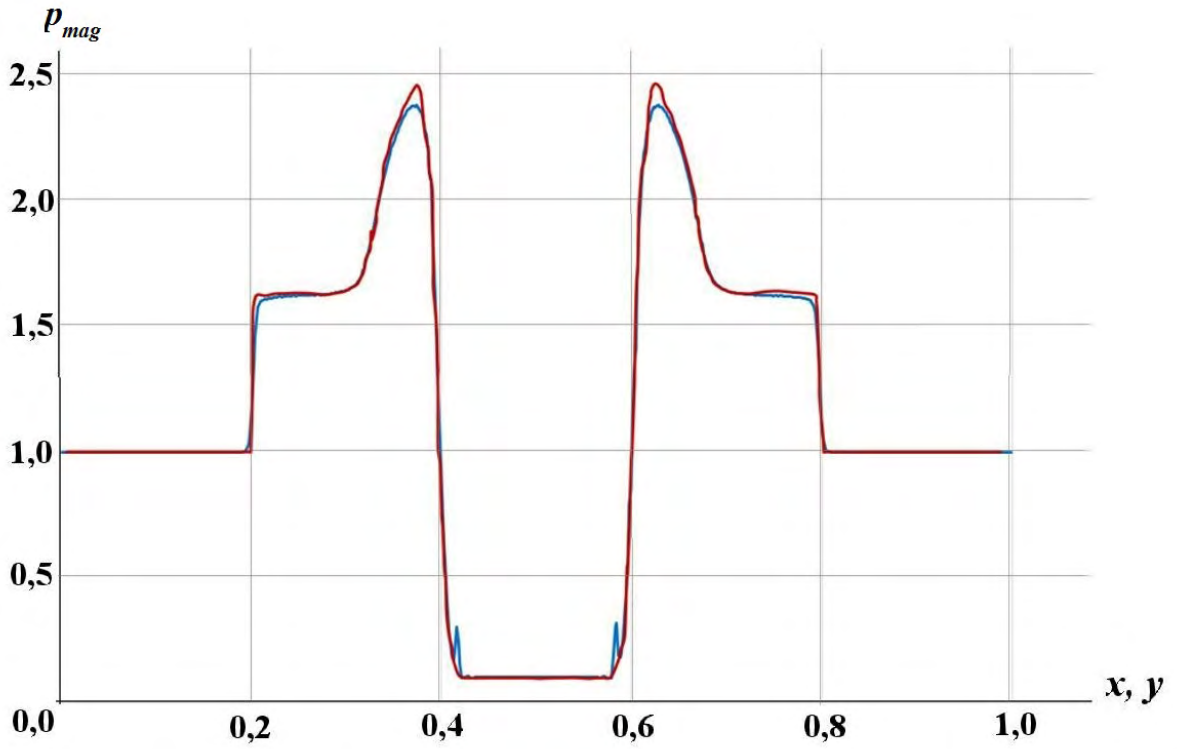


Рис. 9. Профили магнитного давления вдоль прямой  $x = y$  в момент времени  $t = 0,15$  в задаче о МГД-вихре: — расчет; — из работы [19]

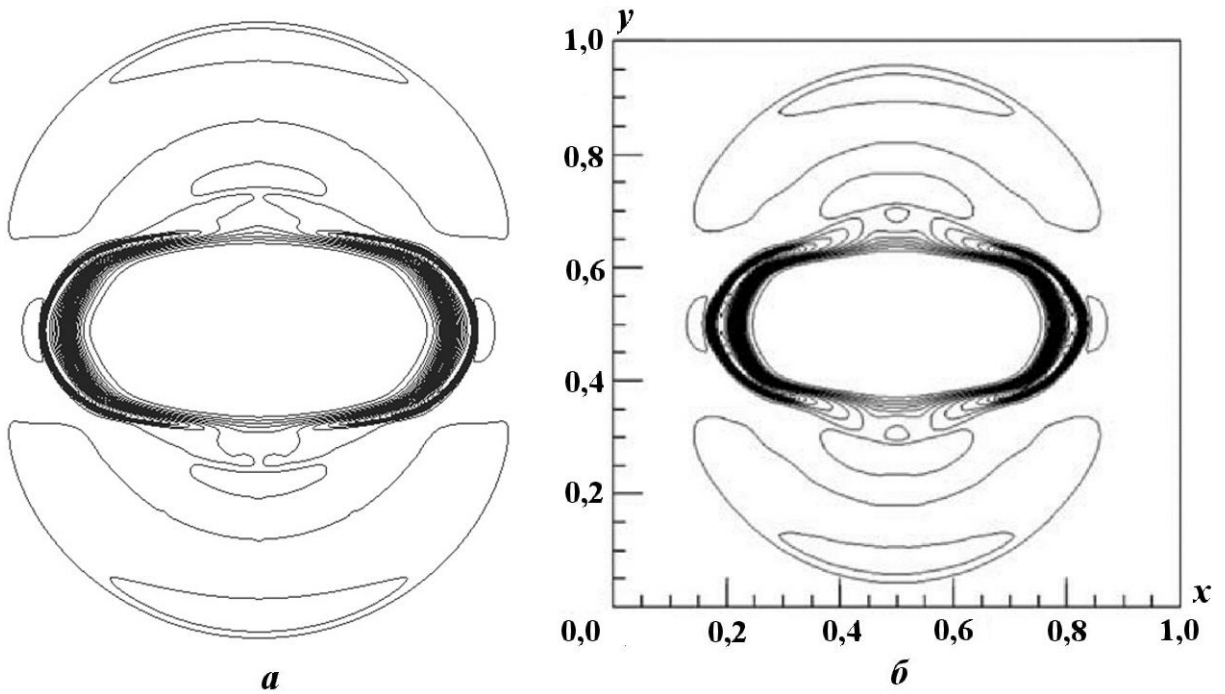


Рис. 10. Изолинии плотности на момент времени  $t = 0,01$  в тесте "MHD blast wave":  $a$  — расчет;  $b$  — из работы [19]



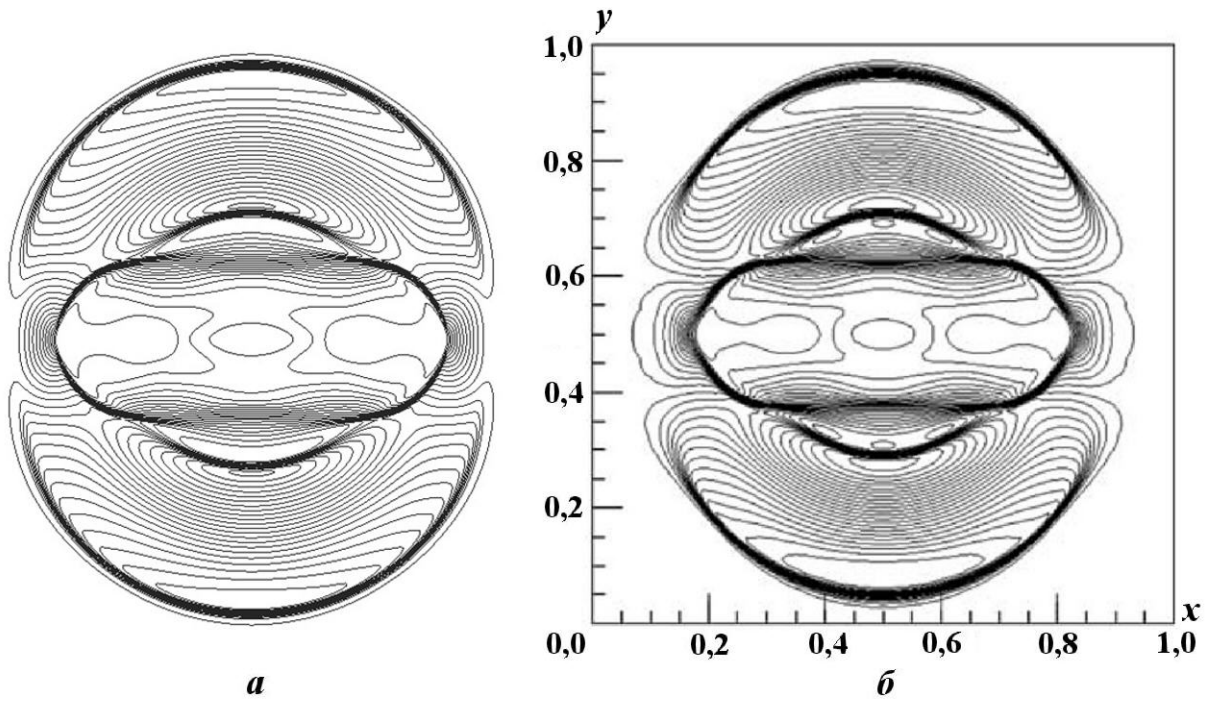


Рис. 11. Изолинии магнитного давления на момент времени  $t = 0,01$  в тесте "MHD blast wave":  $a$  — расчет;  $b$  — из работы [19]

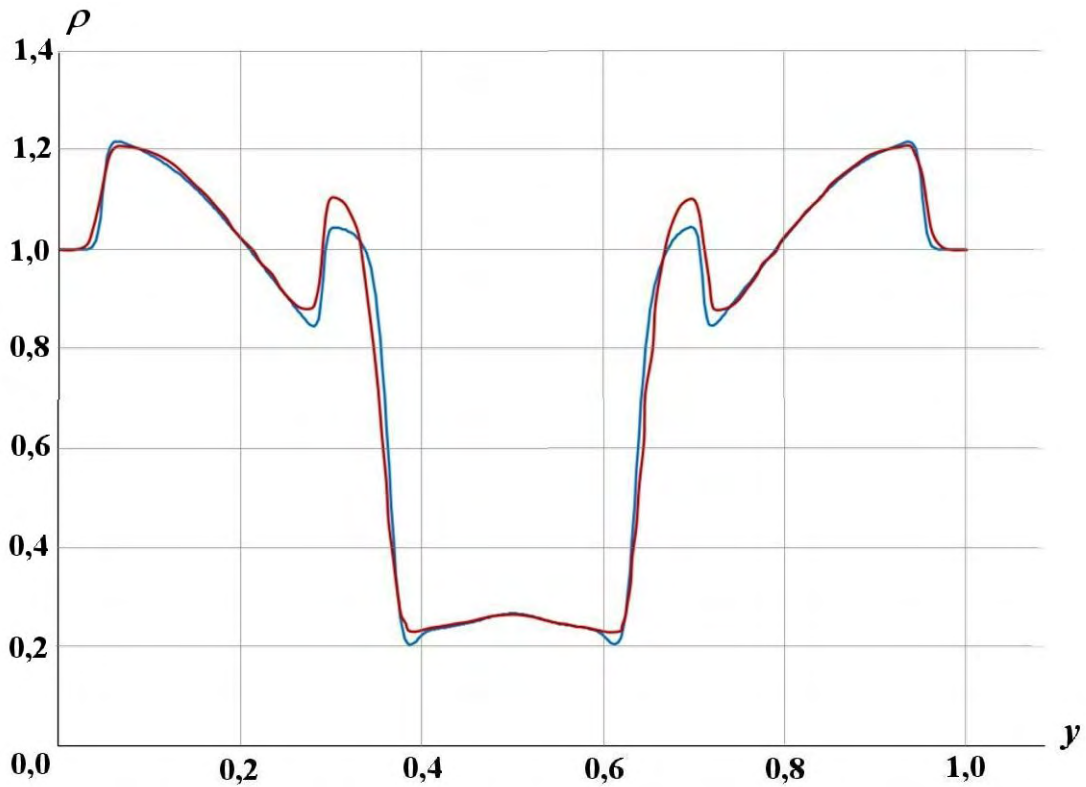


Рис. 12. Профили плотности вдоль прямой  $x = 0,5$  в момент времени  $t = 0,01$  в тесте "MHD blast wave": — расчет; — из работы [19]

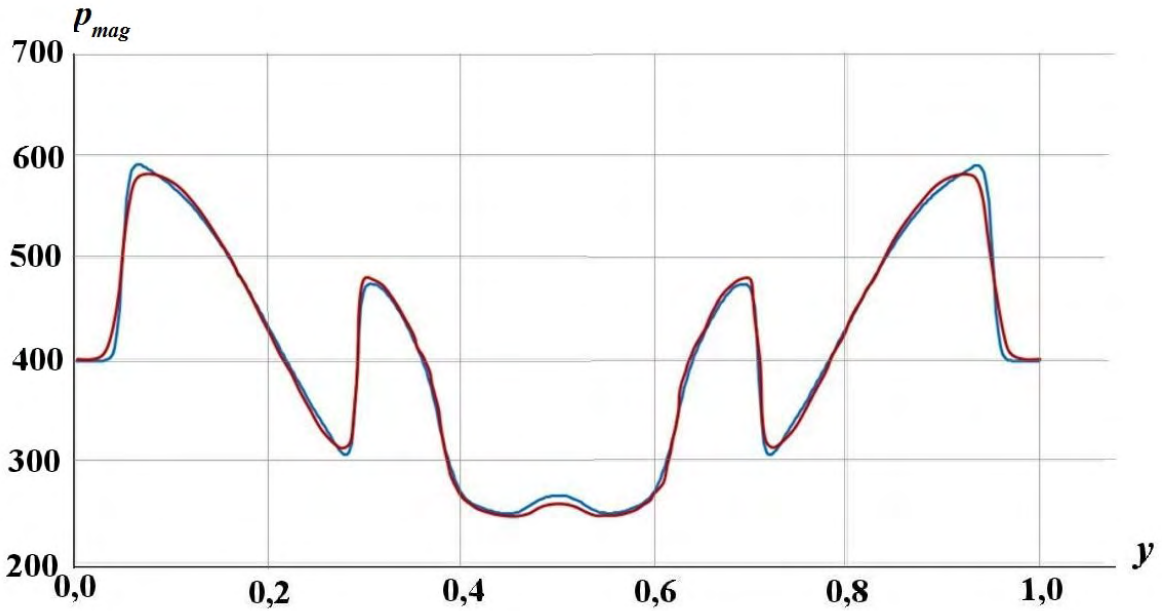


Рис. 13. Профили магнитного давления вдоль прямой  $x = 0,5$  в момент времени  $t = 0,01$  в тесте "MHD blast wave": — расчет; — из работы [19]

## 6. Тестовые расчеты уравнения Максвелла

**6.1. Задача о ТЕ-волне в однородной среде.** Постановка задачи и ее аналитическое решение взяты из работы [14]. Счетная сетка получена полистовым заполнением из двумерной шестиугольной сетки, показанной на рис. 14. Число ячеек по направлению  $z$  равнялось 1, а по направлениям  $x, y$  число ячеек  $N$  бралось из множества  $\{100, 200, 400\}$ .

На рис. 15–17 показаны зависимости погрешностей компонент  $E_x, E_y$  и  $H_z$  от времени для различного числа ячеек. Погрешности вычислялись так же, как в разд. 5.

В табл. 3 представлены максимальные погрешности указанных компонент при  $t > 2$  и локальные порядки их сходимости в норме  $L_1$ .

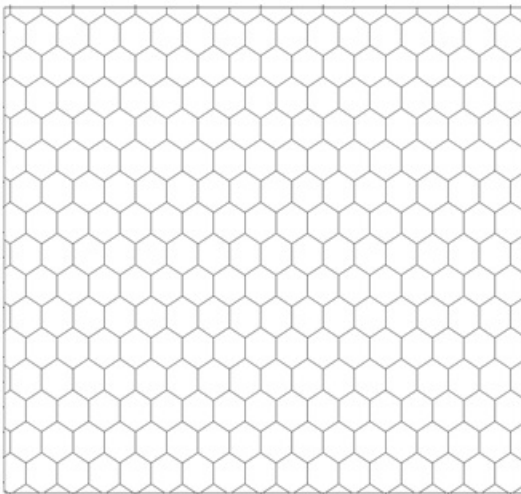


Рис. 14. Двумерная сетка в плоскости  $Oxy$  для задачи о ТЕ-волне

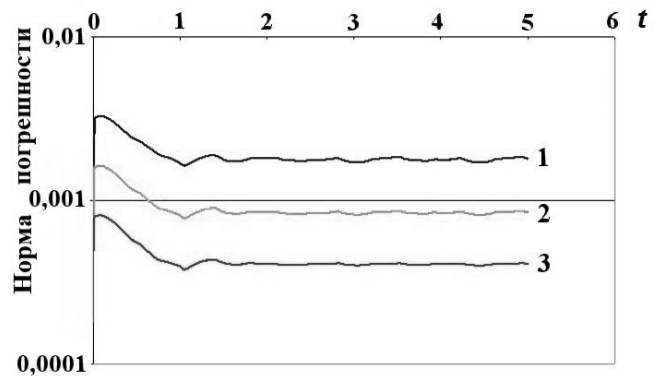


Рис. 15. Зависимости погрешности компоненты  $E_x$  от времени в задаче о ТЕ-волне: 1 —  $N = 100$ ; 2 —  $N = 200$ ; 3 —  $N = 400$

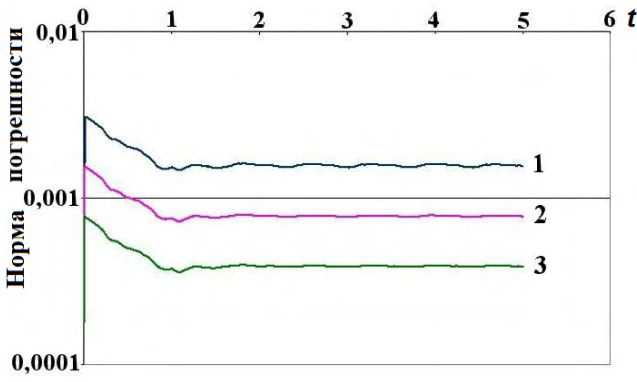


Рис. 16. Зависимости погрешности компоненты  $E_y$  от времени в задаче о ТЕ-волне: 1 —  $N = 100$ ; 2 —  $N = 200$ ; 3 —  $N = 400$

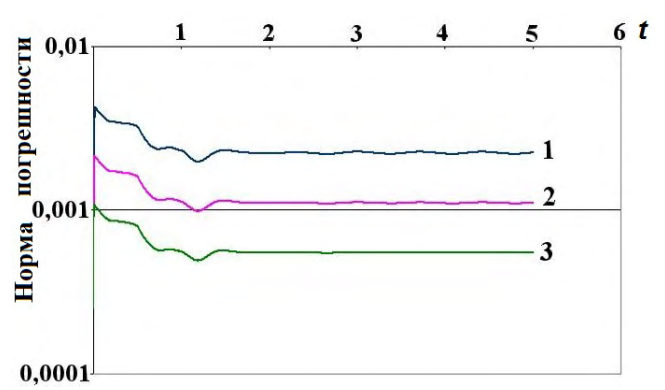


Рис. 17. Зависимости погрешности компоненты  $H_z$  от времени в задаче о ТЕ-волне: 1 —  $N = 100$ ; 2 —  $N = 200$ ; 3 —  $N = 400$

Таблица 3

Максимальные погрешности при  $t > 2$  и порядки сходимости в задаче о ТЕ-волне

$N$	$E_x$		$E_y$		$H_z$	
	погрешность	сходимость	погрешность	сходимость	погрешность	сходимость
100	0,00184	1,1	0,0016	1	0,00229	1
200	0,000856	1,1	0,000788	1	0,00112	1
400	0,000413		0,000391		0,000555	

**6.2. Задача о ТМ-волне в неоднородной среде.** Постановка задачи и ее аналитическое решение взяты из работы [14]. Счетная сетка получена полистовым заполнением из двумерной шестиугольной сетки, показанной на рис. 18. Число ячеек по направлению  $z$  равнялось 1, а по направлениям  $x, y$  число ячеек  $N$  бралось из множества  $\{100, 200, 400\}$ .

На рис. 19–21 показаны зависимости погрешностей компонент  $E_z, H_x$  и  $H_y$  от времени для различного числа ячеек сетки.

В табл. 4 представлены максимальные погрешности этих компонент при  $t > 2$  и локальные порядки их сходимости в норме  $L_1$ .

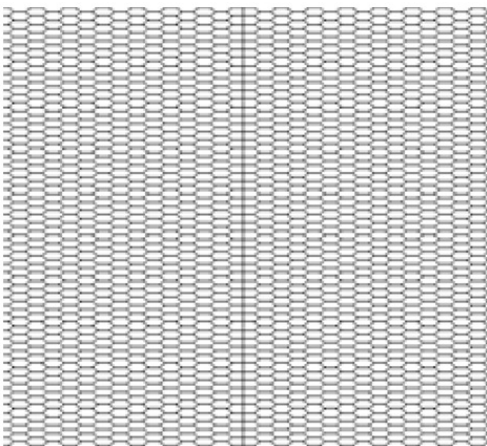


Рис. 18. Фрагмент двумерной сетки в плоскости  $Oxu$  в задаче о ТМ-волне

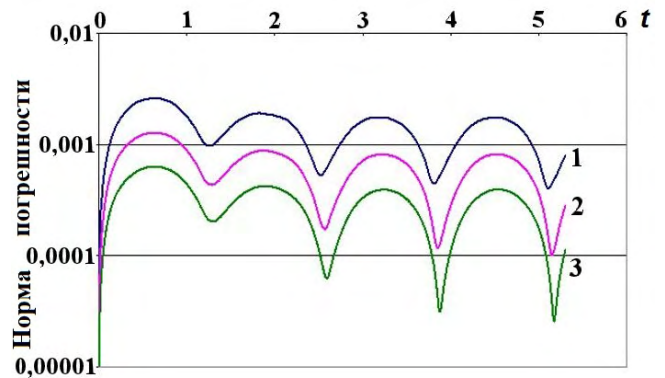


Рис. 19. Зависимости погрешности компоненты  $E_z$  от времени в задаче о ТМ-волне: 1 —  $N = 100$ ; 2 —  $N = 200$ ; 3 —  $N = 400$

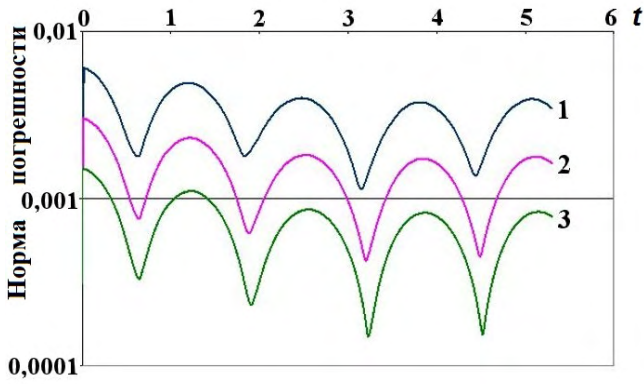


Рис. 20. Зависимости погрешности компоненты  $H_x$  от времени в задаче о ТМ-волне: 1 —  $N = 100$ ; 2 —  $N = 200$ ; 3 —  $N = 400$

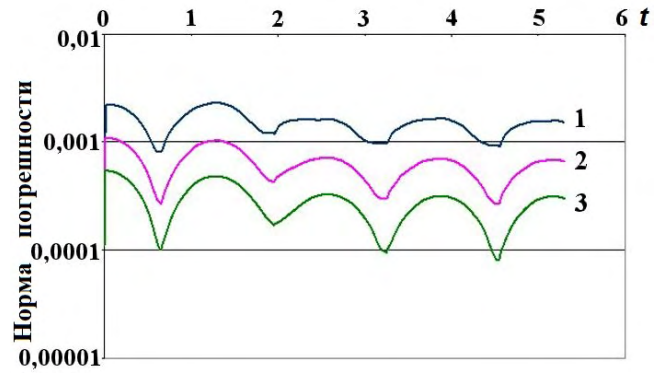


Рис. 21. Зависимости погрешности компоненты  $H_y$  от времени в задаче о ТМ-волне: 1 —  $N = 100$ ; 2 —  $N = 200$ ; 3 —  $N = 400$

Таблица 4

Максимальные погрешности при  $t > 2$  и порядок сходимости в задаче о ТМ-волне

$N$	$E_z$		$H_x$		$H_y$	
	погрешность	сходимость	погрешность	сходимость	погрешность	сходимость
100	0,00175	1,1	0,00395	1,1	0,00166	1,2
200	0,000819	1,1	0,00178	1,1	0,000705	1,1
400	0,000395		0,000832		0,000318	

### Заключение

В работе рассмотрено численное решение уравнений идеальной МГД и уравнений Максвелла на неструктурированных сетках.

Представлена реализация трех наиболее часто встречающихся разностных схем идеальной МГД, основанных на приближенном решении задачи Римана: HLL, HLLC и схемы Роу. Расчеты одномерных задач показали, что схема Роу обеспечивает более быструю сходимость, а схемы HLL и HLLC различаются только описанием контактного разрыва. Также рассмотрен вопрос об исключении численного магнитного заряда. Описан метод, в точности сохраняющий численную дивергенцию.

Разностная схема для уравнений Максвелла основана на точном решении задачи Римана. Тестовые расчеты показали сходимость численных решений к аналитическим.

### Список литературы

1. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семёнов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических уравнений. М.: Физматлит, 2001.  
*Kulikovskiy A. G., Pogorelov N. V., Semenov A. Yu. Matematicheskie voprosy chislenogo resheniya giperbolicheskikh uravneniy. M.: Fizmatlit, 2001.*
2. Janhunen P. A positive conservative method for magnetohydrodynamics based on HLL and Roe methods // J. Comp. Phys. 2000. Vol. 160. P. 649–661.
3. Gurski K. An HLLC-type approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics // SIAM J. Sci. Comp. 2004. Vol. 25. P. 2165–2187.
4. Powell K. G., Roe P. L., Linde T. J., Gombosi T. I., De Zeeuw D. L. A solution-adaptive upwind scheme for ideal magnetohydrodynamics // J. Comp. Phys. 1999. Vol. 154, No 2. P. 284–309.

5. *Brackbill J. U., Barnes D. C.* The effect of nonzero on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations // *J. Comp. Phys.* 1980. Vol. 35. P. 426.
6. *Dedner A., Kemm F., Kroner D., Munz C.-D., Schnitzer T., Wesenberg M.* Hyperbolic divergence cleaning for the MHD equations // *Ibid.* 2002. Vol. 175. P. 645–673.
7. *Dai W., Woodward P. R.* A simple finite-difference scheme for multidimensional magnetohydrodynamical equations // *Ibid.* 1998. Vol. 142, No 2. P. 331–369.
8. *Ryu D., Miniati F., Jones T. W., Frank A.* A divergence-free upwind code for multidimensional magnetohydrodynamic flows // *Astrophys. J.* 1998. Vol. 509. P. 244.
9. *Balsara D. S., Spicer D. S.* A staggered mesh algorithm using high order Godunov fluxes to ensure solenoidal magnetic fields in magnetohydrodynamic simulations // *J. Comp. Phys.* 1999. Vol. 149. P. 270–292.
10. *Toth G.* The constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes // *Ibid.* 2000. Vol. 161. P. 605–652.
11. *Галантин М. П., Лукин В. В.* Обеспечение бездивергентности магнитного поля при решении системы уравнений МГД методом RKDG // *Журнал вычислит. мат. и мат. физ.* 2015. Т. 55, № 8. С. 1329–1340.  
*Galanin M. P., Lukin V. V.* Obespechenie bezdivergentnosti magnitnogo polya pri reshenii sistemy uravneniy MGD metodom RKDG // *Zhurnal vychislit. mat. i mat. fiz.* 2015. Т. 55, № 8. С. 1329–1340.
12. *Torrilhon M.* Locally divergence-preserving upwind finite volume schemes for magnetohydrodynamic equations // *SIAM J. Sci. Comp.* 2005. Vol. 26, No 4. P. 1166–1191.
13. *Shankar V., Hall W. F., Mohammadian A. H.* A CFD-based finite-volume procedure for computational electromagnetics — interdisciplinary applications of CFD methods // *AIAA.* 1989. Paper 89-1987.
14. *Лебедев А. С., Федорук М. П., Штырина О. В.* Решение нестационарных уравнений Максвелла для сред с неоднородными свойствами методом конечных объемов // *Вычислительные технологии.* 2005. Т. 10, № 2. С. 60–73.  
*Lebedev A. S., Fedoruk M. P., Shtyrina O. V.* Reshenie nestatsionarnykh uravneniy Maksvella dlya sred s neodnorodnymi svoystvami metodom konechnykh ob'emov // *Vychislitelnye tekhnologii.* 2005. Т. 10, № 2. С. 60–73.
15. *Toro E.* Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer-Verlag, 2009.
16. *Taflove A.* Computational Electrodynamics. The Finite-Difference Time-Domain Method. Boston: Artech House, 1998.
17. *Dai W., Woodward P. R.* An approximate Riemann solver for ideal magneto hydrodynamics // *J. Comp. Phys.* 1994. Vol. 111. P. 354–372.
18. *Brio M., Wu C. C.* An upwind differencing scheme for the equations of ideal magneto hydrodynamics // *Ibid.* 1988. Vol. 75. P. 400–422.
19. *Han J., Tang H.* An adaptive moving mesh method for two-dimensional ideal magnetohydrodynamics // *Ibid.* 2007. Vol. 220. P. 645–673.

Статья поступила в редакцию 04.03.19.

A METHOD FOR MULTI-DIMENSIONAL ELECTRODYNAMIC SIMULATIONS ON UNSTRUCTURED MESHES / I. V. Sobolev (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhny Novgorod Region).

The paper describes numerical simulations of electrodynamic equations on unstructured polyhedral meshes by a second-order Godunov-type method. For ideal magnetohydrodynamics we use three difference schemes based on an approximate Riemann solver. We also discuss exclusion of the numerical magnetic charge by the CT method. The difference scheme for Maxwell's equations employs an exact Riemann solver. Test simulations are presented and compared with published data.

*Keywords:* equations of ideal magnetohydrodynamics, Maxwell's equations, Godunov method, unstructured meshes.

---

УДК 519.6

## УЧЕТ СПЕКТРАЛЬНЫХ И КИНЕТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ В ПРИБЛИЖЕНИИ ЛУЧИСТОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Н. Г. Карлыханов  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина",  
г. Снежинск Челябинской области)

Рассматривается один подход для усреднения по спектру и угловой переменной уравнения переноса излучения. В отличие от известных методов рассматриваемый здесь алгоритм сводит усредненную задачу к уравнению для приближения лучистой теплопроводности. Показано, что при выполнении определенных условий результаты расчетов, проведенных с использованием предлагаемого алгоритма, близки к результатам расчетов в кинетической постановке. Показано, что в оптически плотных средах данный алгоритм естественным образом переходит в приближение лучистой теплопроводности со средним росселандовым пробегом.

*Ключевые слова:* перенос теплового излучения, квазидиффузия, квазиспектральность.

### Введение

Существует несколько способов получения усредненных уравнений переноса излучения (см., например, [1–4]). Во всех этих подходах, кроме метода квазидиффузии [1], получаются усредненные уравнения специального типа, напоминающие уравнения двухтемпературной теплопроводности. Цель настоящей работы — привести усредненное уравнение к виду, максимально близкому к классическому уравнению для приближения лучистой теплопроводности. Расчет уравнения переноса излучения в постановке лучистой теплопроводности обладает преимуществами, заключающимися, главным образом, в простоте построения монотонных разностных схем второго порядка точности и организации классического ньютоновского итерационного процесса по нелинейности. Кроме того, имеется большое количество рабочих методик для расчета задач переноса излучения в приближении лучистой теплопроводности. В этих методиках без существенных доработок в соответствующих программах можно применить предлагаемый здесь подход для решения задач переноса излучения в спектральной кинетической постановке. Отметим, что решение кинетического уравнения и уравнения спектральной диффузии при известной температуре не представляет большой сложности, особенно в части, которая касается организации итерационного процесса по температуре. Кроме того, такой подход позволяет легко организовать распараллеливание по угловой и спектральной переменным.

Очевидно, что уравнениями в постановке лучистой теплопроводности нельзя описать весь класс решений исходной системы уравнений гиперболического типа. В работе [5] описаны ограничения при переходе от кинетического уравнения к уравнению диффузионного типа. Ограничений при переходе от уравнений спектральной диффузии к уравнениям в постановке лучистой теплопроводности при расчетах широкого класса задач не обнаружено.

### Постановка задачи

Рассмотрим суть предлагаемого подхода. Для простоты рассмотрим кинетическое уравнение переноса излучения в одномерном случае в приближении полного увлечения в лагранжевой системе координат:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} I_\varepsilon \right) + \frac{\partial}{\partial q} (\mu r^\nu I_\varepsilon) + \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1 - \mu^2}{r\rho} I_\varepsilon \right) + \frac{\kappa_{\varepsilon a} + \kappa_{\varepsilon s}}{\rho} I_\varepsilon = \frac{\kappa_{\varepsilon a}}{\rho} I_{\varepsilon r} + \frac{\kappa_{\varepsilon s}}{2\rho} \int_{-1}^1 I_\varepsilon d\mu. \quad (1)$$

Здесь приняты стандартные обозначения:  $c$  — скорость света;  $t$  — время;  $r$  — пространственная координата;  $\nu$  — признак геометрии:  $\nu = 0$  — плоская,  $\nu = 2$  — сферическая;  $\rho$  — плотность среды;  $dq = \rho r^\nu dr$ ;  $I_\varepsilon$  — интенсивность излучения с энергией  $\varepsilon$ ;  $\mu$  — косинус угла полета фотона относительно нормали к поверхности сферы;  $\kappa_{\varepsilon a}$ ,  $\kappa_{\varepsilon s}$  — коэффициенты поглощения и рассеяния излучения соответственно;  $I_{\varepsilon r} = k \frac{\varepsilon^3 \exp(-\varepsilon/T)}{1 - \exp(-\varepsilon/T)}$  — интенсивность равновесного излучения, где  $k$  — параметр, значение которого зависит от выбранной системы единиц измерения,  $T$  — температура.

Отметим, что  $\frac{1}{c} \int_0^\infty \int_{-1}^1 I_{\varepsilon r} d\mu d\varepsilon = \sigma T^4$ , где  $\sigma$  — постоянная Стефана–Больцмана.

Если проинтегрировать уравнение (1) по угловой переменной дважды, сначала с весом 1, а затем с весом  $\mu$ , то получится следующая система уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} U_\varepsilon \right) + \frac{\partial}{\partial q} (r^\nu S_\varepsilon) = \frac{c\kappa_{\varepsilon a}}{\rho} (U_{\varepsilon r} - U_\varepsilon); \quad (2)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} S_\varepsilon \right) + r^\nu \frac{\partial}{\partial q} (D_\varepsilon U_\varepsilon) + \frac{\nu}{2} \frac{3D_\varepsilon - 1}{\rho r} U_\varepsilon = -\frac{\kappa_{\varepsilon a} + \kappa_{\varepsilon s}}{c\rho} S_\varepsilon. \quad (3)$$

Здесь введены обозначения

$$U_\varepsilon = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 I_\varepsilon d\mu; \quad S_\varepsilon = \int_{-1}^1 \mu I_\varepsilon d\mu; \quad U_{\varepsilon r} = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 I_{\varepsilon r} d\mu; \quad D_\varepsilon = \frac{1}{cU_\varepsilon} \int_{-1}^1 \mu^2 I_\varepsilon d\mu.$$

Система уравнений (2), (3) является системой уравнений квазидиффузии. Следуя работе [5], запишем уравнение (3) в виде

$$\frac{r^\nu}{3} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial q} = -\frac{\kappa_{\varepsilon a} + \kappa_{\varepsilon s} + \kappa_{\varepsilon k}}{c\rho} S_\varepsilon, \quad (4)$$

где

$$\kappa_{\varepsilon k} = \frac{c\rho}{S_\varepsilon} \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{\rho} S_\varepsilon \right) + r^\nu \frac{\partial}{\partial q} \left[ \left( D_\varepsilon - \frac{1}{3} \right) U_\varepsilon \right] + \frac{3D_\varepsilon - 1}{\rho r} U_\varepsilon \right\}.$$

Если с помощью уравнения (4) исключить поток из уравнения (2), то получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} U_\varepsilon \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left[ r^\nu \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{r^\nu U_\varepsilon}{\kappa_{\varepsilon a} + \kappa_{\varepsilon s} + \kappa_{\varepsilon k}} \frac{c\rho}{3} \right) \right] = \frac{c\kappa_{\varepsilon a}}{\rho} (U_{\varepsilon r} - U_\varepsilon). \quad (5)$$

Уравнение (5) дополняется уравнением баланса энергии

$$\frac{\partial E(T)}{\partial t} = \frac{c}{\rho} \int_0^\infty \kappa_{\varepsilon a} (U_\varepsilon - U_{\varepsilon r}) d\varepsilon. \quad (6)$$

Если уравнение (5) проинтегрировать по всему спектру и сложить с уравнением (6), то получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( E(T) + \frac{1}{\rho} U \right) + \frac{\partial}{\partial q} (r^\nu S) = 0, \quad (7)$$



где  $U = \int_0^{\infty} U_{\varepsilon} d\varepsilon$ ;  $S = \int_0^{\infty} S_{\varepsilon} d\varepsilon$ .

### Алгоритм построения усредненного уравнения

Предлагается следующий подход к решению уравнения вида (7). Как и для квазидиффузии, он содержит два этапа. На первом при известной температуре решается кинетическое уравнение (1). Затем по вычисленным значениям параметра  $\kappa_{\varepsilon k}$  решается система уравнений (2), (4). На втором этапе рассчитывается уравнение (7) по алгоритму, изложенному ниже.

Запишем уравнение (5) в разностном виде. Для простоты изложения рассмотрим плоскую геометрию и равномерную сетку по пространству и времени, а также положим плотность среды равной единице. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{U_{\varepsilon, i+1/2}^{n+1} - U_{\varepsilon, i+1/2}^n}{\tau} - \frac{c}{3h^2} \left[ L_{\varepsilon, i+1} U_{\varepsilon, i+3/2}^{n+1} - (L_{\varepsilon, i+1} + L_{\varepsilon, i}) U_{\varepsilon, i+1/2}^{n+1} + L_{\varepsilon, i} U_{\varepsilon, i-1/2}^{n+1} \right] + \\ + c\kappa_{\varepsilon a, i+1/2} U_{\varepsilon, i+1/2}^{n+1} = c\kappa_{\varepsilon a, i+1/2} U_{\varepsilon r, i+1/2}^{n+1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $L_{\varepsilon} = (\kappa_{\varepsilon a} + \kappa_{\varepsilon s} + \kappa_{\varepsilon k})^{-1}$ . Если следовать подходу из работы [4] для случая выделения только диагонального элемента и брать значения величин  $U_{\varepsilon, i+3/2}^{n+1}$ ,  $U_{\varepsilon, i-1/2}^{n+1}$ , полученные из расчета на первом этапе, то можно выразить плотность энергии излучения  $U_{\varepsilon, i+1/2}^{n+1}$  через плотность энергии равновесного излучения  $U_{\varepsilon r, i+1/2}^{n+1}$  следующим образом:

$$U_{\varepsilon, i+1/2}^{n+1} = \alpha_{\varepsilon, i+1/2} U_{\varepsilon r, i+1/2}^{n+1} + \beta_{\varepsilon, i+1/2}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{\varepsilon, i+1/2} &= \frac{c\kappa_{\varepsilon a}\tau}{1 + c\kappa_{\varepsilon a}\tau + \frac{c\tau}{3h^2} (L_{\varepsilon, i+1} + L_{\varepsilon, i})}; \\ \beta_{\varepsilon, i+1/2} &= \frac{\frac{c\tau}{3h^2} (L_{\varepsilon, i+1} U_{\varepsilon, i+3/2}^p + L_{\varepsilon, i} U_{\varepsilon, i-1/2}^p)}{1 + c\kappa_{\varepsilon a, i+1/2}\tau + \frac{c\tau}{3h^2} (L_{\varepsilon, i+1} + L_{\varepsilon, i})}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь верхний индекс  $p$  показывает, что значение величины взято из расчета на промежуточном этапе. Очевидно, что если  $\kappa_{\varepsilon a} + \kappa_{\varepsilon s} + \kappa_{\varepsilon k} \geq 0^1$ , то  $0 \leq \alpha_{\varepsilon, i+1/2} < 1$ ,  $\beta_{\varepsilon, i+1/2} > 0$ . Отметим, что коэффициент  $\alpha_{\varepsilon, i+1/2}$  является дробно-линейным функционалом, который по аналогии с коэффициентом квазидиффузии слабо зависит от получаемого решения, поэтому его можно брать явным образом. Напротив, коэффициент  $\beta_{\varepsilon, i+1/2}$  явно и линейно зависит от получаемого решения, поэтому брать его явным способом не представляется возможным.

Для разрешения данной проблемы воспользуемся подходом, который изложен в работе [4]. Запишем уравнение баланса энергии (6) в разностном виде, заменив плотность энергии излучения на выражение (9):

$$\frac{E(T_{i+1/2}^{n+1}) - E(T_{i+1/2}^n)}{\tau} = c \int_0^{\infty} \kappa_{\varepsilon a, i+1/2} \left[ (\alpha_{\varepsilon, i+1/2} - 1) U_{\varepsilon r}(T_{i+1/2}^{n+1}) - \beta_{\varepsilon, i+1/2} \right] d\varepsilon. \quad (11)$$

Запишем уравнение (11) в следующем виде, введя новую искомую функцию  $\beta_{i+1/2}^{n+1}$ :

$$\frac{E(T_{i+1/2}^{n+1}) - E(T_{i+1/2}^n)}{\tau} + c \langle \kappa(T_{i+1/2}^{n+1}) \rangle = c \langle \kappa \beta \rangle_{i+1/2} \beta_{i+1/2}^{n+1}. \quad (12)$$

<sup>1</sup>Следуя работе [5], не будем допускать отрицательного значения данного параметра.

Здесь введены обозначения

$$\langle \kappa (T_{i+1/2}^{n+1}) \rangle = \int_0^{\infty} \kappa_{\varepsilon a, i+1/2} \left[ (1 - \alpha_{\varepsilon, i+1/2}) U_{\varepsilon r} (T_{i+1/2}^{n+1}) \right] d\varepsilon; \quad (13)$$

$$\langle \kappa_{\beta} \rangle_{i+1/2} = \frac{\int_0^{\infty} \kappa_{\varepsilon a, i+1/2} \beta_{\varepsilon, i+1/2}^p d\varepsilon}{\int_0^{\infty} \beta_{\varepsilon, i+1/2}^p d\varepsilon}. \quad (14)$$

Отметим, что подынтегральное выражение в формуле (13) строго положительно, следовательно, величина  $\langle \kappa (T_{i+1/2}^{n+1}) \rangle$  будет положительна. Для расчета параметра  $\langle \kappa_{\beta} \rangle_{i+1/2}$  в формуле (14) воспользуемся следующим приемом. На промежуточном этапе решим систему уравнений (2), (4) при известной температуре. Далее по формуле (10) рассчитаем параметр  $\beta_{\varepsilon, i+1/2}$ , с которым вычислим выражение (14). Поскольку параметр  $\beta_{\varepsilon, i+1/2}$  положителен, следовательно, функция  $\langle \kappa_{\beta} \rangle_{i+1/2}$  также будет положительна. Из уравнения (12)  $\beta_{i+1/2}^{n+1}$  можно выразить следующим образом:

$$\beta_{i+1/2}^{n+1} = \frac{c\tau \langle \kappa (T_{i+1/2}^{n+1}) \rangle + E (T_{i+1/2}^{n+1}) - E (T_{i+1/2}^n)}{c\tau \langle \kappa_{\beta} \rangle_{i+1/2}}. \quad (15)$$

Далее проинтегрируем уравнения (4) по спектру с заменой плотности энергии излучения по формуле (9). В результате получим

$$\begin{aligned} S_i^{n+1} = & \int_0^{\infty} \left( L_{\varepsilon, i} \alpha_{\varepsilon, i+1/2} U_{\varepsilon r} (T_{i+1/2}^{n+1}) - L_{\varepsilon, i} \alpha_{\varepsilon, i-1/2} U_{\varepsilon r} (T_{i-1/2}^{n+1}) \right) d\varepsilon + \\ & + \int_0^{\infty} \left( L_{\varepsilon, i} \beta_{\varepsilon, i+1/2}^p - L_{\varepsilon, i} \beta_{\varepsilon, i-1/2}^p \right) d\varepsilon. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение (16) можно записать в следующем виде:

$$S_i^{n+1} = -\frac{cr^{\nu}}{3h} \langle L_{Tp, i} (T_{i+1/2}^{n+1}) \rangle - \langle L_{Tl, i} (T_{i-1/2}^{n+1}) \rangle + \langle L_{\beta p, i} \rangle \beta_{i+1/2}^{n+1} - \langle L_{\beta k, i} \rangle \beta_{i-1/2}^{n+1}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \langle L_{Tp, i} (T_{i+1/2}^{n+1}) \rangle &= \int_0^{\infty} L_{\varepsilon, i} \alpha_{\varepsilon, i+1/2} U_{\varepsilon r} (T_{i+1/2}^{n+1}) d\varepsilon; & \langle L_{Tl, i} (T_{i-1/2}^{n+1}) \rangle &= \int_0^{\infty} L_{\varepsilon, i} \alpha_{\varepsilon, i-1/2} U_{\varepsilon r} (T_{i-1/2}^{n+1}) d\varepsilon; \\ \langle L_{\beta p, i} \rangle &= \frac{\int_0^{\infty} L_{\varepsilon, i} \beta_{\varepsilon, i+1/2}^p d\varepsilon}{\int_0^{\infty} \beta_{\varepsilon, i+1/2}^p d\varepsilon}; & \langle L_{\beta l, i} \rangle &= \frac{\int_0^{\infty} L_{\varepsilon, i} \beta_{\varepsilon, i-1/2}^p d\varepsilon}{\int_0^{\infty} \beta_{\varepsilon, i-1/2}^p d\varepsilon}. \end{aligned}$$

С помощью выражения (15) можно исключить функцию  $\beta_{i+1/2}^{n+1}$  из уравнения (17). Тогда получим выражение для потока

$$S_i^{n+1} = -\frac{cr^{\nu}}{3h} \left( \chi_{i, i+1/2} (T_{i+1/2}^{n+1}) - \chi_{i, i-1/2} (T_{i-1/2}^{n+1}) \right). \quad (18)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}\chi_{i,i+1/2} &= \left\langle L_{Tp,i} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) \right\rangle + \left\langle L_{\beta p,i} \right\rangle \frac{c\tau \left\langle \kappa \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) \right\rangle + E \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) - E \left( T_{i+1/2}^n \right)}{c\tau \left\langle \kappa_{\beta} \right\rangle_{i+1/2}}; \\ \chi_{i,i-1/2} &= \left\langle L_{Tl,i} \left( T_{i-1/2}^{n+1} \right) \right\rangle + \left\langle L_{\beta l,i} \right\rangle \frac{c\tau \left\langle \kappa \left( T_{i-1/2}^{n+1} \right) \right\rangle + E \left( T_{i-1/2}^{n+1} \right) - E \left( T_{i-1/2}^n \right)}{c\tau \left\langle \kappa_{\beta} \right\rangle_{i-1/2}}.\end{aligned}\quad (19)$$

Разностный аналог уравнения (7) имеет следующий вид:

$$E \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) + \int_0^{\infty} \alpha_{\varepsilon,i+1/2} U_{\varepsilon r} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) d\varepsilon + \beta_{i+1/2}^{n+1} - E \left( T_{i+1/2}^n \right) - U_{i+1/2}^n + \frac{\tau}{h} \left( r_{i+1}^{\nu} S_{i+1}^{n+1} - r_i^{\nu} S_i^{n+1} \right) = 0. \quad (20)$$

Исключив функцию  $\beta_{i+1/2}^{n+1}$  из уравнения (20), с помощью (15) получим

$$\begin{aligned}E \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) + \int_0^{\infty} \alpha_{\varepsilon,i+1/2} U_{\varepsilon r} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) d\varepsilon + \frac{c\tau \left\langle \kappa \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) \right\rangle + E \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) - E \left( T_{i+1/2}^n \right)}{c\tau \left\langle \kappa_{\beta} \right\rangle_{i+1/2}} - \\ - E \left( T_{i+1/2}^n \right) - U_{i+1/2}^n + \frac{\tau}{h} \left( r_{i+1}^{\nu} S_{i+1}^{n+1} - r_i^{\nu} S_i^{n+1} \right) = 0.\end{aligned}\quad (21)$$

Окончательно система усредненных уравнений примет вид

$$\begin{aligned}\tilde{E} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) - \tilde{E} \left( T_{i+1/2}^n \right) + \frac{\tau}{h} \left( r_{i+1}^{\nu} S_{i+1}^{n+1} - r_i^{\nu} S_i^{n+1} \right) = 0; \\ S_i^{n+1} = \frac{c r_i^{\nu}}{3h} l_{r,i} \left( T_{i+1/2}^{n+1} - T_{i-1/2}^{n+1} \right).\end{aligned}\quad (22)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\tilde{E} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) = E \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) + \int_0^{\infty} \alpha_{\varepsilon,i+1/2} U_{\varepsilon r} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) d\varepsilon + \frac{c\tau \left\langle \kappa \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) \right\rangle + E \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) - E \left( T_{i+1/2}^n \right)}{c\tau \left\langle \kappa_{\beta} \right\rangle_{i+1/2}}; \\ l_{r,i} = \frac{\chi_{i,i+1/2} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) - \chi_{i,i-1/2} \left( T_{i-1/2}^{n+1} \right)}{T_{i+1/2}^{n+1} - T_{i-1/2}^{n+1}}.\end{aligned}\quad (23)$$

Отметим, что плотность энергии излучения  $\tilde{E} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right)$  в выражении (23) является функцией температуры. Таким образом, уравнение (22) имеет вид уравнения для приближения лучистой теплопроводности.

Уравнение (22) дополняется начальными и граничными условиями. Вид начальных условий не существен. Для согласованности граничных условий в кинетическом и рассматриваемом подходах воспользуемся приемом из работы [6].

Запишем поток на левой границе в виде двух слагаемых:

$$S_{\varepsilon} = \int_0^1 \mu I_{\varepsilon} d\mu + \int_{-1}^0 \mu I_{\varepsilon} d\mu. \quad (24)$$

Первое слагаемое полностью определяется заданной граничной интенсивностью излучения, второе запишем в виде дроби. Тогда выражение (24) примет вид

$$S_{\varepsilon} = a_{\varepsilon} U_{\varepsilon} + b_{\varepsilon}, \quad (25)$$

$$\text{где } a_\varepsilon = \frac{\int_{-1}^0 \mu I_\varepsilon d\mu}{\frac{1}{c} \int_{-1}^1 I_\varepsilon d\mu}; \quad b_\varepsilon = \int_0^1 \mu I_\varepsilon d\mu.$$

Подставив соотношение (9) в формулу (25) и выполнив интегрирование по спектру, получим

$$S_0^{n+1} = \int_0^\infty a_\varepsilon \alpha_{\varepsilon,1/2} U_{\varepsilon r} \left( T_{1/2}^{n+1} \right) d\varepsilon + \langle a_\beta \rangle \beta_{1/2}^{n+1} + b, \quad (26)$$

$$\text{где } \langle a_\beta \rangle = \frac{\int_0^\infty a_\varepsilon \beta_{1/2}^p d\varepsilon}{\int_0^\infty \beta_{1/2}^p d\varepsilon}; \quad b = \int_0^\infty b_\varepsilon d\varepsilon.$$

При помощи уравнения (15) исключим функцию  $\beta_{i+1/2}^{n+1}$  из выражения (26). Получим следующее соотношение:

$$S_0^{n+1} = A_0 \left( T_{1/2}^{n+1} \right) + b, \quad (27)$$

$$\text{где } A \left( T_{1/2}^{n+1} \right) = \int_0^\infty a_\varepsilon \alpha_{\varepsilon,1/2} U_{\varepsilon r} \left( T_{1/2}^{n+1} \right) d\varepsilon + \langle a_\beta \rangle \frac{c\tau \langle \kappa \left( T_{1/2}^{n+1} \right) \rangle + E \left( T_{1/2}^{n+1} \right) - E \left( T_{1/2}^n \right)}{c\tau \langle \kappa_\beta \rangle_{1/2}}.$$

Первый член в правой части выражения (27) является функцией температуры, а второй полностью определяется граничным условием.

На правой границе согласование граничных условий происходит аналогично.

Таким образом, данный подход можно использовать в программных комплексах, в которых имеется решатель уравнения теплопроводности. При этом требуется только специальным образом рассчитывать плотность энергии и пробег излучения, в остальном никаких существенных доработок в существующем коде не требуется.

### Исследование предельных случаев

Рассмотрим первый случай, когда  $\kappa_{\varepsilon a, i+1/2} \rightarrow \infty$ . В этом случае  $\alpha_{\varepsilon, i+1/2} \rightarrow \frac{c\tau \kappa_{\varepsilon a, i+1/2}}{1 + c\tau \kappa_{\varepsilon a, i+1/2}} \rightarrow 1$ , а

$\beta_{\varepsilon, i+1/2} \rightarrow \frac{1}{3h^2 \kappa_{\varepsilon a, i+1/2}^2} \rightarrow 0$ . Тогда из выражения (14) следует

$$\langle \kappa_\beta \rangle_{i+1/2} \rightarrow \frac{\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\kappa_{\varepsilon a, i+1/2}}}{\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\kappa_{\varepsilon a, i+1/2}^2}} \rightarrow \infty,$$

а выражение (13) переходит в

$$\langle \kappa \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) \rangle \rightarrow \int_0^\infty \kappa_{\varepsilon a, i+1/2} \left[ \left( 1 - \frac{c\tau \kappa_{\varepsilon a, i+1/2}}{1 + c\tau \kappa_{\varepsilon a, i+1/2}} \right) U_{\varepsilon r} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) \right] d\varepsilon \rightarrow \frac{1}{c\tau} \sigma \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right)^4.$$

В этом случае из уравнения (15) следует, что  $\beta_{i+1/2}^{n+1} \rightarrow 0$ . Выражения в формулах (19) при этом примут вид

$$\chi_{i, i+1/2} = \langle L_{T_p, i} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) \rangle = \int_0^\infty L_{\varepsilon, i} U_{\varepsilon r} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) d\varepsilon;$$

$$\chi_{i,i-1/2} = \left\langle L_{Tl,i} \left( T_{i-1/2}^{n+1} \right) \right\rangle = \int_0^{\infty} L_{\varepsilon,i} U_{\varepsilon r} \left( T_{i-1/2}^{n+1} \right) d\varepsilon.$$

Уравнение (18) можно записать в виде

$$S_i^{n+1} = -\frac{cr_i^\nu}{3h} \frac{\left\langle L_{Tp,i} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) \right\rangle - \left\langle L_{Tl,i} \left( T_{i-1/2}^{n+1} \right) \right\rangle}{T_{i+1/2}^{n+1} - T_{i-1/2}^{n+1}} \left( T_{i+1/2}^{n+1} - T_{i-1/2}^{n+1} \right).$$

Величина  $\frac{\left\langle L_{Tp,i} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) \right\rangle - \left\langle L_{Tl,i} \left( T_{i-1/2}^{n+1} \right) \right\rangle}{T_{i+1/2}^{n+1} - T_{i-1/2}^{n+1}}$  есть не что иное, как разностный аналог усреднения спектрального пробега по Росселанду. Уравнение (21) в этом случае можно записать в виде

$$E \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) + \sigma \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right)^4 - E \left( T_{i+1/2}^n \right) - \sigma \left( T_{i+1/2}^n \right)^4 + \frac{\tau}{h} \left( r_{i+1}^\nu S_{i+1}^{n+1} - r_i^\nu S_i^{n+1} \right) = 0. \quad (28)$$

Уравнение (28) приобретает вид классического уравнения для приближения лучистой теплопроводности. Данный предельный случай соответствует условию его применимости. Граничное условие (27) на левой границе в этом случае примет вид  $S_0^{n+1} = \int_0^{\infty} a_\varepsilon U_{\varepsilon r} \left( T_{1/2}^{n+1} \right) d\varepsilon + b$ .

Рассмотрим второй случай, когда  $\kappa_{\varepsilon a, i+1/2} \rightarrow 0$ . В этом случае  $\alpha_{\varepsilon, i+1/2} \rightarrow h^2 \kappa_{\varepsilon, i+1/2}^2 \rightarrow 0$ ,  $\beta_{\varepsilon, i+1/2} = \frac{L_{\varepsilon, i+1} U_{\varepsilon, i+3/1}^p + L_{\varepsilon, i} U_{\varepsilon, i-1/1}^p}{L_{\varepsilon, i+1} + L_{\varepsilon, i}}$ . Тогда из выражения (14) следует

$$\langle \kappa \beta \rangle_{i+1/2} = \frac{\int_0^{\infty} \kappa_{\varepsilon a, i+1/2} \beta_{\varepsilon, i+1/2} d\varepsilon}{\int_0^{\infty} \beta_{\varepsilon, i+1/2} d\varepsilon} \rightarrow 0,$$

а выражение (13) переходит в

$$\left\langle \kappa \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) \right\rangle = \int_0^{\infty} \kappa_{\varepsilon a, i+1/2} \left[ \left( \alpha_{\varepsilon, i+1/2} - 1 \right) U_{\varepsilon r} \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) \right] d\varepsilon \rightarrow 0.$$

Следовательно, уравнение (12) примет вид

$$\frac{E \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) - E \left( T_{i+1/2}^n \right)}{\tau} = 0. \quad (29)$$

Уравнение (29) отвечает случаю, когда нет взаимодействия излучения и вещества.

Обратим внимание на выражение  $\frac{c\tau \left\langle \kappa \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) \right\rangle + E \left( T_{i+1/2}^{n+1} \right) - E \left( T_{i+1/2}^n \right)}{c\tau \langle \kappa \beta \rangle}$ , которое присутствует во многих формулах. В рассматриваемом предельном случае при расчете данного выражения возникает неопределенность типа  $\frac{0}{0}$ . Для выхода из данной ситуации будем ограничивать снизу безразмерное выражение  $c\tau \langle \kappa \beta \rangle$ <sup>2</sup> некоторой достаточно малой константой, которая подбирается экспериментально. В приведенном далее расчете данная константа полагалась равной  $10^{-5}$ .

<sup>2</sup> Данное выражение характеризует скорость обмена энергией между излучением и веществом. Если вместо нуля подставить малое значение, то, очевидно, получаемое решение немного исказится.

### Линеаризация разностных уравнений

Для применения метода Ньютона к системе уравнений (22) разложим все нелинейные члены в ряд Тейлора с точностью до членов первого порядка:

$$\begin{aligned} & \tilde{E}(T_{i+1/2}^{n+1}) + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial T} \Delta T_{i+1/2}^{s+1} - \tilde{E}(T_{i+1/2}^n) + \frac{\tau}{h} [r_{i+1}^\nu (S_{i+1}^s + \Delta S_{i+1}^{s+1}) - r_i^\nu (S_i^s + \Delta S_i^{s+1})] = 0; \\ & S_i^s + \Delta S_i^{s+1} = -\frac{cr_i^\nu}{3h} \left\{ l_{r,i} (T_{i+1/2}^s, T_{i-1/2}^s) (T_{i+1/2}^s - T_{i-1/2}^s) + \right. \\ & \quad + \left[ \frac{\partial l_{r,i} (T_{i+1/2}^s, T_{i-1/2}^s)}{\partial T_{i+1/2}} (T_{i+1/2}^s - T_{i-1/2}^s) + l_{r,i} (T_{i+1/2}^s, T_{i-1/2}^s) \right] \Delta T_{i+1/2}^{s+1} - \\ & \quad \left. - \left[ \frac{\partial l_{r,i} (T_{i+1/2}^s, T_{i-1/2}^s)}{\partial T_{i-1/2}} (T_{i+1/2}^s - T_{i-1/2}^s) - l_{r,i} (T_{i+1/2}^s, T_{i-1/2}^s) \right] \Delta T_{i-1/2}^{s+1} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь  $s$  — номер ньютоновской итерации;  $\Delta T_{i+1/2}^{s+1} = T_{i+1/2}^{s+1} - T_{i+1/2}^s$ ;  $\Delta S_i^{s+1} = S_i^{s+1} - S_i^s$ .

Линеаризованная система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} & A_{i+1/2} \Delta T_{i+1/2}^{s+1} + B_{i+1/2} \Delta S_{i+1}^{s+1} - C_{i+1/2} \Delta S_i^{s+1} = D_{i+1/2}; \\ & \Delta S_i^{s+1} = -P_i \Delta T_{i+1/2}^{s+1} - H_i \Delta T_{i-1/2}^{s+1} - F_i. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь

$$\begin{aligned} & A_{i+1/2} = \left( \frac{\partial \tilde{E}}{\partial T} \right)_{i+1/2}^s; \quad B_{i+1/2} = \frac{\tau}{h} r_{i+1}^\nu; \quad C_{i+1/2} = \frac{\tau}{h} r_i^\nu; \quad D_{i+1/2} = \tilde{E}_{i+1/2}^n - \tilde{E}_{i+1/2}^s - \frac{\tau}{h} (S_{i+1}^s - S_i^s); \\ & P_i = -\frac{cr_i^\nu}{3h} \left( \frac{\partial l_{r,i}}{\partial T_{i+1/2}} + l_{r,i} \right); \quad H_i = \frac{cr_i^\nu}{3h} \left( \frac{\partial l_{r,i}}{\partial T_{i-1/2}} - l_{r,i} \right); \quad F_i = S_i^s + \frac{cr_i^\nu}{3h} (T_{i+1/2}^s - T_{i-1/2}^s). \end{aligned}$$

Система линейных уравнений (30) дополняется уравнениями для граничных условий на правой и левой границах следующего вида:

$$\Delta S_N^{s+1} = K_N \Delta T_{N-1/2}^{s+1} + M_N; \quad \Delta S_0^{s+1} = K_0 \Delta T_{1/2}^{s+1} + M_0, \quad (31)$$

где  $K_N = \frac{\partial A_N}{\partial T_{N-1/2}}$ ;  $M_N = A_N (T_{N-1/2}^s) - S_N^s$ ;  $K_0 = \frac{\partial A_0}{\partial T_{1/2}}$ ;  $M_0 = A_0 (T_{1/2}^s) - S_0^s$ .

Система уравнений (30), (31) содержит  $2N+1$  уравнение, где  $N$  — число интервалов относительно неизвестных  $T, S$ . Перенумеруем их следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & 2N & 2N+1 \\ S_0, & T_{1/2}, & S_1, & \dots & T_{N-1/2}, & S_N \end{array}$$

Полученная система уравнений решается методом Гаусса для трехдиагональной матрицы.

### Примеры численных расчетов

В качестве примера рассмотрим решение второй задачи Флека из работы [7] с использованием описанного подхода.

Постановка задачи следующая. На поверхности плоского слоя толщиной 4 см задан изотропный планковский источник излучения с температурой 1 кэВ. Слой состоит из трех физических областей:  $x \in \{0; 2\}$  — первая;  $x \in \{2; 2,4\}$  — вторая;  $x \in \{2,4; 4\}$  — третья<sup>3</sup>. Коэффициент поглощения вычисляется по формуле  $\kappa_\varepsilon = \kappa_0 \frac{1 - \exp(-\varepsilon/T)}{\varepsilon^3}$ ;  $\kappa_0 = 27$  в первой и третьей областях,  $\kappa_0 = 10\,000$  во второй области. Уравнение состояния вещества взято в виде  $E = 0,81T$ .

Пространственная сетка — неравномерная в каждой области и имеет вид  $x_0 = 0; 0,004; 0,04; x_3 = 0,1; \dots; x_{21} = 1,9$  (18 интервалов,  $h = 0,1$  см);  $x_{22} = 1,987; 1,999; 2; 2,001; 2,004; 2,013; x_{28} = 2,04; \dots; x_{36} = 2,36$  (8 интервалов,  $h = 0,04$  см);  $x_{37} = 2,396; 2,4; 2,404; 2,44; x_{41} = 2,5; \dots; x_{56} = 4$  (15 интервалов,  $h = 0,1$  см). Число интервалов в первой, второй и третьей областях равно 24, 14, 18 соответственно, итого 56 интервалов по пространству. Сетка по  $\mu$  задавалась равномерной с 16 интервалами. Сетка по спектру состояла из 28 групп:  $\{\varepsilon\} = 0,0001; 0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,1; 0,15; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,7; 1,0; 1,4; 1,8; 2,2; 2,6; 3,0; 3,5; 4,0; 4,5; 5,0; 5,5; 6,0; 7,0; 8,0; 10,0; 12,0; 15,0$ .

Задача рассчитывалась с постоянным шагом по времени  $\tau = 10^{-4}$  с. Результаты расчета данной задачи представлены на рис. 1, 2. За *точное* принято решение, полученное в спектральной квазидиффузионной постановке.

Как видно из рисунков, решение, полученное в постановке лучистой теплопроводности с учетом спектральных и кинетических эффектов, не только качественно, но и количественно близко к профилю температуры вещества, рассчитанному в классической спектральной квазидиффузионной постановке. Количественное отличие по температуре вещества в норме  $L_2$  на момент времени  $ct = 9$  см составляет 0,14%. Отметим, что с использованием классического приближения лучистой теплопроводности получить профиль температуры с нарушением принципа максимума теоретически невозможно.

Время расчета данной задачи в классической спектральной квазидиффузионной постановке составило 34 с, с использованием предлагаемого подхода — 24 с. Как видно, экономия не очень большая. Это объясняется тем, что на этапе лучистой теплопроводности приходится в каждой пространственной точке рассчитывать несколько интегралов по спектру, что приводит к удорожанию счета.

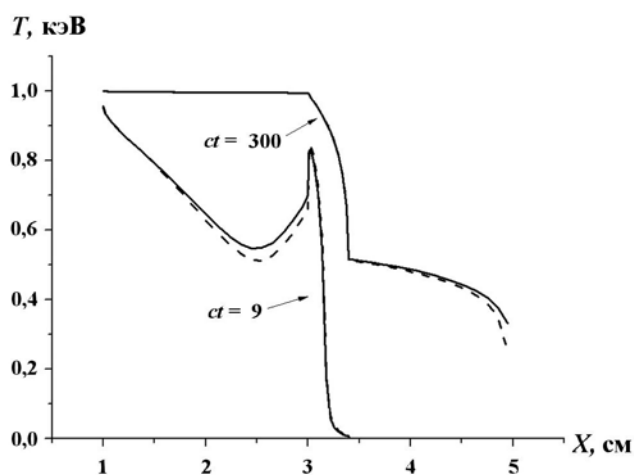


Рис. 1. Профиль температуры вещества на моменты времени  $ct = 9$  и 300 см: — — расчет в классической квазидиффузионной постановке; - - - — расчет по предлагаемому методу

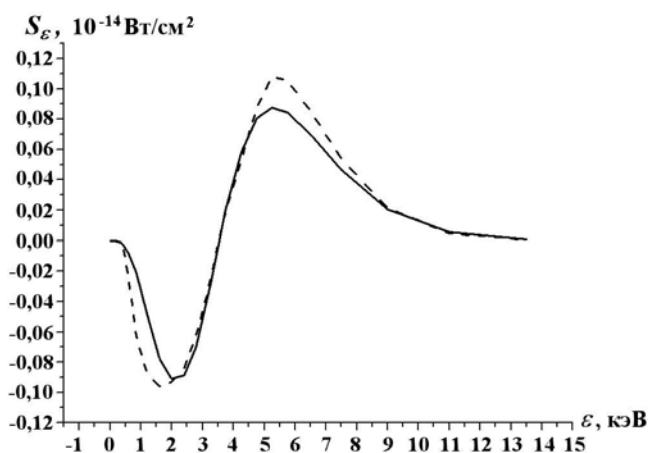


Рис. 2. Интегральные по времени спектральные потоки излучения на границе первой и второй областей на момент времени  $ct = 9$  см: — — расчет в классической квазидиффузионной постановке; - - - — расчет по предлагаемому методу

<sup>3</sup>Здесь и далее значения  $x$  даны в сантиметрах.

### Заключение

Учет спектральных и кинетических эффектов в постановке лучистой теплопроводности позволяет рассчитывать задачи переноса излучения с приемлемой точностью. Существенно сократить время счета, используя усреднение исходных уравнений по спектральной переменной, не удалось, поскольку на этапе лучистой теплопроводности приходится считать в каждом пространственном интервале несколько интегралов по спектру. Зато удалось сократить число итераций по нелинейности температуры, что позволило считать задачи с более крупным временным шагом.

Очевидно, что построение итерационного процесса по нелинейности по температуре для кинетического уравнения является чрезвычайно сложной задачей. Для уравнения типа теплопроводности данная задача существенно упрощается. В этом случае легко строится ньютоновский итерационный процесс, который обладает высокой скоростью сходимости. Как показала практика расчетов больших задач с числом групп по спектру больше 400, можно получить выигрыш по времени до 4 раз за счет более крупного шага по времени при отличии в решении  $\sim 1\text{--}2\%$  в сравнении с расчетом в полной кинетической постановке.

### Список литературы

1. *Гольдин В. Я.* Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1964. Т. 4, № 6. С. 1078—1087.  
*Goldin V. Ya.* Kvizidifuzionny metod resheniya kineticheskogo uravneniya // Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz. 1964. T. 4, № 6. S. 1078—1087.
2. *Немчинов И. В.* Об усредненных уравнениях переноса излучения и их использование при решении газодинамических задач // ПММ. 1970. Т. 34, № 4. С. 706—721.  
*Nemchinov I. V.* Ob usrednennykh uravneniyakh perenosa izlucheniya i ikh ispolzovanie pri reshenii gasodinamicheskikh zadach // PMM. 1970. T. 34, № 4. S. 706—721.
3. *Филippyчев Д. С., Четверушкин В. Н.* Об одном способе усреднения уравнений диффузионного типа по энергиям фотонов // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1976. Т. 6, № 6. С. 1601—1605.  
*Filippychev D. S., Chetverushkin V. N.* Ob odnom sposobe usredneniya uravneniy diffuzionnogo tipa po energiyam fotonov // Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz. 1976. T. 6, № 6. S. 1601—1605.
4. *Карлыханов Н. Г.* Метод расчета задач переноса излучения, с использованием усредненных по спектру уравнений // Там же. 1997. Т. 37, № 4. С. 494—498.  
*Karlykhanov N. G.* Metod rascheta zadach perenosa izlucheniya, s ispolzovaniem usrednennykh po spektru uravneniy // Tam zhe. 1997. T. 37, № 4. S. 494—498.
5. *Карлыханов Н. Г., Козманов М. Ю.* Учет кинетических эффектов в диффузионном приближении для расчета переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2010. Вып. 4. С. 3—9.  
*Karlykhanov N. G., Kozmanov M. Yu.* Uchet kineticheskikh effektov v diffuzionnom priblizhenii dlya rascheta perenosa izlucheniya // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2010. Vyp. 4. S. 3—9.
6. *Карлыханов Н. Г.* Применение метода квазидиффузии для решения задач переноса излучения // Там же. Вып. 1. С. 32—38.  
*Karlykhanov N. G.* Primenenie metoda kvazidifuzii dlya resheniya zadach perenosa izlucheniya // Tam zhe. Vyp. 1. S. 32—38.
7. *Fleck J. F., Cummings Jr. and J. D.* An implicit Monte Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8. P. 313—342.



INCORPORATING SPECTRAL AND KINETIC EFFECTS IN THE RADIATIVE HEAT TRANSFER APPROXIMATION FOR RADIATIVE TRANSFER SIMULATIONS / N. G. Karlykhanov (FSUE “RFNC-VNIITF n.a. Academician E.I. Zababakhin”, Snezhinsk, Chelyabinsk region).

The paper considers an approach to averaging the radiative transfer equation over spectrum and angular variable. As distinct from the known methods, the algorithm under consideration reduces an averaged problem to an equation for the radiative heat transfer approximation. It is demonstrated that the simulation results obtained using the proposed algorithm – provided that some conditions are satisfied – are close to the simulation results obtained in the kinetic statement. As applied to optically thick media, this algorithm is shown to naturally transform into the radiative heat transfer approximation with a mean Rosseland path.

*Keywords:* heat transfer, quasi-diffusion, quasi-spectral property.

---

УДК 519.6

## ПРИМЕНЕНИЕ РЕЛАКСАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ С ТРЕЩИНАМИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОПЫТОВ С ОБРАЗЦАМИ ВВ НА УСТАНОВКЕ СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ ГОПКИНСОНА

О. М. Величко

(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Представлены однокомпонентная вязкоупругая модель среды с трещинами, сформулированная на основе работ американских авторов, и ее модификация в части расчета вязкой релаксации и кинетики роста трещин. Разработан приближенный вычислительный алгоритм, ускоряющий процесс подбора параметров модели для ВВ на основе октогена. Критерием подбора является приемлемое согласие результатов расчетов и экспериментов с образцами ВВ на установке составных стержней Гопкинсона из работы российских авторов. Численное моделирование процессов деформирования образцов ВВ проводится на основе расчетной модели, реализованной методом Годунова.

*Ключевые слова:* ВВ, деформирование и разрушение, вязкоупругая модель с трещинами, метод Годунова, численное моделирование.

### Введение

Разработке реологических моделей поведения взрывчатых веществ (ВВ) при низкоскоростных нагрузках посвящено много исследований. В работе [1] представлена расчетная модель вязкоупругой среды с кинетикой развития трещин за счет сдвиговых напряжений, реализованная методом Годунова [2]. В основу расчетного алгоритма положены связный метод решения разностных уравнений гидроупругости и решение задачи о распаде разрыва в гидроупругой среде. Деформирование и возможное разрушение материала при механических воздействиях описываются на основе вязкоупругой модели с трещинами [3], разработанной в Лос-Аламосской национальной лаборатории. Наряду с определяющими математическими соотношениями расчетная модель включает в себя материальные константы и параметры, подобранные для взрывчатого состава РВХ-9501. Эта модель реализована в коммерческих компьютерных кодах ABAQUS [4], DYNA3D [5] под названием ViscoScram и применяется для моделирования низкоскоростных воздействий на твердые составные ВВ [6–8].

Серия работ российских авторов [9–15] посвящена исследованию реакции на механические воздействия взрывчатого состава на основе флегматизированного октогена. В работах [9, 10] приведены два откорректированных по сравнению с РВХ-9501 набора параметров вязкоупругой модели с трещинами, которые использованы для описания результатов опытов [11, 12] по низкоскоростному нагружению цилиндрических образцов ВВ. В исследованиях [13, 14] по результатам расчетно-экспериментального анализа ударного нагружения полусферических оболочек определяются вязкоупругие параметры хаотически армированного композитного ВВ на основе октогена. В работе [15] приведены временные зависимости нагрузок, зафиксированные в экспериментах по динамическому сжатию цилиндрических образцов ВВ на основе октогена на установке составных стержней Гопкинсона (ССГ).

В данной работе сделана попытка откалибровать однокомпонентную вязкоупругую модель среды с трещинами по результатам шести экспериментов из [15]. Разработан приближенный вычислительный алгоритм, ускоряющий процесс подбора параметров модели. Критерием подбора является приемлемое согласие расчетов с экспериментальными данными. Численное моделирование процессов деформирования образцов ВВ проводится на основе расчетной модели [1].

## Определяющие соотношения модели вязкоупругой среды с разрушением

Модель [3] использует реологию пяти параллельно соединенных элементов Максвелла. Наряду с моделью [3] рассмотрим вязкоупругую модель Максвелла с одним элементом. В цилиндрических координатах  $x, r, \theta$  с осью симметрии  $Ox$  представим компоненты тензора напряжений  $\tau_{ij}$  в виде выражения через гидродинамическую составляющую  $p$  и девиаторную часть  $s_{ij}$ :

$$\tau_{ij} = s_{ij} - p\delta_{ij}, \quad -p = \frac{1}{3}(\tau_{xx} + \tau_{rr} + \tau_{\theta\theta}), \quad i, j = x, r, \theta.$$

Сдвиговые напряжения  $s_{ij}$  описываются одним элементом Максвелла, состоящим из двух компонентов, моделирующих сопротивление сдвигу (модуль сдвига  $\mu$ ) и вязкость (время релаксации  $\tau$ ). Степень повреждения материала характеризуется текущим размером трещин  $c$  и характерным размером  $c^a$ , который является нормирующей эмпирической константой.

Скорость изменения составляющих полного девиатора напряжений определяется по формуле

$$\dot{s}_{ij} = \frac{2\mu\dot{e}_{ij} - \frac{s_{ij}}{\tau} - 3\left(\frac{c}{c^a}\right)^2 \frac{\dot{c}}{c^a} s_{ij}}{1 + \left(\frac{c}{c^a}\right)^3}, \quad (1)$$

где  $\dot{e}_{ij}$  — девиатор тензора скоростей деформации.

Предполагается, что изначально трещины одинакового размера  $ctr_0$  равномерно распределены по всему объему среды вне зависимости от направления. Рост трещин происходит по двум режимам, медленному и быстрому:

$$\dot{c} = \frac{dc}{dt} = \begin{cases} v_{\max} \frac{2}{m1} \left(\frac{K}{K_1}\right)^{m1}, & K \leq K_w; \\ v_{\max} \left[1 - \left(\frac{K_0}{K}\right)^2\right]^{m2}, & K > K_w. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $v_{\max}$  — максимальная скорость роста трещины;  $K_0$  — трещиностойкость;  $K = \sqrt{\pi c} \sigma_{eff}$ ,  $\sigma_{eff} = \frac{1}{3} \sqrt{(s_{rr} - s_{xx})^2 + (s_{rr} - s_{\theta\theta})^2 + (s_{xx} - s_{\theta\theta})^2 + 6s_{xr}s_{xr}}$ ;  $m1, m2$  — показатели степенного роста трещины для двух режимов;  $K_1 = K_0 \sqrt{1 + \frac{2}{m1} \left(1 + \frac{2}{m1}\right)^{1/m1}}$ ;  $K_w = K_0 \sqrt{1 + \frac{2}{m1}}$ . Переход между медленным и быстрым режимами скорости роста трещин происходит при достижении величиной  $K$  порогового значения  $K_w = \text{const}$ . При  $K = K_w$  и  $m2 \neq 1$  скорость терпит разрыв.

## Постановка опытов и анализ экспериментальных данных

Геометрия установки ССГ из работы [15] приведена на рис. 1. Испытуемый образец ВВ устанавливается между стержнями Гопкинсона. Нагружение осуществляется с помощью разгоняемого взрывом ударника. Датчики, накапливающие временную зависимость продольного напряжения, установлены в нагружающем и опорном стержнях на расстоянии 20 см от передних торцов. Радиус цилиндров  $R_2 = 1$  см; линейные размеры конструкции:  $X_1 = 20$  см;  $X_2 = 120$  см;  $X_3 = 121$  см;  $X_4 = 221$  см. Импульс нагрузки, регистрируемый датчиком в нагружающем стержне, — *нагружающий* импульс — рассматривается в численных расчетах как заданная входная нагрузка. Импульс нагрузки, регистрируемый датчиком в опорном стержне, — *опорный* импульс — служит эталоном для сравнения с результатами расчетов.

На рис. 2, 3 приведены временные зависимости нагружающего и опорного импульсов напряжения в стержнях, зарегистрированные в шести экспериментах из [15]. Представленные результаты отличаются уровнем нагрузки, реализуемым в нагружающем стержне. Сравнение рис. 2, а и 2, б, а также

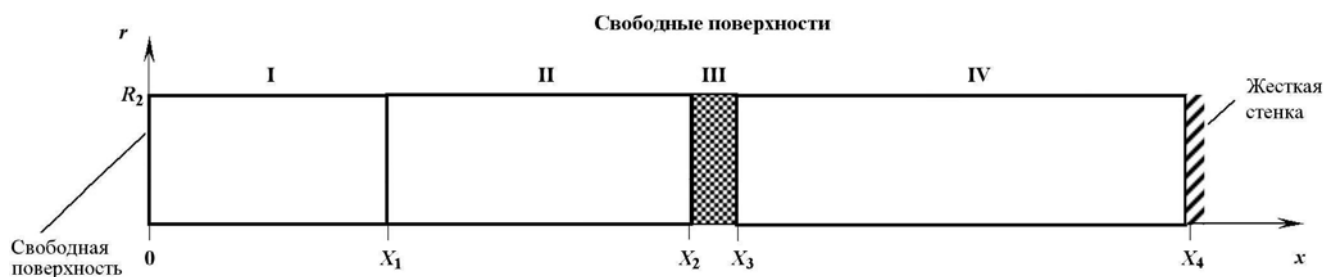


Рис. 1. Начальная геометрия опытов по методу ССГ: I — ударник; II — нагружающий стержень; III — исследуемое ВВ цилиндрической формы; IV — опорный стержень

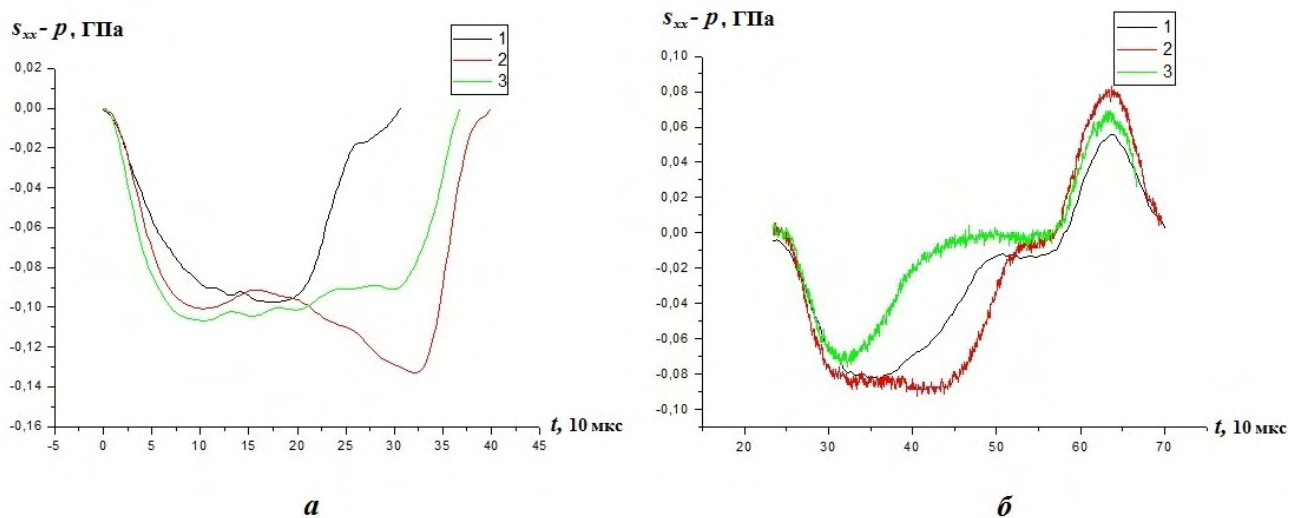


Рис. 2. Нагружающие (а) и опорные (б) импульсы в экспериментах: 1–3 —номера экспериментов

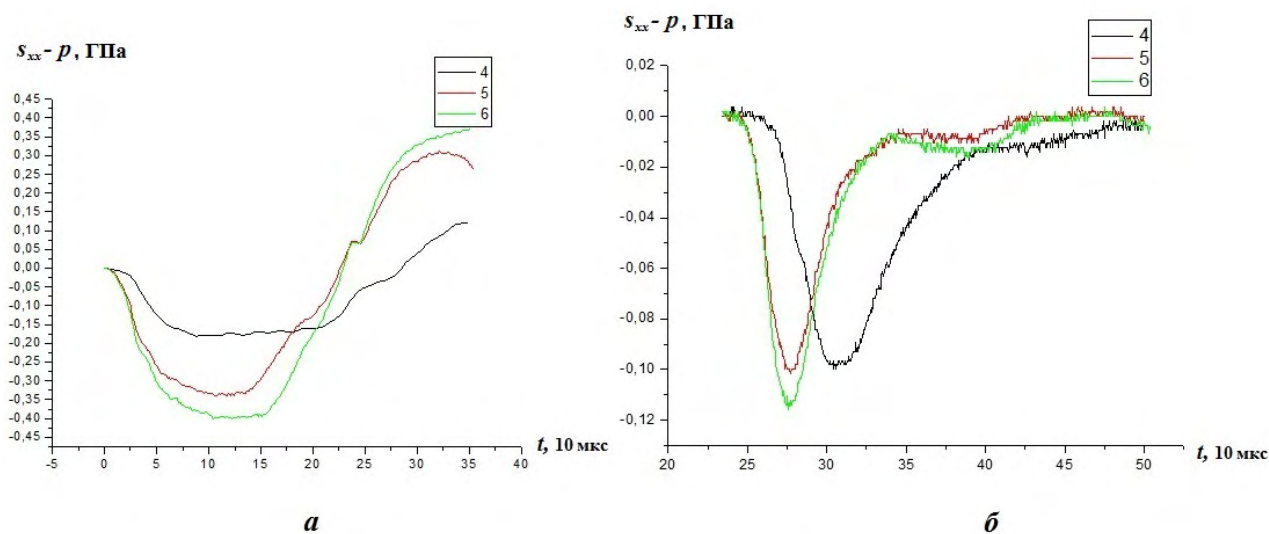


Рис. 3. Нагружающие (а) и опорные (б) импульсы в экспериментах: 4–6 —номера экспериментов

рис. 3, *a* и 3, *б* показывает, что во всех экспериментах амплитуда и длительность нагружающего импульса превышают амплитуду и длительность опорного импульса. Этот экспериментальный факт можно описать, применив механизмы модели вязкоупругой среды с трещинами в материале ВВ.

Амплитуда входящего на образец ВВ нагружающего импульса уменьшается под действием вязкой релаксации девиатора тензора напряжений. При этом величина  $K$  растет под действием приложенной нагрузки, достигает порогового значения  $K_w$ , осуществляется переход во второй, быстрый режим роста трещин, размер трещин достигает некоторого критического значения и образец теряет прочность еще до момента окончания действия нагружающего импульса.

Отметим, что в эксперименте 2 разрушение образца наступает позже, чем в эксперименте 1, несмотря на то, что амплитуда нагружающего импульса в эксперименте 2 заведомо больше. Можно предположить, что временный спад нагрузки в эксперименте 2 (в интервале времени  $t = 9 \div 16$ ,\* см. рис. 2, *a*) замедляет рост трещин и разрушение образца наступает позже. Либо есть другое объяснение: в эксперименте 2 исследовался более прочный образец, т. е. начальный размер трещин  $ctr_0$  в нем был меньше.

### Расчетное моделирование экспериментов с опубликованными наборами констант модели

Рассмотрим результаты расчетного моделирования экспериментов из работы [15] с использованием параметров модели, приведенных в работах [3, 9, 10].

Все расчетные результаты, приведенные в настоящей работе, получены на сетке 4 из работы [1], для которой линейный размер ячейки в образце ВВ составляет 0,01 см. Для описания нагружающего и опорного стержней, выполненных из титанового сплава, используются трехчленное уравнение состояния с параметрами  $\rho_0 = 4,39 \text{ г/см}^3$ ,  $c_0 = 4,9 \text{ км/с}$ ,  $\gamma = 2,2$ ,  $n = 3$  и модель идеальной упругопластической среды с параметрами  $G_0 = 43,12 \text{ ГПа}$ ,  $Y_0 = 1,0 \text{ ГПа}$ . Для описания шаровой составляющей тензора напряжений ВВ используется трехчленное уравнение состояния с параметрами  $\rho_0 = 1,895 \text{ г/см}^3$ ,  $c_0 = 2,52 \text{ км/с}$ ,  $\gamma = 2,0$ ,  $n = 7,003$ . Для описания реакции ВВ на механические нагрузки применяется релаксационная модель вязкоупругости с трещинами. В расчетах учитывается приведенная в [15] зависимость упругих свойств материала ВВ от скорости деформации вида  $E = 850 \log \tilde{\varepsilon} + 85 \log \tilde{\varepsilon}^2 + E_0$ ,  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\varepsilon_0$ , где  $E$  [ГПа] — модуль Юнга,  $E_0 = 7,49 \text{ ГПа}$ ;  $\varepsilon$  [ $\text{с}^{-1}$ ] — интенсивность скорости деформации,  $\varepsilon_0 = 1 \text{ с}^{-1}$ .

Ударник исключен из расчетов. Вместо контактной границы на переднем торце нагружающего стержня задается временная зависимость нагружающего импульса, зарегистрированная в моделируемом эксперименте. На опорном стержне установлен датчик, накапливающий расчетную временную зависимость продольного напряжения. Цель расчетов — получить наилучшее согласие с импульсами нагрузки на опорном стержне, зарегистрированными в шести экспериментах из работы [15].

На рис. 4, *a*, *б* приведено сравнение опорного импульса, полученного соответственно в экспериментах 1 и 3 [15], и результатов численных расчетов с параметрами модели из работ [3, 9, 10] (табл. 1–3). Из рисунков видно, что расчеты с предложенными наборами параметров описывают экспериментальные кривые с заметной погрешностью.

В расчете эксперимента 1 вязкая релаксация [3] недостаточно уменьшает импульс нагрузки. Параметры разрушения [3, 10] обеспечивают слишком низкую скорость роста трещин в первом (медленном) режиме, в результате чего поздно реализуется переход во второй (быстрый) режим. Параметры [9], наоборот, обеспечивают слишком высокую скорость роста трещин в первом режиме, и образец теряет прочность уже к моменту  $t = 30$  (см. рис. 4, *a*).

В расчете эксперимента 3 вязкая релаксация [3, 10] недостаточно уменьшает импульс нагрузки, а параметры разрушения [3, 10] не обеспечивают перехода во второй (быстрый) режим. Эксперимент 3 не удастся рассчитать до конца с параметрами [9], поскольку трещины в материале ВВ увеличиваются до двух-трех характерных размеров  $c^a$  уже к моменту  $t = 26$ , что приводит к разрушению материала ВВ (см. рис. 4, *б*).

\*Здесь и далее в тексте время измеряется в 10 мкс.

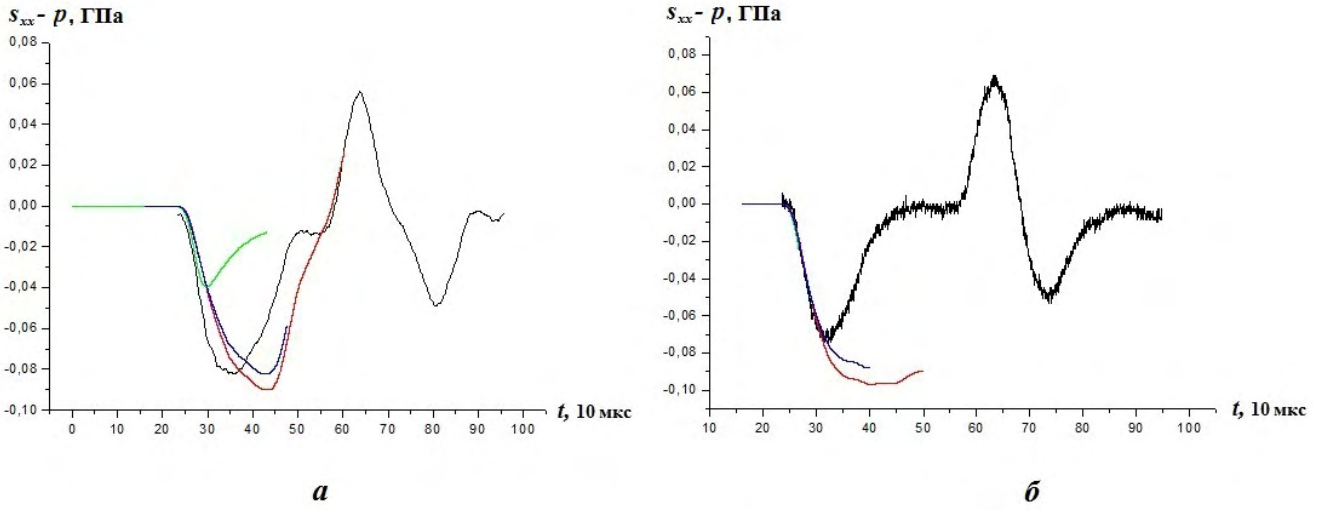


Рис. 4. Сравнение временных зависимостей напряжений на опорном стержне в экспериментах 1 (а) и 3 (б) с расчетными: — — расчет с параметрами [3]; — — расчет с параметрами [9]; — — расчет с параметрами [10]; — — эксперимент

Таблица 1

Параметры вязкоупругой модели ВВ с трещинами для американского взрывчатого состава РВХ-9501, опубликованные в работе [3]

$k$	1	2	3	4	5
$G^{(k)}$ , ГПа $\sum G^k = 3,23$ , ГПа	0,944	0,1739	0,5212	0,9085	0,6875
$1/\tau^{(k)}$ , $(10 \text{ мкс})^{-1}$	0	$7,32 \cdot 10^{-2}$	$7,32 \cdot 10^{-1}$	7,32	20,0
$c^a$ , см	$v_{\max}$ , км/с	$m1$	$K_0$ , ГПа $\cdot \text{см}^{1/2}$	$m2$	$ctr_0$ , см
0,1	0,3	10	$5,0 \cdot 10^{-3}$	1	0,0003

Таблица 2

Параметры вязкоупругой модели среды с трещинами для ВВ на основе октогена, опубликованные в работе [9]

$k$	1	2	3	4	5
$G^{(k)}$ , ГПа $\sum G^k = 5,4$ , ГПа	1,5757	0,29027	0,8700	1,5165	1,1476
$1/\tau^{(k)}$ , $(10 \text{ мкс})^{-1}$	0	$7,32 \cdot 10^{-2}$	$7,32 \cdot 10^{-1}$	7,32	20,0
$c^a$ , см	$v_{\max}$ , км/с	$m1$	$K_0$ , ГПа $\cdot \text{см}^{1/2}$	$m2$	$ctr_0$ , см
0,7	0,3	0,8	$5,0 \cdot 10^{-3}$	1	0,0003

Таблица 3

Параметры вязкоупругой модели среды с трещинами для ВВ на основе октогена, опубликованные в работе [10]

$k$	1	2	3	4	5
$G^{(k)}$ , ГПа $\sum G^k = 3,03$ , ГПа	0,344	0,071	0,421	1,1	1,1
$1/\tau^{(k)}$ , $(10 \text{ мкс})^{-1}$	0	$7,32 \cdot 10^{-3}$	$7,32 \cdot 10^{-2}$	$7,32 \cdot 10^{-1}$	2,0
$c^a$ , см	$v_{\max}$ , км/с	$m1$	$K_0$ , ГПа $\cdot \text{см}^{1/2}$	$m2$	$ctr_0$ , см
0,3	0,3	6	$4,5 \cdot 10^{-3}$	1	0,0003

### Приближенная модель вязкоупругой среды с трещинами

Рассмотрим одноэлементную модель вязкоупругой среды с трещинами. Построим приближенный вычислительный алгоритм, отражающий основные заложенные в модель механизмы, для оценки на качественном уровне влияния отдельных параметров модели на результаты расчетов.

Скорость изменения составляющих девиатора тензора напряжений в ВВ (формула (1)) определяется действием нескольких физических процессов.

Во-первых, это упругое деформирование:  $\dot{s}_{ij} = \frac{2\mu\dot{e}_{ij}}{1 + \left(\frac{c}{ca}\right)^3} = \frac{2E\dot{e}_{ij}}{2(1+\nu)\left[1 + \left(\frac{c}{ca}\right)^3\right]}$ . Соответ-

ственно  $\dot{\sigma}_{eff} = \frac{\dot{\sigma}^e}{1 + \left(\frac{c}{ca}\right)^3}$ , где  $\sigma^e$  — девиатор тензора напряжений в ВВ, рассчитанный в упругой постановке;  $\dot{s}_{ij}^e = 2\mu\dot{e}_{ij}$  без учета вязкой релаксации ( $1/\tau = 0$ ) и трещин ( $c = ctr_0 = 0$ ).

На рис. 5 сравниваются расчетные зависимости напряжений на опорном стержне, полученные в упругой постановке ( $\mu = 3,03$  ГПа), и кривые опорного импульса, зарегистрированные в трех экспериментах [15]. Отметим, что начальный этап нагружения хорошо описывается разрабатываемой моделью в чисто упругой постановке без вязкости и разрушения.

Датчик, накапливающий временные зависимости искомым величин в расчете, задан в точке на оси симметрии образца, для которой можно приближенно принять  $s_{rr}^e = -\frac{1}{2}s_{xx}^e$ ;  $s_{xr}^e = 0$ ;  $s_{\theta\theta}^e = -\frac{1}{2}s_{xx}^e$ ;  $\sigma_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}s_{xx}^e$ .

Второй процесс, который определяет скорость изменения составляющих девиатора тензора напряжений, — вязкая релаксация:  $\dot{s}_{ij} = -\frac{s_{ij}}{\tau\left[1 + \left(\frac{c}{ca}\right)^3\right]}$ . Соответственно  $\dot{\sigma}_{eff} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sigma_{eff}}{\tau\left[1 + \left(\frac{c}{ca}\right)^3\right]}$ .

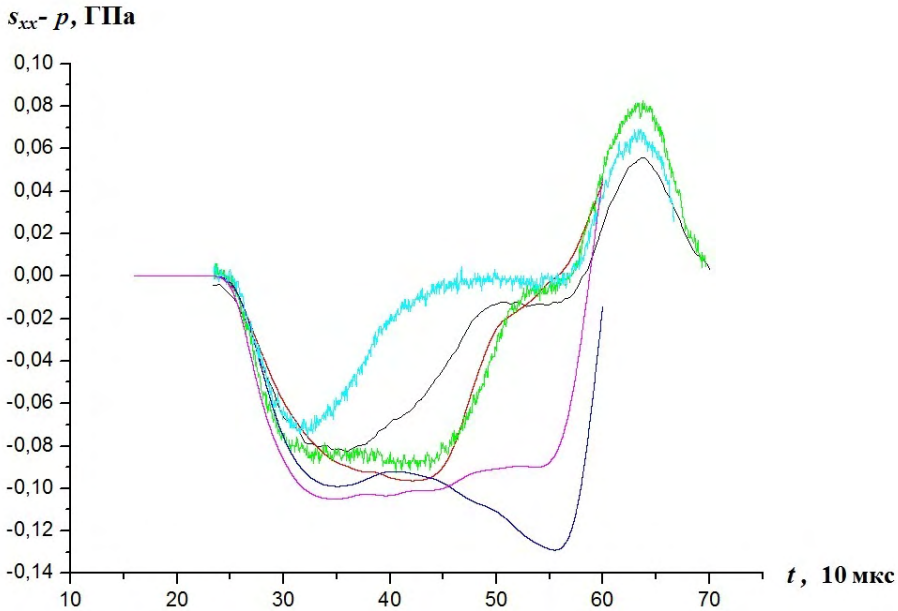


Рис. 5. Временные зависимости напряжений: — — эксперимент 1; — — расчет эксперимента 1; — — эксперимент 2; — — расчет эксперимента 2; — — эксперимент 3; — — расчет эксперимента 3

Третий процесс — разрушение материала:  $\dot{s}_{ij} = \frac{-3 \left(\frac{c}{ca}\right)^2 \frac{\dot{c}}{ca} s_{ij}}{1 + \left(\frac{c}{ca}\right)^3}$ . Соответственно  $\dot{\sigma}_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times$   
 $\times \frac{-3 \left(\frac{c}{ca}\right)^2 \frac{\dot{c}}{ca} \sigma_{eff}}{1 + \left(\frac{c}{ca}\right)^3}$ .

В сумме получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{\sigma}_{eff} = \frac{\dot{\sigma}^e}{1 + \left(\frac{c}{ca}\right)^3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_{eff}}{\tau \left[1 + \left(\frac{c}{ca}\right)^3\right]} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3 \left(\frac{c}{ca}\right)^2 \frac{\dot{c}}{ca} \sigma_{eff}}{1 + \left(\frac{c}{ca}\right)^3}.$$

Добавляем уравнение для расчета размера трещин  $c$  в первом (медленном) режиме:

$$\dot{c} = \frac{dc}{dt} = v_{\max} \frac{2}{m1} \left( \frac{\sqrt{\pi c} \sigma_{eff}}{K_1} \right)^{m1}. \quad (3)$$

Конструируем явный по времени алгоритм для приближенного вычисления величины  $K$ . Разбиваем временной интервал  $t = 20 \div 50$  на отрезки  $\Delta t = 1$ . Расчетную зависимость  $\sigma^e$ , полученную без учета вязкой релаксации ( $1/\tau = 0$ ) и трещин ( $c = ctr_0 = 0$ ), задаем в виде таблицы кусочно-постоянных значений на моменты времени  $t = 20, 21, \dots, 50$ :

$$t_0 = 20; \quad c(t_0) = ctr_0; \quad \sigma_{eff}(t_0) = 0; \quad t^n = t^{n-1} + \Delta t;$$

$$\sigma_{eff}^n = \sigma_{eff}^{n-1} + \frac{(\sigma^e)^{n+1} - (\sigma^e)^n}{1 + \left(\frac{c^n}{ca}\right)^3} - \frac{\Delta t}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_{eff}^{n-1}}{\tau \left[1 + \left(\frac{c^n}{ca}\right)^3\right]} - \frac{\Delta t}{\sqrt{2}} \frac{3 \left(\frac{c^n}{ca}\right)^2 \frac{c^n - c^{n-1}}{ca} \sigma_{eff}^{n-1}}{1 + \left(\frac{c^n}{ca}\right)^3}. \quad (4)$$

Для постоянного значения  $\sigma_{eff}$  на интервале времени  $\Delta t$  уравнение (3) имеет решение

$$(c^n)^{1-m1/2} = \frac{v_{\max}}{K_1^{m1}} \left(1 - \frac{m1}{2}\right) \sqrt{\pi} (\sigma_{eff}^n)^{m1} t + (ctr^{n-1})^{1-m1/2}, \quad (5)$$

$$m1 > 2, \quad K^n = \sqrt{\pi c^n \sigma_{eff}^n}, \quad K^n \leq K_w.$$

Скорость роста трещин в первом (медленном) режиме определяет время достижения величиной  $K$  порогового значения  $K_w$ . Переходы во второй (быстрый) режим для трех экспериментов определяются как точки пересечения прямой  $K = K_w$  и трех расчетных кривых  $K(t)$ . После перехода размер трещин достигает некоторого критического значения, как правило, составляющего примерно 0,6–0,7 характерного размера  $ca$ , и образец теряет прочность.

Расчеты по приближенной модели (4), (5) позволяют очень быстро оценивать время перехода из первого режима во второй для различных наборов параметров трещинообразования ( $m1, K_0, v_{\max}, ca$ ) и сравнивать его с экспериментальным. Это удобнее и существенно быстрее, чем проведение полномасштабных двумерных гидроупругодинамических расчетов с включенными блоками вязкости и разрушения.

### Выбор параметра релаксации

В работе [13] приведены результаты экспериментального исследования динамического деформирования полусферических оболочек, выполненных из хаотически армированного композитного ВВ, а в работе [14] на основе этих данных определены параметры изотропной вязкоупругой модели



поведения материала ВВ с одноэкспонентным и трехэкспонентным ядрами релаксации. Значения величины, обратной времени  $\tau$  релаксации касательных напряжений, для исследуемого материала составили в первом случае  $\tau^{-1} = 2 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ , во втором —  $\tau_1^{-1} = 2 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau_2^{-1} = 0,198 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau_3^{-1} = 0,099 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ .

Однако анализ экспериментальных данных показывает, что материал ВВ ведет себя по-разному при сжатии и растяжении. При сжатии ВВ деформируется в большей степени вязкоупруго, подобно другим пластическим материалам, например металлам. При растяжении ВВ ведет себя подобно хрупкому материалу и действие вязкости как бы прекращается. Поэтому наряду с подходом [14] к расчету  $\tau^{-1}$  рассмотрим подход [16], развитый применительно к металлам. Если пренебречь температурными зависимостями, то получим и применим в расчетах упрощенный вариант интерполяционной формулы зависимости времени релаксации от интенсивности касательных напряжений

$$\tau^{-1} = \tau_0^{-1} \left( \frac{\sigma_{eff}}{\rho_0 c_0^2} q \right)^{m3}, \quad (6)$$

где  $\rho_0 = 1,895 \text{ г/см}^3$ ;  $\tau_0^{-1} = 10^4 \text{ с}^{-1}$ ;  $c_0 = 2,52 \text{ км/с}$ ;  $q = 150$ ;  $m3 = 13$ .

На рис. 6 приведены расчетные импульсы напряжения на опорном стержне, полученные с использованием полномасштабной модели [3] и однокомпонентной модели с константами разрушения [3] (табл. 4) для двух экспериментов. Результаты для двух подходов хорошо согласуются, так что замена на более простую для анализа однокомпонентную модель вполне допустима.

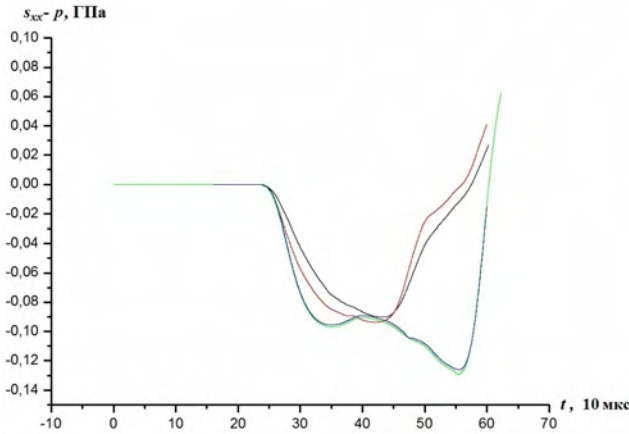


Рис. 6. Временные зависимости напряжений: — — расчет эксперимента 1 по модели [3]; — — расчет эксперимента 1 по однокомпонентной модели; — — расчет эксперимента 2 по модели [3]; — — расчет эксперимента 2 по однокомпонентной модели

Таблица 4

**Параметры однокомпонентной модели вязкоупругой среды с трещинами на основе констант разрушения [3]**

Параметр	Значение
$E_0, \text{ ГПа}$	7,49
$1/\tau^{(k)}, (10 \text{ мкс})^{-1}$	Формула (6)
$c^a, \text{ см}$	0,1
$v_{\max}, \text{ км/с}$	0,3
$m1$	10
$K_0, \text{ ГПа} \cdot \text{см}^{1/2}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$
$m2$	1
$ctr_0, \text{ см}$	0,0003

### Результаты расчетов по приближенной модели

На рис. 7, а–в приведены временные зависимости величины  $K$ , полученные на базе параметров соответственно из табл. 4–6 с применением приближенного алгоритма (4), (5) и однокомпонентной модели, в которой рост трещин осуществляется только в первом (медленном) режиме. На этих рисунках показаны также пороговые значения перехода  $K_w$  соответственно из работ [3], [9] и [10].

Из сравнения кривых на рис. 7, а видно, что, во-первых, результаты приближенной и однокомпонентной моделей качественно согласуются между собой, во-вторых, пороговое значение перехода  $K_w$  в несколько раз превышает максимальные расчетные значения величины  $K$ . Переход во второй (быстрый) режим, обеспечивающий разрушение материала образца, невозможен, что уже было продемонстрировано на рис. 4.

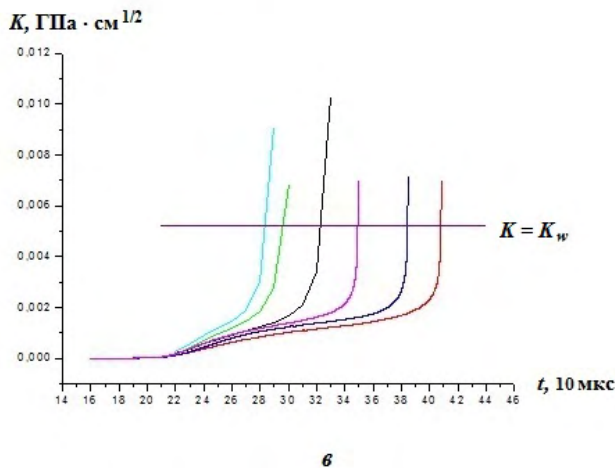
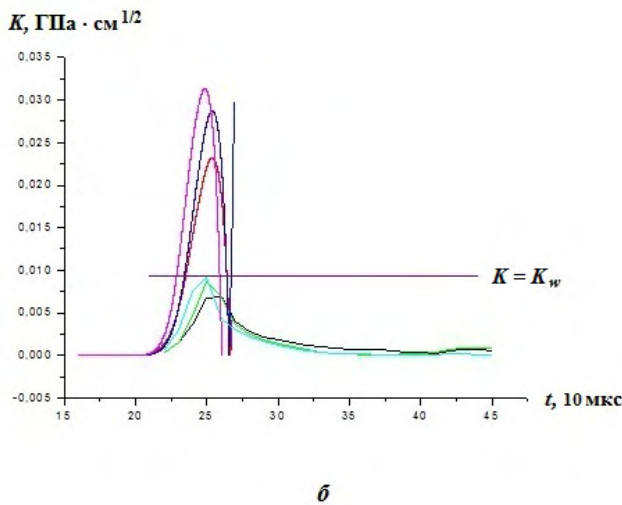
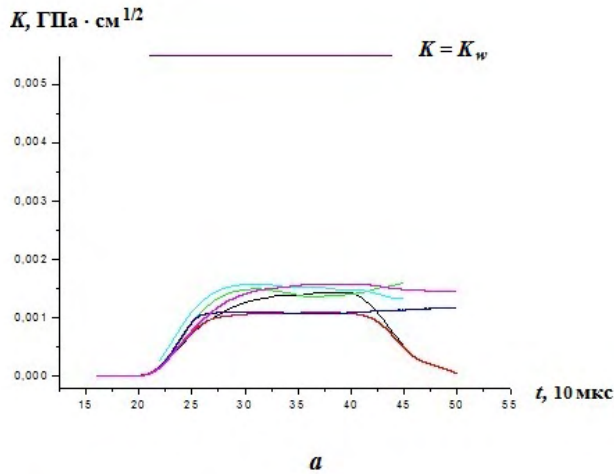


Рис. 7. Временные зависимости величины  $K$ , полученные на базе параметров:  $a$  — из табл. 4 ( $K_w$  из работы [3]);  $b$  — из табл. 5 ( $K_w$  из [9]);  $в$  — из табл. 6 ( $K_w$  из [10]); — — приближенный расчет эксперимента 1; — — расчет эксперимента 1 по однокомпонентной модели; — — приближенный расчет эксперимента 2; — — расчет эксперимента 2 по однокомпонентной модели; — — приближенный расчет эксперимента 3; — — расчет эксперимента 3 по однокомпонентной модели

Таблица 5

Параметры однокомпонентной модели вязкоупругой среды с трещинами на основе констант разрушения [9]

Параметр	Значение
$E_0$ , ГПа	7,49
$1/\tau^{(k)}$ , $(10 \text{ мкс})^{-1}$	Формула (6)
$c^a$ , см	0,7
$v_{\max}$ , км/с	0,3
$m_1$	0,8
$K_0$ , ГПа·см <sup>1/2</sup>	$5,0 \cdot 10^{-3}$
$m_2$	1
$ctr_0$ , см	0,0003

Таблица 6

Параметры однокомпонентной модели вязкоупругой среды с трещинами на основе констант разрушения [10]

Параметр	Значение
$E_0$ , ГПа	7,49
$1/\tau^{(k)}$ , $(10 \text{ мкс})^{-1}$	Формула (6)
$c^a$ , см	0,3
$v_{\max}$ , км/с	0,3
$m_1$	6
$K_0$ , ГПа·см <sup>1/2</sup>	$4,5 \cdot 10^{-3}$
$m_2$	1
$ctr_0$ , см	0,0003

Из рис. 7,  $b$  видно, что уже к моменту времени  $t = 24$  происходит переход во второй (быстрый) режим, после чего материал достаточно быстро теряет прочность (см. рис. 4,  $a, б$ ).

Результаты приближенных расчетов на рис. 7,  $в$  показывают принципиальную возможность перехода во второй режим для каждого из трех экспериментов в подходящее время. Однако в расчетах по однокомпонентной модели, во-первых, переход осу-

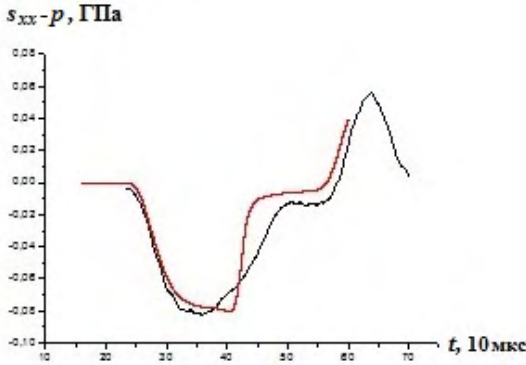
ществляется с заметной задержкой, во-вторых, скорость во втором режиме не достаточна для быстрого достижения заданного характерного размера  $c^a$  (см. рис. 4, *a, б*).

В табл. 7 приведены скорректированные по результатам серии приближенных расчетов параметры для однокомпонентной модели вязкоупругой среды с трещинами, а на рис. 8, *a–д* — результаты расчетов экспериментов с номерами 1, 3–6 с этими параметрами.

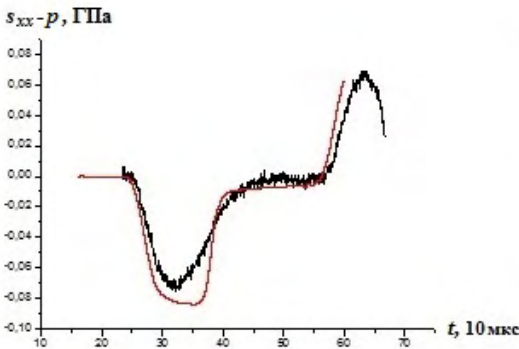
Таблица 7

Скорректированные параметры однокомпонентной модели вязкоупругой среды с трещинами

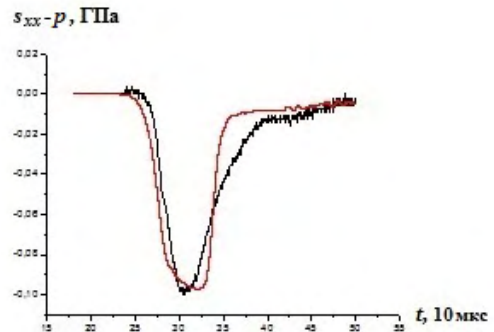
Параметр	Значение
$E_0$ , ГПа	7,49
$1/\tau^{(k)}$ , $(10 \text{ мкс})^{-1}$	Формула (6)
$c^a$ , см	0,1
$v_{\max}$ , км/с	0,3
$m1$	6
$K_0$ , ГПа·см <sup>1/2</sup>	$3,8 \cdot 10^{-3}$
$m2$	1
$ctr_0$ , см	0,0003



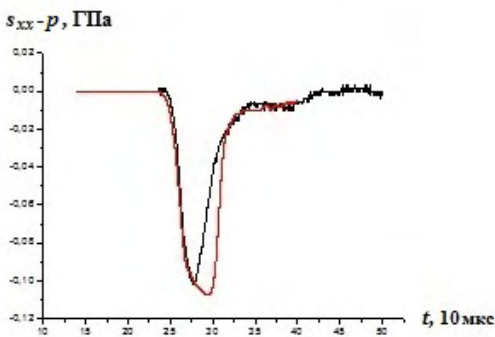
*a*



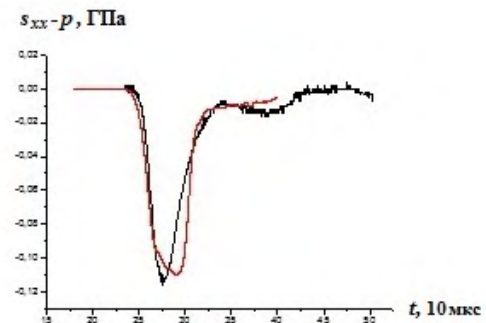
*б*



*в*



*г*



*д*

Рис. 8. Временные зависимости напряжений на опорном стержне для экспериментов 1 (*a*), 3 (*б*), 4 (*в*), 5 (*г*) и 6 (*д*): — — эксперимент; — — расчет

На рис. 9, *a*, *б* приведены результаты расчетов экспериментов 1 и 3 по скорректированной однокомпонентной модели (см. табл. 7), полученные с постоянным параметром релаксации и переменным параметром релаксации, рассчитанным по формуле (6).

Проведенные расчеты с различными наборами параметров показывают, что постоянное значение релаксационного параметра не позволяет достаточно точно описать максимумы нагрузок на опорном стержне для всех шести экспериментов одновременно, что, в частности, иллюстрируют рис. 9, *a*, *б*.

Значение релаксационного параметра  $\tau^{-1} = 2 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$  определено на основании метода [14], в котором не учитывается накопление поврежденности материала оболочки из ВВ как несущественное в экспериментах [13]. В эксперименте 1 реализуются самые малые нагрузки, разрушение незначительно, поэтому он описывается точнее с постоянным  $\tau^{-1} = 2 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ , чем все остальные эксперименты.

На рис. 10 временная зависимость параметра релаксации, полученная для эксперимента 3 по формуле (6), сравнивается с постоянным значением параметра релаксации  $\tau^{-1} = 2 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ .

На рис. 11 приведено сравнение результатов расчетов эксперимента 1 по изотропным одноэкспонентной и трехэкспонентной моделям из [14]. Кривые, полученные с использованием двух подходов, практически совпадают и визуалью на рис. 11 неразличимы.

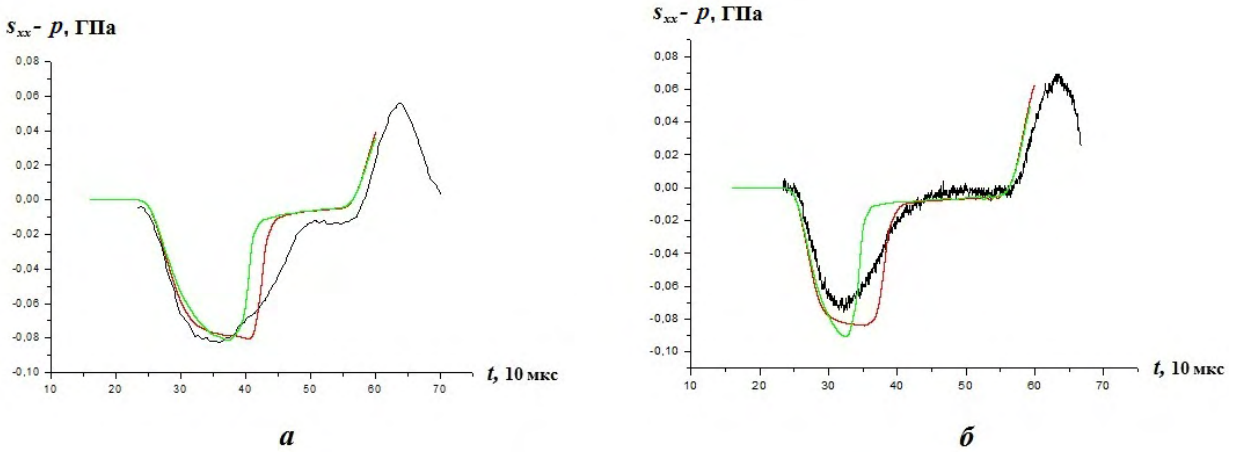


Рис. 9. Временные зависимости напряжений на опорном стержне: *a* — для эксперимента 1; *б* — для эксперимента 3; — — эксперимент; — — расчет с переменным  $\tau^{-1}$  (формула (6)); — — расчет с постоянным  $\tau^{-1} = 2 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$

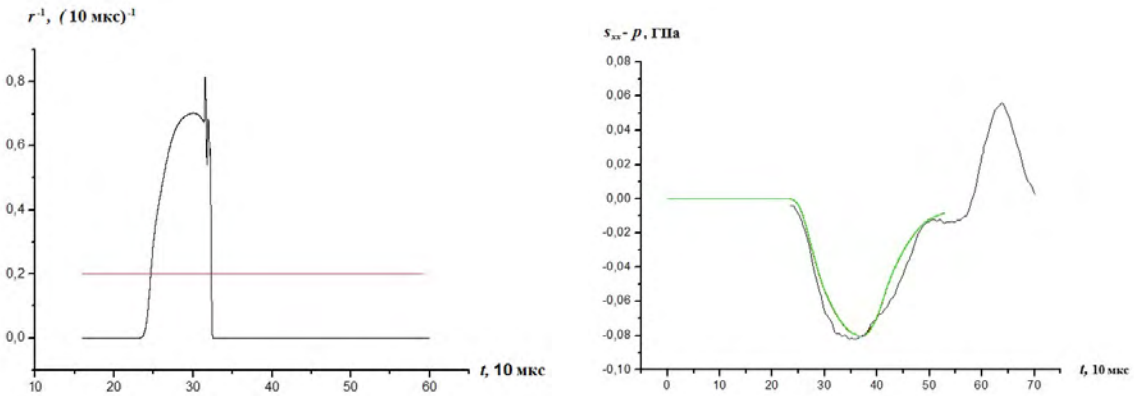


Рис. 10. Временные зависимости релаксационного параметра на опорном стержне для эксперимента 3: — — по формуле (6); — —  $\tau^{-1} = 2 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$

Рис. 11. Временные зависимости напряжений на опорном стержне, полученные для эксперимента 1 по изотропным моделям из [14]: — — одноэкспонентная модель; — — трехэкспонентная модель; — — эксперимент

## Расчеты эксперимента 2

Эксперимент 2 [15] имеет особенность: несмотря на большую, чем в эксперименте 1, амплитуду нагрузки, образец разрушается позже. На рис. 12 приведено сравнение опорного импульса, зарегистрированного в эксперименте 2, и результатов численных расчетов с параметрами модели из работ [3, 9, 10] и табл. 7. В расчете с параметрами [3] переход во второй (быстрый) режим не реализуется вообще. С параметрами [9, 10] эксперимент 2 не удается рассчитать до конца. В расчете с параметрами из табл. 7 переход в быстрый режим реализуется слишком рано.

На рис. 13 приведены результаты расчетов с параметрами из табл. 7. Проиллюстрированы влияние начальной степени трещиноватости материала ВВ на реализуемые в среде напряжения и преимущество использования зависимости (6) для расчета  $\tau^{-1}$ .

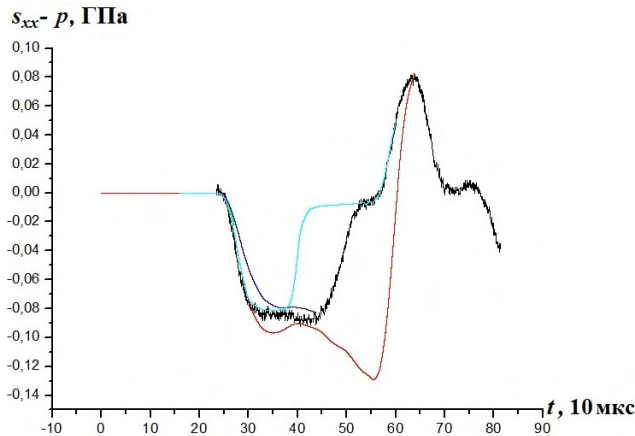


Рис. 12. Временные зависимости напряжений на опорном стержне для эксперимента 2: — эксперимент; — расчет с параметрами [3]; — расчет с параметрами [9]; — расчет с параметрами [10]; — расчет с параметрами из табл. 7

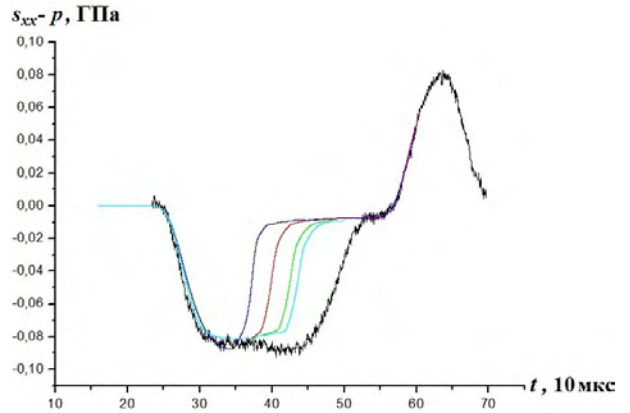


Рис. 13. Временные зависимости напряжений на опорном стержне для эксперимента 2: — эксперимент; — расчет с  $ctr_0 = 3,0 \cdot 10^{-3}$  см и  $\tau^{-1}$  по формуле (6); — расчет с  $ctr_0 = 2,7 \cdot 10^{-3}$  см и  $\tau^{-1}$  по формуле (6); — расчет с  $ctr_0 = 2,7 \cdot 10^{-3}$  см и постоянным  $\tau^{-1} = 2 \cdot 10^4$  с $^{-1}$ ; — расчет с  $ctr_0 = 2,6 \cdot 10^{-3}$  см и  $\tau^{-1}$  по формуле (6)

## Модификация модели вязкоупругой среды с разрушением

На основании данных, полученных в эксперименте 2, модифицируем закон роста трещин в разрабатываемой модели. На рис. 14 приведены расчетные временные зависимости  $\sigma^e$ , полученные в чисто упругой постановке без вязкости и разрушения для трех экспериментов. Из взаимного расположения трех кривых и прямой  $\sigma^e = \text{const}$  можно сделать вывод, что в расчетах первоначальный переход во второй режим происходит последовательно: сначала в третьем, потом во втором и, наконец, в первом эксперименте.

Рассмотрим временной интервал  $\Delta t = 28 \div 40$ , на котором расчетное значение  $\sigma^e$  в эксперименте 2 убывает (см. рис. 14) и образец сохраняет прочность вплоть до  $t = 44$  (см. рис. 2, б). Оценим среднюю скорость роста трещин  $\dot{c}_{\text{cp}}$  на этом интервале, исходя из предположения, что величина  $K$  не возрастает и, как следствие, не возрастает скорость роста трещин:

$$K(t=28) \geq K(t=40); \quad \sqrt{\pi c(t=28)\sigma^e(t=28)} \geq \sqrt{\pi(c(t=28) + \dot{c}_{\text{cp}}\Delta t)(\sigma^e)_{\text{cp}}};$$

$$c(t=28) \frac{\left(\frac{\sigma^e(t=28)}{\sigma_{\text{cp}}^e}\right)^2 - 1}{\Delta t} \geq \dot{c}_{\text{cp}}.$$

- На основании предварительной серии расчетов по приближенной модели было выявлено следующее:
- для показателей степенного роста  $m1 \geq 6$  и разумной вариации значений  $K_0$  относительно исходного значения  $0,005 \text{ ГПа} \cdot \text{см}^{1/2}$  значение  $c(t = 28)$  в первом (медленном) режиме остается на начальном уровне  $ctr_0 \sim 3 \cdot 10^{-4} \text{ см}$ ;
  - $K_0$  и  $m1$  являются ключевыми параметрами в первом (медленном) режиме, а  $v_{\max}$  и  $c^a$  практически не влияют на результат;
  - $K_0$ ,  $v_{\max}$  и  $c^a$  играют существенную роль во втором (быстром) режиме.

С учетом вышесказанного  $\dot{c}_{\text{ср}} \leq 0,0000012 \text{ км/с}$ . Такое значение скорости в первом (медленном) режиме можно получить только при достаточно больших значениях  $m1$ , а чтобы скорость во втором (быстром) режиме некоторое время оставалась на прежнем уровне, можно ввести показатель степенного роста  $m2$  для второй ветки (см. формулу (2)). Для больших значений  $m1$  пороговое значение перехода  $K_w$  в несколько раз превышает максимальные расчетные значения величины  $K$  (см. рис. 7, а). Для обеспечения перехода во второй (быстрый) режим вынужденно разрываем связь  $K_0$  и  $K_w$  и вводим независимую величину порогового значения  $K_{wmy}$ . Закон роста трещин (2) трансформируется в следующий вид:

$$\dot{c} = \frac{dc}{dt} = \begin{cases} v_{\max} \left( \frac{K}{K_1} \right)^{m1}, & K \leq K_{wmy}; \\ v_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{K_{wmy}}{\sqrt{1 + \frac{2}{m1} K}} \right)^2 \right]^{m2}, & K > K_{wmy}, \end{cases} \quad (7)$$

где  $v_{\max}$ ,  $m1$ ,  $m2$ ,  $K_0$ ,  $K_{wmy}$  — константы;  $K_1$  имеет тот же смысл, что в формуле (2).

В табл. 8 приведены параметры для однокомпонентной модели вязкоупругой среды с модифицированным законом (7).

На рис. 15 приведены временные зависимости величины  $K$ , полученные на базе параметров из табл. 8 с применением приближенного алгоритма (4), (5) и однокомпонентной модели, в которой рост трещин осуществляется только в первом (медленном) режиме. Отметим, что такое взаимное расположение кривых вообще характерно для больших значений  $m1$  (ср. с рис. 7, а).

На рис. 16, 17 приведены результаты расчетов с параметрами из табл. 8 для шести экспериментов [15], а на рис. 18 — сравнение результатов расчетов с параметрами из табл. 7, 8.

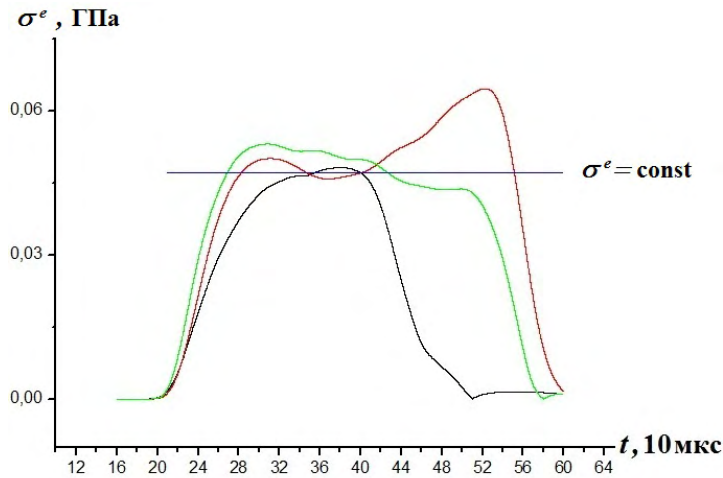


Рис. 14. Расчетные временные зависимости  $\sigma^e$ : — — для эксперимента 1; — — для эксперимента 2; — — для эксперимента 3

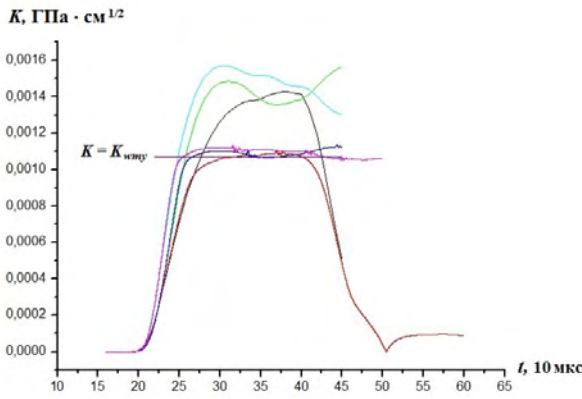


Рис. 15. Временные зависимости величины  $K$ , полученные на базе параметров из табл. 8: — — приближенный расчет эксперимента 1; — — расчет эксперимента 1 по однокомпонентной модели; — — приближенный расчет эксперимента 2; — — расчет эксперимента 2 по однокомпонентной модели; — — приближенный расчет эксперимента 3; — — расчет эксперимента 3 по однокомпонентной модели

Таблица 8

Параметры однокомпонентной модели вязкоупругой среды с модификацией закона роста трещин

Параметр	Значение
$E_0$ , ГПа	7,49
$1/\tau^{(k)}$ , $(10 \text{ мкс})^{-1}$	Формула (6)
$c^a$ , см	0,1
$v_{\max}$ , км/с	0,1
$m1$	14
$K_0$ , ГПа·см <sup>1/2</sup>	$7,0 \cdot 10^{-3}$
$K_{\text{крит}}$ , ГПа·см <sup>1/2</sup>	$1,07 \cdot 10^{-3}$
$m2$	6
$ctr_0$ , см	0,0003

В расчете эксперимента 1 с параметрами из табл. 8 при переходе во второй режим размер трещин возрастает несущественно (см. рис. 18, а справа), импульс нагрузки на опорном стержне почти повторяет импульс нагрузки на нагружающем стержне. В расчете эксперимента 1 с параметрами из табл. 7 трещины достигают характерного размера 0,1 см примерно на момент времени  $t = 36$  (см. рис. 18, а справа), потеря прочности образца происходит сразу после  $t = 40$  (см. рис. 18, а слева).

В расчете эксперимента 2 с параметрами из табл. 8 размер трещин растет медленнее, чем в расчете с параметрами из табл. 7 (см. рис. 18, б справа), соответственно и импульс нагрузки на опорном стержне ближе к экспериментальному (см. рис. 18, б слева).

В расчетах эксперимента 3 для двух законов роста трещин (формула (2) и табл. 7, формула (7) и табл. 8) размер трещин растет приблизительно одинаково (см. рис. 18, в справа), соответственно и импульсы нагрузки на опорном стержне похожи (см. рис. 18, в слева). В расчете с параметрами из табл. 8 переход во второй (быстрый) режим происходит раньше и длится дольше, величина  $K$  достигает большего значения (рис. 19), но скорость роста трещин при одинаковых значениях  $K$  меньше, чем в расчете с параметрами из табл. 7 (рис. 20). Падение величины  $K$  до значений 0,005–0,004 ГПа·см<sup>1/2</sup>, связанное с потерей прочности образца ВВ, происходит практически одновременно в двух расчетах, и далее значение держится примерно на одном уровне. Для  $K = 0,45$  ГПа·см<sup>1/2</sup> значения скорости роста трещин для двух законов роста одинаковы (см. рис. 20).

### Заключение

В работе представлена однокомпонентная вязкоупругая модель среды с трещинами, сформулированная на основании работы [3]. Параметры подобраны так, чтобы расчеты вполне приемлемо описывали результаты экспериментов с номерами 1, 3–6 на установке ССГ из работы [15]. Предложена модификация расчета вязкой релаксации и закона роста трещин. Для модифицированного варианта модели параметры подобраны так, чтобы расчеты вполне приемлемо описывали результаты всех шести экспериментов из работы [15].

Численное моделирование процессов деформирования материала ВВ проводится методом Годунова [1].

Работа выполнена в тесном сотрудничестве с А. А. Кабаевым и С. А. Кабаевым. Автор выражает им глубокую благодарность за активную поддержку проводимых исследований, выдвинутые идеи и научные консультации.

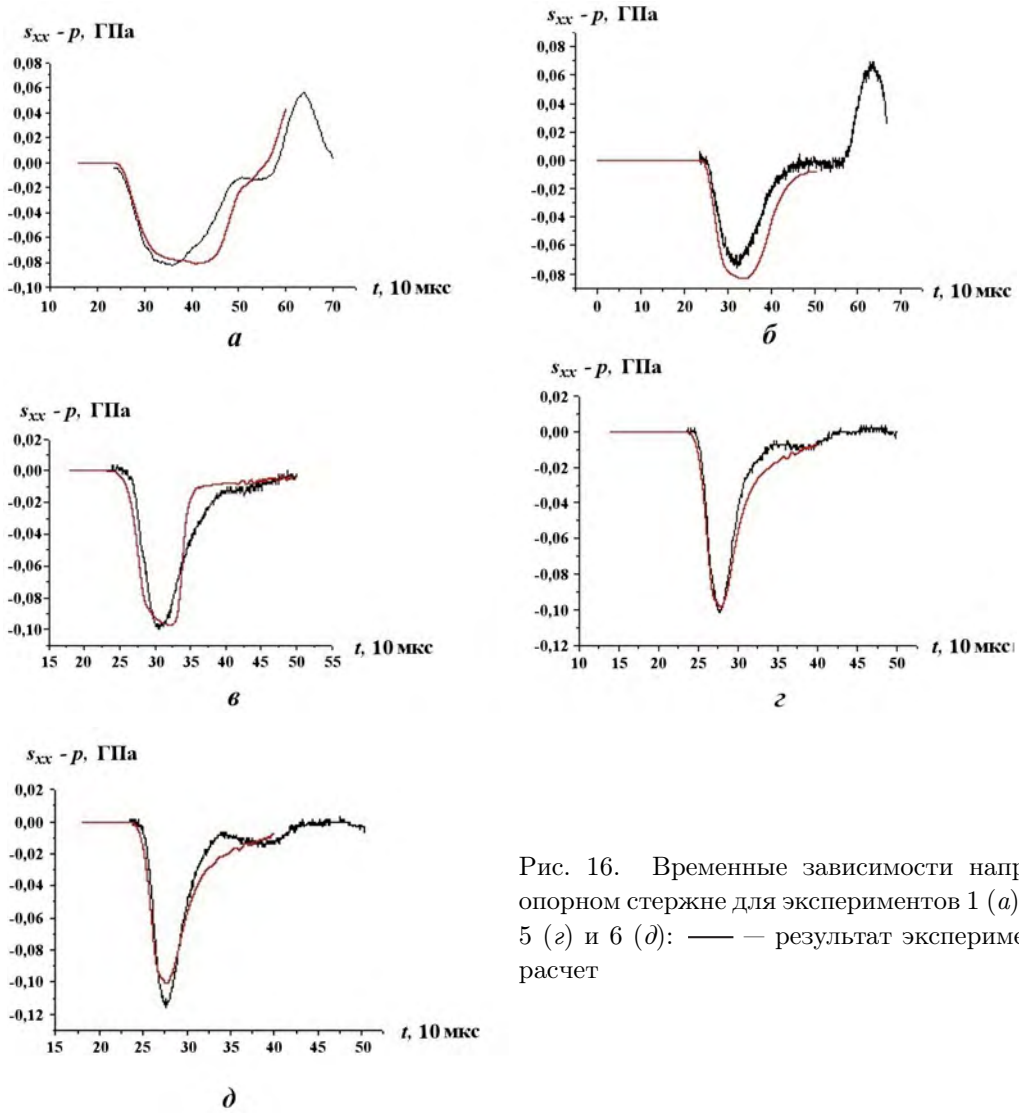


Рис. 16. Временные зависимости напряжений на опорном стержне для экспериментов 1 (*a*), 3 (*б*), 4 (*в*), 5 (*г*) и 6 (*д*): — — результат эксперимента; — — расчет

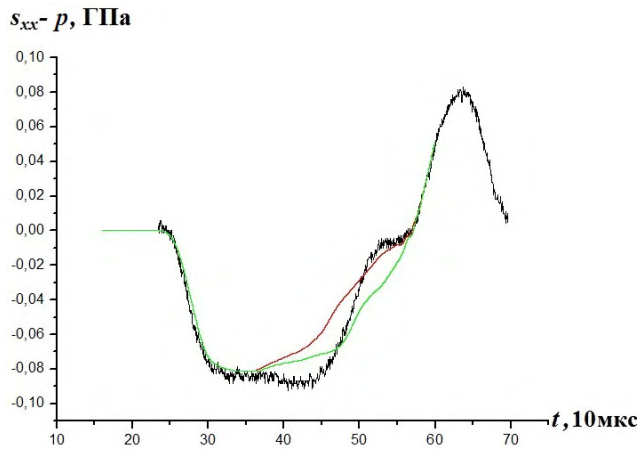
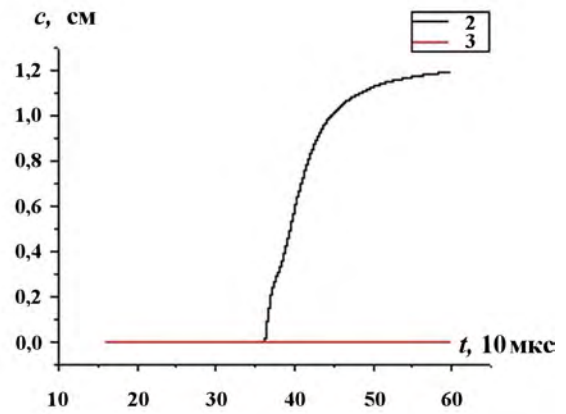
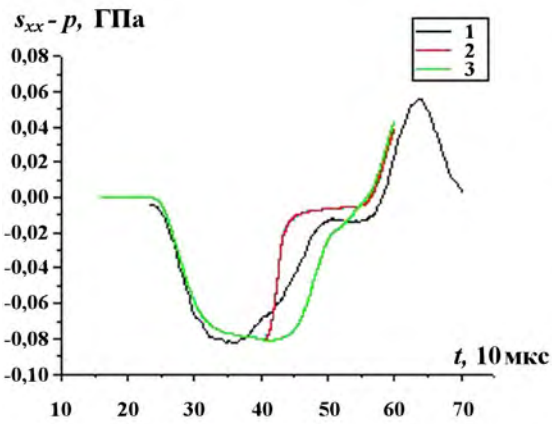
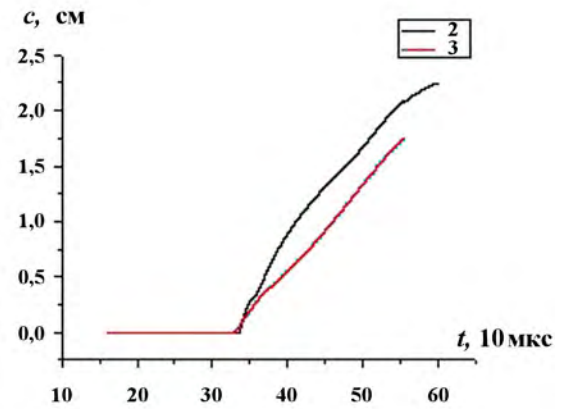
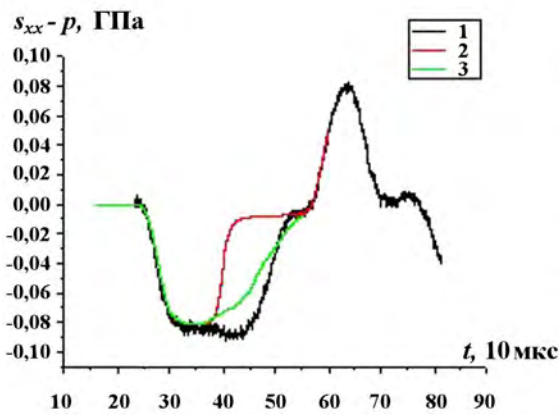


Рис. 17. Временные зависимости напряжений на опорном стержне для эксперимента 2: — — эксперимент; — — расчет с  $ctr_0 = 3,0 \cdot 10^{-3}$  см и  $\tau^{-1}$  по формуле (6); — — расчет с  $ctr_0 = 2,9 \cdot 10^{-3}$  см и  $\tau^{-1}$  по формуле (6)

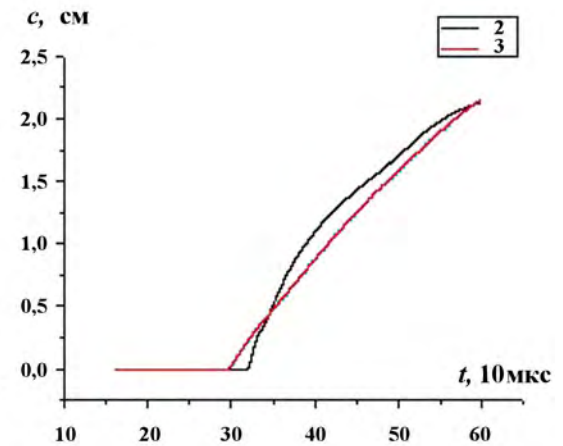
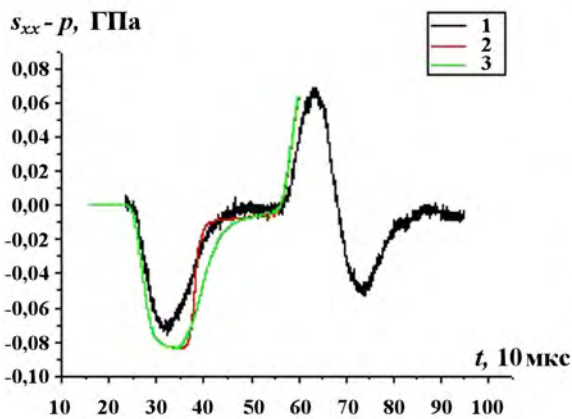




*a*



*б*



*в*

Рис. 18. Временные зависимости напряжений на опорном стержне (слева) и размера трещин (справа) для экспериментов 1 (*a*), 2 (*б*) и 3 (*в*): 1 — результат эксперимента; 2 — расчет с параметрами из табл. 7; 3 — расчет с параметрами из табл. 8

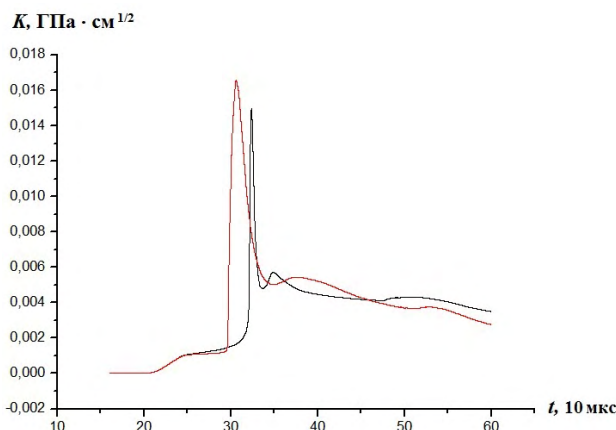


Рис. 19. Временные зависимости величины  $K$  в расчете эксперимента 3: — — на базе параметров из табл. 7; — — на базе параметров из табл. 8

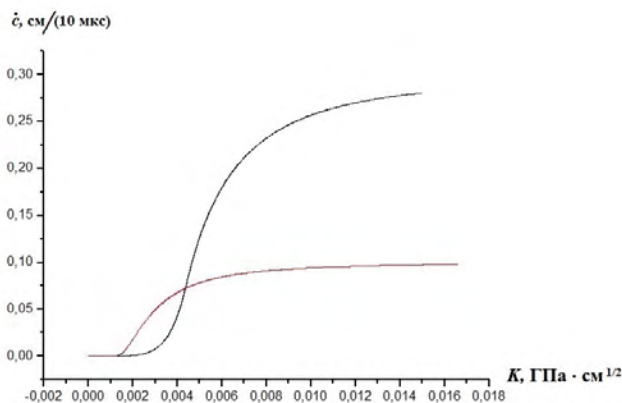


Рис. 20. Зависимости скорости роста трещин от интенсивности напряжения в расчете эксперимента 3: — — по формуле (2) и табл. 7; — — по формуле (7) и табл. 8

### Список литературы

1. Величко О. М. Расчетное моделирование деформирования энергетических материалов в условиях низкоскоростного нагружения методом С. К. Годунова // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2018. Вып. 1. С. 42–52.  
Velichko O. M. Raschetnoe modelirovaniye deformirovaniya energeticheskikh materialov v usloviyakh nizkoskorostnogo nagruzheniya metodom S. K. Godunova // Voprosy Atomnoi Nauki i Tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovaniye fizicheskikh protsessov. 2018. Vyp. 1. S. 42–52.
2. Годунов С. К. Элементы механики сплошных сред. М.: Наука, 1978.  
Godunov S. K. Elementy mekhaniki sploshnykh sred. M.: Nauka, 1978.
3. Clancy S. P., Jonson J. N., Burkett M. W. Modelling the viscoelastic and brittle fracture response of a high-explosive in a Eulerian hydrocode // XI Int. Symp. on Detonation. Snowmass, Colorado, 1998. P. 3–10.
4. ABAQUS. Providence, RI: DS Simulia, 2007.
5. Whirley R. G., Engelmann B. E. DYNA3D — A Nonlinear, Explicit, Three-dimensional Finite Element Code for Solid and Structural Mechanics User Manual. LLNL, UCID-19592, Revision, 1993.
6. Dey T. N., Kamm J. R. Numerical modeling of shear band formation in PBX-9501 // XI Int. Symp. on Detonation. Snowmass, Colorado, 1998. P. 540–541.
7. Robert M. Hackett, Joel G. Bennett. An implicit finite element material model for energetic particulate composite materials // Int. J. Meth. Eng. 2000. No 49. P. 1191–1209.
8. Bennett J. G., Haberman K. S., Johnson J. N., Asay B. W., Henson B. F. A constitutive model for the non-shock ignition and mechanical response of high explosives // J. Meth. Phys. Solids. 1998. Vol. 46, No 12. P. 2303–2221.
9. Седов С. Ю., Величко О. М., Денисова О. В., Кривонос А. С., Вялых А. М. Расчеты на основе вязкоупругой модели критериев начала взрыва при низкоскоростном воздействии на взрывчатый состав на основе октогена // Межд. конф. "XV Харитоновские науч. чтения": сб. трудов. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013. С. 246–253.  
Sedov S. Yu., Velichko O. M., Denisova O. V., Krivonos A. S., Vyalykh A. M. Raschety na osnove vyazkouprugoy modeli kriteriev nachala vzryva pri nizkoskorostnom vozdeystvii na vzryvchaty sostav na osnove oktogena // Mezhd. konf. "XV Kharitonovskie nauch. chteniya": sb. trudov. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2013. S. 246–253.

10. *Седов С. Ю., Мицура М. Н.* Критерий начала взрыва при низкоскоростном воздействии на взрывчатые составы на основе октогена // Межд. конф. "XII Забабахинские науч. чтения": тез. докл. Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2014. С. 116.  
*Sedov S. Yu., Mitsura M. N.* Kriteriy nachala vzryva pri nizkoskorostnom vozdeystvii na vzryvchatye sostavy na osnove oktogena // Mezhd. konf. "XII Zababakhinskie nauch. chteniya": tez. dokl. Snezhinsk: RFYaTs-VNIITF, 2014. S. 116.
11. *Белов Г. В., Базаров Ю. Б., Дякин Е. П., Екимчев С. Н., Жиёмбетов А. К., Зималин В. С.* Влияние скорости удара на параметры взрыва образцов флегматизированного октогена // Межд. конф. "XI Харитоновские науч. чтения". Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны: сб. трудов. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2009. С. 51–55.  
*Belov G. V., Bazarov Yu. B., Dyakin E. P., Ekimchev S. N., Zhiembetov A. K., Zimalin V. S.* Vliyanie skorosti udara na parametry vzryva obraztsov flegmatizirovannogo oktogena // Mezhd. konf. "XI Kharitonovskie nauch. chteniya". Ekstremalnye sostoyaniya veshchestva. Detonatsiya. Udarnye volny: sb. trudov. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2009. S. 51–55.
12. *Пушков В. А., Абакумов А. И., Юрлов А. В., Кальманов А. В., Седов А. А., Родионов А. В.* Реакция ВВ на основе октогена на низкоскоростное нагружение стальным цилиндрическим ударником // Межд. конф. "XIII Харитоновские науч. чтения". Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны: сб. трудов. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2011. С. 9–13.  
*Pushkov V. A., Abakumov A. I., Yurlov A. V., Kalmanov A. V., Sedov A. A., Rodionov A. V.* Reaktsiya VV na osnove oktogena na nizkoskorostnoe nagruzhenie stalnym tsilindricheskim udarnikom // Mezhd. konf. "XIII Kharitonovskie nauch. chteniya". Ekstremalnye sostoyaniya veshchestva. Detonatsiya. Udarnye volny: sb. trudov. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2011. S. 9–13.
13. *Володина Л. В., Гердюков Н. Н., Зотов Е. В.* Реакция полусферических оболочек из ВВ на действие импульсной нагрузки (экспериментально-расчетное исследование). Вещества, материалы и конструкции при интенсивных динамических воздействиях // Межд. конф. "V Харитоновские науч. чтения". Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны: сб. трудов. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2003. С. 60–67.  
*Volodina L. V., Gerdyukov N. N., Zotov E. V.* Reaktsiya polusfericheskikh obolochek iz VV na deystvie impulsnoy nagruzki (eksperimentalno-raschetnoe issledovanie). Veshchestva, materialy i konstruksii pri intensivnykh dinamicheskikh vozdeystviyakh // Mezhd. konf. "V Kharitonovskie nauch. chteniya". Ekstremalnye sostoyaniya veshchestva. Detonatsiya. Udarnye volny: sb. trudov. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2003. S. 60–67.
14. *Абросимов Н. А., Куликова Н. А.* Идентификация параметров моделей вязкоупругого деформирования композитных материалов на основе анализа импульсного нагружения оболочек вращения // Механика твердого тела. 2011. № 3. С. 42–57.  
*Abrosimov N. A., Kulikova N. A.* Identifikatsiya parametrov modeley vyazkouprugogo deformirovaniya kompozitnykh materialov na osnove analiza impulsnogo nagruzheniya obolochek vrashcheniya // Mekhanika tverdogo tela. 2011. № 3. S. 42–57.
15. *Абакумов А. И., Большаков А. П., Гушанов А. Р., Карпенко И. И., Синицын В. В.* Расчетно-экспериментальное исследование деформирования энергетических материалов в условиях низкоскоростного нагружения в опытах с составными стержнями Гопкинсона // Вопросы материаловедения. 2008. № 1 (53). С. 184–196.  
*Abakumov A. I., Bolshakov A. P., Gushanov A. R., Karpenko I. I., Sinitsyn V. V.* Raschetno-eksperimentalnoe issledovanie deformirovaniya energeticheskikh materialov v usloviyakh nizkoskorostnogo nagruzheniya v opytakh s sostavnymi sterzhnyami Gopkinsona // Voprosy materialovedeniya. 2008. № 1 (53). S. 184–196.
16. *Годунов С. К., Демчук А. Ф., Козин Н. С., Мали В. И.* Интерполяционные формулы зависимости максвелловской вязкости некоторых металлов от интенсивности касательных напряжений и температур // ПМТФ. 1974. № 4. С. 114–118.

*Godunov S. K., Demchuk A. F., Kozin N. S., Mali V. I.* Interpolyatsionnye formuly zavisimosti maksvellovskoy vyazkosti nekotorykh metallov ot intensivnosti kasatelnykh napryazheniy i temperatur // PMTF. 1974. № 4. S. 114–118.

Статья поступила в редакцию 19.02.19.

APPLICATION OF A RELAXATION MODEL OF FRACTURED VISCOELASTICITY FOR THE DESCRIPTION OF HIGH-EXPLOSIVE SPECIMEN TESTING USING A SPLIT-HOPKINSON PRESSURE BAR / O. M. Velichko (FSUE “RFNC-VNIEF”, Sarov, Nizhniy Novgorod region).

A single-material viscoelastic model of a fractured medium is considered, which has been formulated based on publications of US authors, and its modification for viscous relaxation and fracture growth kinetics is presented. An approximate computational algorithm accelerating the process of model fitting for an HMX-based high explosive has been developed. The fitting is based on the criterion of acceptable agreement between calculated data and results of HE specimen testing on a split-Hopkinson pressure bar apparatus from a publication of Russian authors. Numerical modeling of HE specimen deformation is performed based on a computational model implemented by the Godunov method.

*Keywords:* HE, deformation and fracture, fractured viscoelastic model, Godunov method, numerical modeling.

---

УДК 519.6

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОСЕТОЧНОГО РЕШАТЕЛЯ СЛАУ

Ю. Н. Дерюгин, П. А. Машенькин  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Рассматривается применимость технологии решения системы линейных алгебраических уравнений многосеточным методом для задач подземной гидродинамики. Приведена методика решения задач однофазной фильтрации в неоднородной и анизотропной пористой среде на неструктурированной сетке, состоящей из выпуклых несамопересекающихся ячеек. Экспериментально показано, что эффективность использования алгебраического многосеточного метода растет с увеличением характера неоднородности породы в пластах и увеличением размера расчетной сетки в задаче. Проведено сравнение решателя крыловского типа РСГ и алгебраического многосеточного решателя по сходимости невязки и затраченному времени решения.

*Ключевые слова:* СЛАУ, алгебраический многосеточный решатель, подземная гидродинамика, аппроксимация на неструктурированной сетке.

### Введение

Эксплуатация и обеспечение безопасности подземной среды требуют создания методов математического моделирования комплекса природных и техногенных процессов, протекающих в геологических объектах. В ряде случаев решения и оценки должны учитывать процессы фильтрации жидкости в многослойных неоднородных системах, имеющих сложную геологическую структуру. Такие задачи возникают при прогнозе воздействия на подземную среду в ходе эксплуатации ядерно опасных объектов, химических, горнопромышленных и нефтегазодобывающих предприятий, в результате возникновения на них аварий и чрезвычайных ситуаций, когда для адекватного моделирования прогноза необходимо создание моделей регионального масштаба. Построение подробных моделей подземной среды предполагает использование неструктурированных сеток, адаптированных к геологическим структурам пласта с возможностью детальной дискретизации особенностей его строения, неявной аппроксимации уравнений фильтрации.

Поскольку основная вычислительная нагрузка приходится на решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), то весьма важной задачей является сокращение времени их решения. Как известно, прямые методы непригодны для решения задач на сетках с большим количеством ячеек [1]. Полное решение системы требует большого количества вычислительных операций. Кроме того, прямые методы являются сильно затратными по памяти ЭВМ. Применение итерационных методов CG, BiCGStab и др. (решатели в пространствах Крылова) для плохо обусловленных матриц требует выполнения операции предобуславливания, занимающей большую часть времени решения СЛАУ. Другой подход состоит в применении геометрических (GMG) или алгебраических (AMG) многосеточных итерационных методов, в которых неизвестный вектор находится в результате решения порождаемой последовательности СЛАУ уменьшающегося размера. Возможно также предобуславливание AMG в итерационном решателе первого типа. Сложность алгоритмов многосеточных методов решения оценивается как  $O(N)$ , где  $N$  — число неизвестных. То есть количество арифметических операций растет пропорционально увеличению количества неизвестных. Этот факт позволяет рассматривать многосеточные методы как потенциально наилучшие методы решения СЛАУ

в области высокопроизводительных вычислений. Как отмечается в литературе [2], GMG-метод не столь автоматизирован как AMG. AMG уступает GMG-методу по скорости, а его преимуществом является применимость в задачах с неструктурированными сетками.

В настоящее время существует много реализаций многосеточных методов, как зарубежных (AmgX [3], Trilinos/ML [4], hypre/BoomerAMG [5]), так и отечественных (например, PMLP/ParSol [6]). В пакете НИМФА [7] опробованы многосеточные предобусловливатели из библиотек hypre и PMLP/ParSol.

В данной работе рассмотрены реализация и применение агрегативного алгебраического многосеточного решателя (AgAMG) пакета программ ЛОГОС [8] для решения задач фильтрации жидкости в пористых средах. В первом разделе статьи представлена математическая модель фильтрации жидкости. Во втором — описан метод дискретизации уравнений на произвольной неструктурированной сетке. В третьем — приводится краткое описание многосеточного алгебраического метода. Четвертый, заключительный, раздел содержит примеры решения задач и сравнение методов решения СЛАУ.

## 1. Математическая модель однофазной фильтрации

Однофазная изотермическая фильтрация жидкости в пористой среде описывается двумя основными соотношениями: сохранения массы жидкости и закона Дарси [9]:

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = q; \quad (1)$$

$$\vec{V} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} (\nabla P - \rho \vec{g}). \quad (2)$$

Здесь используются общепринятые обозначения:  $t$  — время;  $m$  — пористость;  $\rho$  — плотность;  $V$  — скорость флюида;  $\mathbf{K}$  — тензор проницаемости;  $\mu$  — вязкость флюида;  $P$  — давление;  $\vec{g}$  — вектор ускорения свободного падения;  $q$  — источник массы флюида. В общем случае тензор проницаемости распределен неравномерно по пространству (направляющие тензора могут резко менять направления, и сами значения могут быть разрывными).

В дальнейшем будем рассматривать фильтрацию несжимаемой жидкости в пористой среде. В этом случае уравнение (1) приобретает вид

$$\nabla \cdot \vec{V} = Q, \quad Q = \frac{q}{\rho}. \quad (3)$$

Подставив (2) в (3), получим эллиптическое уравнение относительно давления:

$$-\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu} (\nabla P - \rho \vec{g}) \right) = Q. \quad (4)$$

Для определения однозначного решения уравнение (4) должно быть дополнено граничными условиями первого, второго или третьего рода.

## 2. Дискретизация уравнений на произвольной неструктурированной сетке

В настоящее время для решения краевых задач широкое распространение получил метод контрольного объема, также известный как интегро-интерполяционный метод. В его основе лежит использование интегрального аналога дифференциальных уравнений, отражающего физическую сущность явления (закон сохранения) [10]. В данной работе метод контрольного объема применяется для построения алгоритма расчета на неструктурированной сетке уравнения изотермической фильтрации несжимаемой жидкости в анизотропной пористой среде.

Пусть расчетная область  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$  покрывается  $N$  выпуклыми контрольными объемами  $\Omega_i$  без зазоров и наложений ( $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \forall (i, j) : i \neq j$ ). Контрольные объемы (ячейки сетки) являются произвольными многогранниками. Каждый многогранник ограничен произвольным числом граней.

Для составления разностных уравнений проинтегрируем уравнение (4) по объему ячейки неструктурированной сетки:

$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot \left[ \frac{\mathbf{K}}{\mu} (\nabla P - \rho \vec{g}) \right] d\Omega = - \int_{\Omega_i} Q d\Omega, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Используя теорему Остроградского—Гаусса, объемный интеграл в левой части (5) заменяем интегралом по поверхности ячейки:

$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot \left[ \frac{\mathbf{K}}{\mu} (\nabla P - \rho \vec{g}) \right] d\Omega = \oint_{\partial\Omega_i} \left[ \frac{\mathbf{K}}{\mu} (\nabla P - \rho \vec{g}) \right] \cdot \vec{n} ds = - \int_{\Omega_i} Q d\Omega. \quad (6)$$

Для составления дискретного аналога (6) введем функцию высоты  $h(\vec{r})$ . Значение функции  $h$  зависит от направления вектора  $\vec{g}$  и определяется с точностью до константы  $h_0 = h(\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0))$ . Формально  $h$  выражается следующим образом:

$$h(\vec{r}) = h_0 - (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \frac{\vec{g}}{|\vec{g}|}. \quad (7)$$

Используя функцию высоты (7), выражение для скорости фильтрации (2) можно представить в виде

$$\vec{V} = - \frac{\mathbf{K}}{\mu} (\nabla P + \rho |g| \nabla h),$$

а поток жидкости через грань как

$$\vec{V} \cdot \vec{n}_f = - \frac{1}{\mu} (\mathbf{K}^T \vec{n}_f \cdot \nabla P) - \frac{\rho |g|}{\mu} (\mathbf{K}^T \vec{n}_f \cdot \nabla h).$$

Воспользуемся теоремой о среднем и будем аппроксимировать интегралы с помощью квадратурной формулы прямоугольников. В качестве среднего значения функции по объему ячейки  $G$  примем ее значение в центре ячейки, а в качестве среднего значения функции на грани  $f$  — ее значение в центре грани. В этом случае получим следующий полудискретный аналог уравнения (6):

$$\begin{aligned} - \sum_f \frac{1}{\mu_f} (\mathbf{K}^T \vec{n}_f \cdot \nabla P + \rho |g| \mathbf{K}^T \vec{n}_f \cdot \nabla h)_f \Delta S_f &= \\ &= Q_G \Delta V_G. \end{aligned}$$

Для аппроксимации потока рассмотрим грань  $f$ , разделяющую две ячейки  $G$  и  $F$  с различными тензорами абсолютной проницаемости. При рассмотрении ячейки  $G$  считается, что нормаль грани  $f$  направлена в сторону ячейки  $F$  (рис. 1). Определим два конормальных вектора  $\vec{N}_G$  и  $\vec{N}_F$ :

$$\vec{N}_G = \mathbf{K}_G^T \vec{n}_f; \quad \vec{N}_F = \mathbf{K}_F^T \vec{n}_f.$$

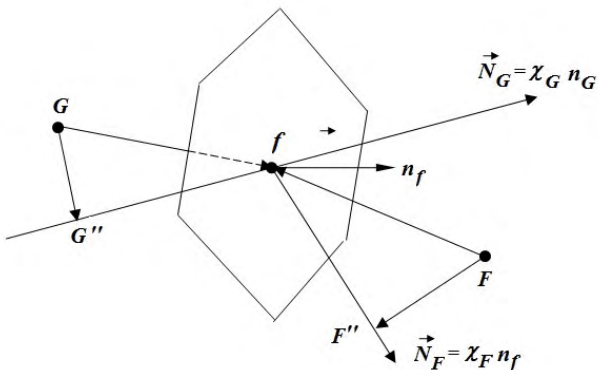


Рис. 1. Схема аппроксимации потока через грань

Для каждого из этих векторов определим единичные векторы  $\vec{n}_G$  и  $\vec{n}_F$ , удовлетворяющие соотношениям

$$\chi_G \vec{n}_G = \mathbf{K}_G^T \vec{n}_f, \quad \chi_G = |\mathbf{K}_G^T \vec{n}_f|; \quad \chi_F \vec{n}_F = \mathbf{K}_F^T \vec{n}_f, \quad \chi_F = |\mathbf{K}_F^T \vec{n}_f|.$$

Проведем через центры  $G$  и  $F$  ячеек плоскости, перпендикулярные векторам  $\vec{n}_G$  и  $\vec{n}_F$ . Определим точки  $G''$  и  $F''$  (см. рис. 1) пересечения этих плоскостей с прямыми линиями, проходящими через центр грани  $f$  параллельно векторам  $\vec{N}_G$  и  $\vec{N}_F$  соответственно.

В предположении, что в точках  $G''$ ,  $F''$  и центре грани известны значения давления и функции высоты, потоки от перепада давления и высоты будут определяться следующим образом:

$$\frac{1}{\mu} (\mathbf{K}^T \vec{n}_f \cdot \nabla P) \Delta S_f = \frac{\chi_f}{\mu_f} \frac{P_{F''} - P_{G''}}{|\Delta \vec{R}_{F''f}| + |\Delta \vec{R}_{G''f}|} \Delta S_f; \quad (8)$$

$$\frac{\rho}{\mu} |g| (\mathbf{K}^T \vec{n}_f \cdot \nabla h) \Delta S_f = \rho_f |g| \frac{\chi_f}{\mu_f} \frac{h_{F''} - h_{G''}}{|\Delta \vec{R}_{F''f}| + |\Delta \vec{R}_{G''f}|} \Delta S_f, \quad (9)$$

где значение эффективного коэффициента  $\chi_f$  в центре грани будем определять неким средним значением.

Предположим, что давление и потоки слева и справа от грани непрерывны. Так как осреднение должно применяться для произвольной грани, рассмотрим такую грань, у которой проекция силы тяжести нулевая. Определим удельные потоки через грань  $f$  со стороны ячейки  $G$  и со стороны ячейки  $F$  через значение давления на грани  $P_f$ :

$$Flux_G = \frac{\chi_G}{\mu_f} \frac{P_{F''} - P_f}{|\Delta \vec{R}_{F''f}|}; \quad Flux_F = \frac{\chi_F}{\mu_f} \frac{P_f - P_{F''}}{|\Delta \vec{R}_{F''f}|}.$$

Приравнивая эти потоки и исключая давление на грани  $P_f$ , получаем взвешенное среднее гармоническое усреднение:

$$\chi_f = \frac{\chi_G \chi_F \left( |\Delta \vec{R}_{G''f}| + |\Delta \vec{R}_{F''f}| \right)}{\chi_G |\Delta \vec{R}_{F''f}| + \chi_F |\Delta \vec{R}_{G''f}|}.$$

Отметим, что значения функции высоты в (9) непосредственно определяются в точках  $G''$  и  $F''$ . Значения давления в этих точках вычисляются по формулам

$$P_{G''} = P_G + (\nabla P)_G \cdot \Delta \vec{R}_{GG''}; \quad P_{F''} = P_F + (\nabla P)_F \cdot \Delta \vec{R}_{FF''} \quad (10)$$

с использованием значений градиента давления, вычисленных в центрах ячеек, например, по формуле Гаусса—Грина [11]. При подстановке (10) в (8) получим окончательное выражение для фильтрационного потока через внутреннюю грань двух смежных ячеек:

$$\vec{V}_f \cdot \vec{n}_f \Delta S_f = -\lambda_f \left( P_F - P_G + (\nabla P)_F \cdot \Delta \vec{R}_{FF''} - (\nabla P)_G \cdot \Delta \vec{R}_{GG''} \right) - \rho_f |g| \lambda_f (h_{F''} - h_{G''}), \quad (11)$$

где коэффициент  $\lambda_f$  определяется по формуле

$$\lambda_f = \frac{\chi_G \chi_F}{\mu_f \left( |\Delta \vec{R}_{F''f}| \chi_G + |\Delta \vec{R}_{G''f}| \chi_F \right)} \Delta S_f.$$

Аппроксимация граничных условий зависит от их типа.

Пусть на внешней грани  $f$  задано давление. В этом случае поток через внешнюю грань будет определяться следующим образом:

$$\vec{V}_f \cdot \vec{n}_f \Delta S_f = -\lambda_f \left( P_f - P_G - (\nabla P)_G \cdot \Delta \vec{R}_{GG''} \right) - \rho_f |g| \lambda_f (h_f - h_{G''}), \quad (12)$$



где

$$\lambda_f = \frac{\chi_G \Delta S_f}{\mu_f \left| \Delta \vec{R}_{G''f} \right|}.$$

Если внешняя грань ячейки принадлежит поверхности, где задан фильтрационный поток, то выражение для потока через внешнюю грань запишется в виде

$$\vec{V}_f \cdot \vec{n}_f \Delta S_f = -q_f \Delta S_f. \quad (13)$$

Если грань принадлежит участку поверхности, где поставлено граничное условие третьего рода для напора, то выражение для потока через внешнюю грань приобретает вид

$$\vec{V}_f \cdot \vec{n}_f \Delta S_f = -\alpha \left( P_G + (\nabla P)_G \cdot \Delta \vec{R}_{Gf} - P_f \right) \Delta S_f. \quad (14)$$

Запишем систему разностных уравнений (11), дополненную аппроксимациями граничных условий (12)–(14), для каждой внутренней точки в виде СЛАУ

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

где  $A$  — разреженная матрица с размерами  $N \times N$ ;  $\mathbf{x}$  — искомый вектор размерности  $N$ ;  $\mathbf{b}$  — вектор правых частей размерности  $N$ . Отметим, что для уменьшения количества коэффициентов матрицы значения градиентов давления при аппроксимации потоков в формулах (11)–(13) берутся с предыдущей итерации и добавляются в вектор правой части.

### 3. Решение СЛАУ

При решении задач подземной гидродинамики широкое распространение для решения СЛАУ получили итерационные методы крыловского типа [12]. Решение систем небольшого размера такими методами совместно с одноуровневым предобусловливанием (например, РСР — комбинация предобусловливателя Эйзенштата [13] с решателем СР) сходится за умеренное число итераций. Однако при увеличении размера СЛАУ увеличивается число итераций, что приводит к нелинейному росту затрат машинного времени на ее решение. В то же время для решения СЛАУ в различных задачах механики сплошных сред широко используется альтернативный подход — применение многосеточных (многоуровневых) решателей, первоначально предложенный в виде геометрического многосеточного метода в работе [14]. В частности, агрегативный многосеточный алгебраический решатель AgAMG применяется в пакете программ ЛОГОС при решении задач аэро- и гидродинамики неявными методами [8].

Как правило, конструкция многосеточного решателя состоит из операторов сглаживания, построения огрубленных сеточных уровней вспомогательных СЛАУ, операторов ограничения и пролонгации. Существенно отличаются как по построению уровней грубых сеток, так и по операторам ограничения и пролонгации селективный и агрегативный виды многосеточных решателей [2]. Многосеточный решатель в пакете программ ЛОГОС основан на построении набора СЛАУ меньшего размера.

На рис. 2 схематично изложена концепция AgAMG. Для построения СЛАУ на грубом уровне множество ячеек разбивается на агрегаты, которые состоят из смежных ячеек и являются виртуальными ячейками конечной грубой СЛАУ или служат для построения следующей более грубой СЛАУ. При этом учитывается сила связи ячеек, определенная через коэффициенты матрицы. Фактически именно это отличает AgAMG от GMG-подхода, в котором используется геометрическая информация для построения сеток на грубом уровне. После разбиения ячеек на агрегаты предполагается, что в ячейках из одного агрегата искомые величины равны. Строки матриц таких ячеек суммируются, и получается матрица меньшей размерности. Оператор, соответствующий этому переходу, называется оператором ограничения. Оператор пролонгации выполняет обратную процедуру. Ячейкам, состоящим в агрегате, присваивается решение, полученное в этом агрегате.

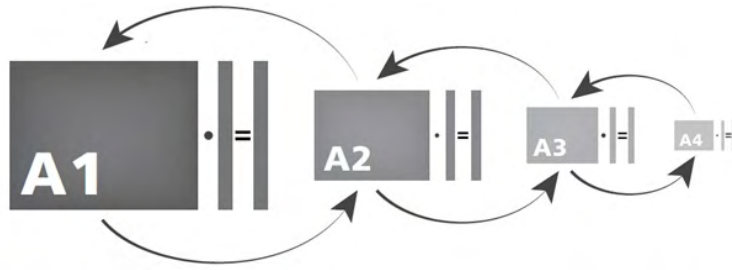


Рис. 2. Концепция AgAMG пакета программ ЛОГОС

Сглаживанием называют процедуру решения системы уравнений классическими методами Якоби, Гаусса—Зейделя, SOR [12]. AgAMG отличается от селективного AMG тем, что вводит новые неизвестные на следующем грубом уровне вместо того, чтобы перевести часть неизвестных текущего уровня на следующий грубый уровень. Это, как правило, приводит к меньшему числу неизвестных во всей иерархии грубых СЛАУ и уменьшению вычислительной сложности построения иерархии СЛАУ и выполнения одной итерации решателя (при однократном и одинаковом сглаживании на каждом уровне).

#### 4. Примеры решения задач однофазной фильтрации с использованием агрегативного AMG-решателя СЛАУ

Задачи подземной гидродинамики существенно отличаются от классической гидродинамики наличием большого количества зон неоднородности. Кроме того, существенно изменяются характерные пространственные размеры, обусловленные строением пластов. Месторождения подземных вод могут тянуться на многие километры, в то время как толщина их может измеряться метрами. Различные выклинивания пластов и их изломы усложняют строение подземных толщ. Эти особенности приводят к увеличению числа обусловленности матрицы СЛАУ, полученной после дискретизации задачи. Далее приведены результаты решения модельных задач, отражающих отмеченные особенности пластовых систем, полученные с использованием решателя AgAMG. Отметим, что при решении методом AgAMG авторами был использован так называемый  $W$ -цикл с тремя итерациями сглаживания после применения очередного оператора пролонгации. В качестве сглаживателя был использован метод DILU — ограниченное неполное разложение ILU0 без модификации внедиагональных коэффициентов матрицы. На этих задачах проверялась также эффективность многосеточного решателя AgAMG по сравнению с итерационным решателем PCG.

**Задача 1.** Рассматривается одномерная фильтрация в пористой среде с проницаемостью  $1 \text{ мкм}^2$ . На левом и правом концах отрезка длиной  $100 \text{ м}$  заданы давления с разностью  $10 \text{ атм}$ .

Количество ячеек счетной сетки —  $10^6$ . СЛАУ решается до понижения нормы невязки на  $10$  порядков. Для предобусловливания в PCG использовался предобусловливатель Эйзенштата [14].

Решение методом PCG было получено за одну итерацию.

Решение с использованием AgAMG было получено примерно за  $200$  итераций. Для иллюстрации процесса сходимости решения на рис. 3 приведен график зависимости невязки\* от числа шагов для AgAMG-решателя.

Видно, что в случае простых одномерных задач выгоднее использовать PCG-решатель.

**Задача 2.** Постановка задачи аналогична задаче 1, но в отличие от нее коэффициент абсолютной проницаемости задан по логнормальному распределению для каждой ячейки сетки. Параметры логнормального распределения:  $\mu = 0$ ;  $\sigma = 1$ .

В этой задаче СЛАУ решается до понижения нормы невязки на  $10$  порядков. Для задачи с количеством ячеек  $10^6$  решение с использованием PCG-решателя было получено за одну итерацию. Решатель AgAMG показал результат, аналогичный задаче 1.

\*Здесь и всюду далее на рисунках оценка невязки приводится в норме  $L_1$ .

На рис. 4 приведен график зависимости невязки от числа итераций при использовании AgAMG-решателя. Невязка понизилась на 9 порядков, и далее решение перестало изменяться по невязке. Решение с использованием AgAMG было получено примерно за 150 итераций.

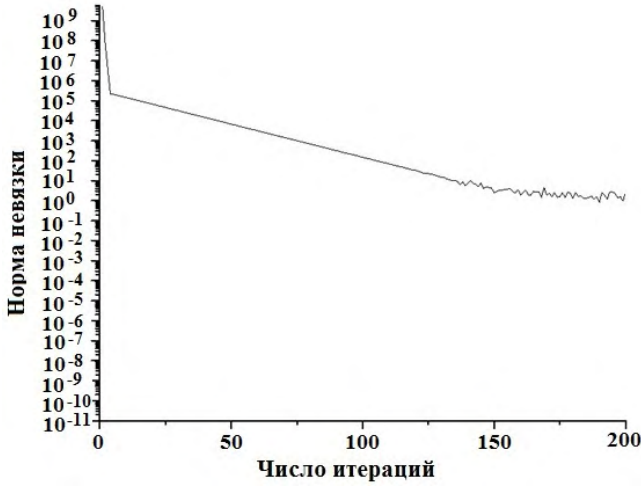


Рис. 3. Зависимость нормы невязки от итераций для модельной задачи 1

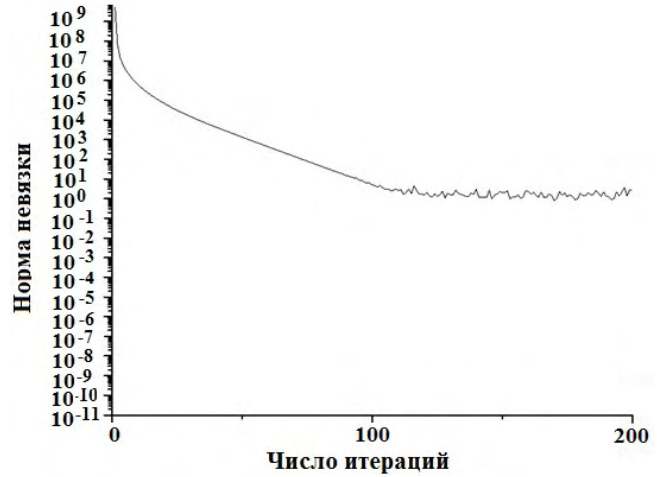


Рис. 4. Зависимость нормы невязки от итераций для модельной задачи 2

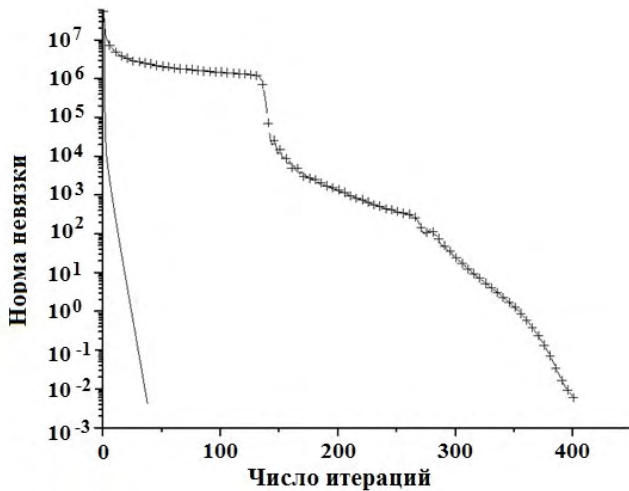


Рис. 5. Зависимости нормы невязки от итераций для модельной задачи 3: — — AgAMG; +++ — PCG

**Задача 3.** Рассматривается фильтрация в однородной пористой среде с проницаемостью  $1 \text{ мкм}^2$ . Решается двумерная задача в квадратной расчетной области с длиной стороны  $320 \text{ м}$  с заданными давлениями слева и справа. Фильтрация воды происходит при перепаде давления в  $10 \text{ атм}$ : на левой границе оно задавалось равным  $10 \text{ атм}$ , на правой — равным нулю. Нижняя и верхняя границы области непроницаемы. Для решения построена квадратная сетка с разбиением  $320 \times 320$  ячеек.

На рис. 5 приведены зависимости невязки от числа итераций для методов решения СЛАУ. Видно, что метод AgAMG имеет существенное преимущество перед решателем PCG. Невязка при решении методом AgAMG уменьшилась на 10 порядков менее чем за 50 итераций, в то время как решение методом PCG было получено за 400 итераций.

**Задача 4.** Рассматривается фильтрация в неоднородной пористой среде. Постановка задачи аналогична задаче 3. Коэффициент проницаемости задан по логнормальному распределению с параметрами  $\mu = 0$ ;  $\sigma = 1$ .

При решении задачи методом AgAMG было построено 16 уровней СЛАУ. Агрегаты на последнем уровне показаны на рис. 6.

Анализ сходимости решения по невязкам для неоднородного случая выявил преимущества AgAMG-решателя перед PCG при решении СЛАУ для этого класса задач. Из рис. 7 видно, что для уменьшения невязки на 10 порядков PCG потребовалось более 500 итераций, в то время как при использовании AgAMG-решателя решение было получено примерно за 50 итераций.

**Задача 5.** Рассчитывается поле давления в области заводнения с пятиточечным шаблоном установки скважин при однородной проницаемости. Рассматривается двумерная (квадратная) об-

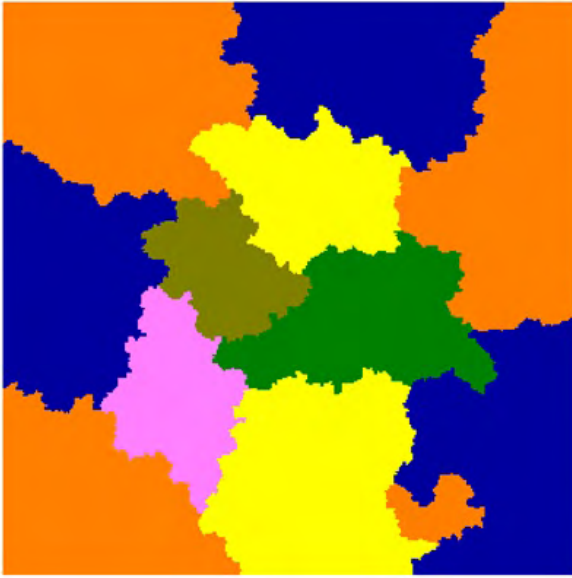


Рис. 6. Агрегаты на 16-м уровне для модельной задачи 4

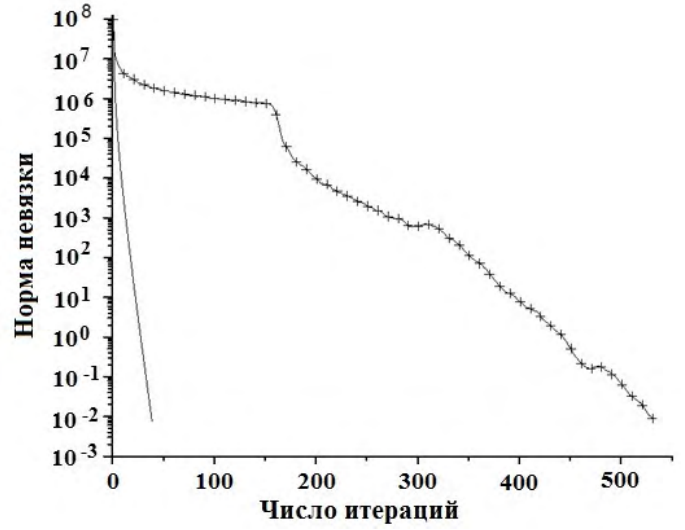


Рис. 7. Зависимости нормы невязки от итераций для модельной задачи 4: — — AgAMG; +++ — PCG

ласть. В левом нижнем и правом верхнем углах области  $320\text{ м} \times 320\text{ м} \times 1\text{ м}$  находятся нагнетательная и добывающая скважины с заданным потоком воды  $2560\text{ м}^3/\text{сут}$ . Пористость равна единице. Число ячеек в задаче —  $320 \times 320$ . В этой задаче определялся также перенос пассивной примеси фильтрационным потоком. Решение уравнения переноса примеси проводилось по неявной схеме UD. Задача определения фильтрационных потоков (распределение давления) решалась в данном случае один раз в начале счета.

Численный фильтрационный поток в данной задаче с использованием решателя AgAMG был получен приблизительно за 50 итераций, а при использовании PCG-решателя — более чем за 450 итераций. На рис. 8 показаны зависимости невязки решения от числа итераций для этих решателей.

На рис. 9 приводятся распределения концентраций пассивной примеси на последовательные моменты времени  $t = 20$  и  $30$  сут, полученные с использованием PCG-решателя. Поля концентраций,

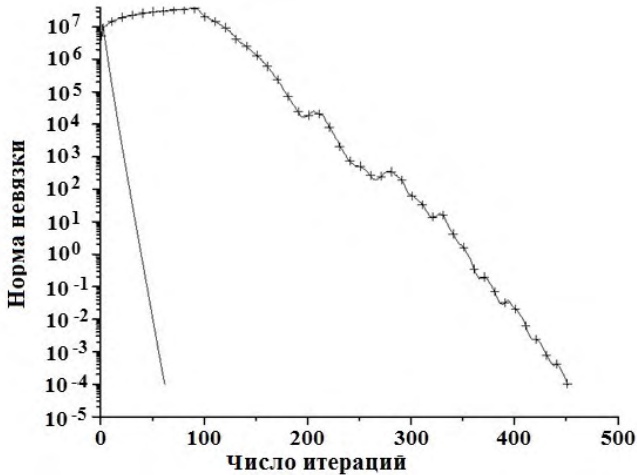


Рис. 8. Зависимости нормы невязки от итераций для модельной задачи 5: — — AgAMG; +++ — PCG

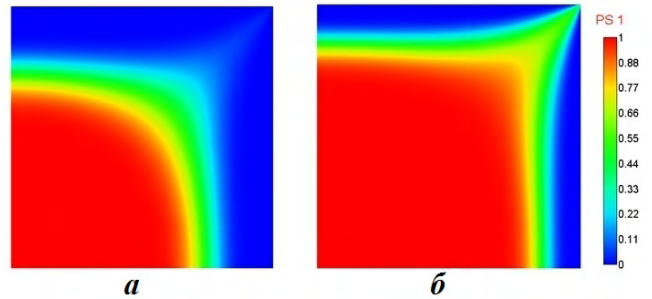


Рис. 9. Поля концентраций пассивной примеси для модельной задачи 5 (PCG-решатель,  $dt = 1$  сут): *а* —  $t = 20$  сут; *б* —  $t = 30$  сут

полученные с использованием AgAMG-решателя, аналогичны. При этом потоки через грани совпадают с точностью до  $10^{-8} \text{ м}^3/\text{сут}$ .

**Задача 6.** Рассчитывается поле давления в области заводнения с пятиточечным шаблоном расстановки скважин при логнормальном распределении абсолютной проницаемости. Параметры логнормального распределения:  $\mu = 0$ ;  $\sigma = 1$ . Постановка задачи аналогична задаче 5.

В этой задаче число итераций для определения решения с использованием PCG-решателя существенно возросло и составило более 750 итераций. В то же время решатель AgAMG справился с задачей приблизительно за 50 итераций. Характеры зависимостей невязки от числа итераций для этих решателей показаны на рис. 10.

На рис. 11 приводятся расчетные поля пассивной примеси в фильтрационных потоках, полученные при  $t = 20$  и 30 сут с использованием PCG-решателя.

Потоки через грани, полученные с помощью методов PCG и AMG решения СЛАУ, как и в задаче 5, совпадают с точностью до  $10^{-8} \text{ м}^3/\text{сут}$ .

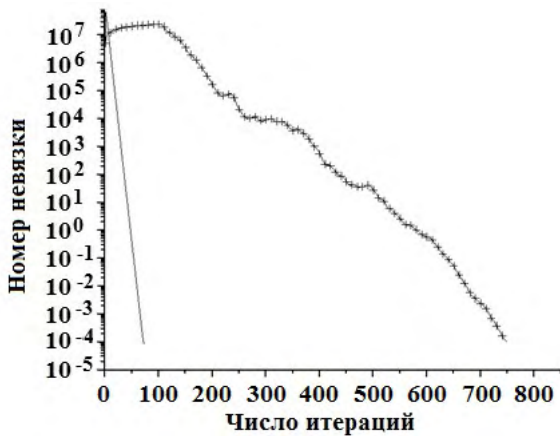


Рис. 10. Зависимости нормы невязки от итераций для модельной задачи 6: — — AgAMG; +++ — PCG

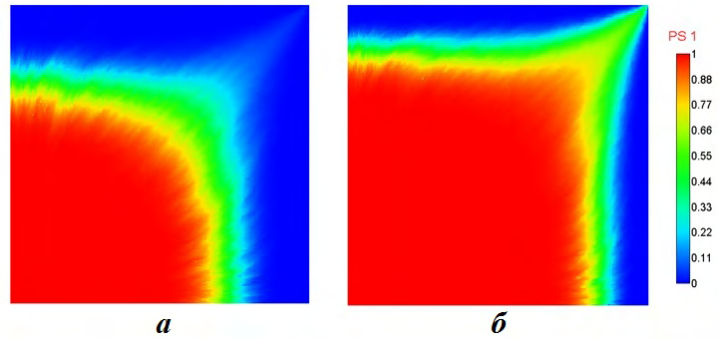


Рис. 11. Поля концентраций пассивной примеси для модельной задачи 6 (PCG-решатель,  $dt = 1$  сут): а —  $t = 20$  сут; б —  $t = 30$  сут

**Задача 7.** Рассчитывается поле давления в области заводнения с пятиточечным шаблоном расстановки скважин при однородной проницаемости (число ячеек —  $1000 \times 1000 \times 1$ ). В левом нижнем и правом верхнем углах двумерной (квадратной) области  $1000 \text{ м} \times 1000 \text{ м} \times 1 \text{ м}$  находятся нагнетательная и добывающая скважины с заданным потоком воды  $25000 \text{ м}^3/\text{сут}$ . Пористость равна единице. Поведение полей концентрации и давления аналогично задаче 5. Существенным отличием является большой размер матрицы СЛАУ.

На рис. 12 приводятся зависимости невязки от числа итераций в расчетах с решателями AgAMG и PCG. Из сравнения результатов с задачей 5 следует, что при увеличении числа ячеек увеличивается количество итераций в расчете задачи с PCG-решателем, а в расчете с AgAMG-решателем количество итераций остается прежним.

**Задача 8.** Рассчитывается поле давления в области заводнения с пятиточечным шаблоном расстановки скважин при логнормальном распределении абсолютной проницаемости (число ячеек —  $1000 \times 1000 \times 1$ ). Постановка задачи аналогична задаче 6. Логнормальное распределение коэффициента проницаемости задано с параметрами  $\mu = 0$ ;  $\sigma = 1$ .

На рис. 13 приводятся зависимости невязки от числа итераций в расчетах с решателями AgAMG и PCG. Для сходимости невязки до заданной точности при использовании метода AgAMG было выполнено 68 итераций, в то время как при использовании PCG для сходимости решения потребовалось 2242 итерации.

Несмотря на то что время выполнения одной итерации для AgAMG-решателя больше, чем для PCG, общее время решения СЛАУ (до невязки  $\varepsilon = 0,01$ ) методом AgAMG оказалось в два раза меньше из-за существенно меньшего количества итераций.

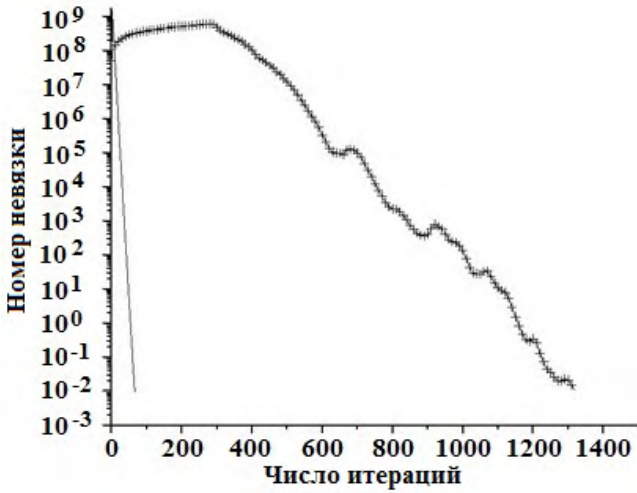


Рис. 12. Зависимости нормы невязки от итераций для модельной задачи 7: — — AgAMG; +++ — PCG

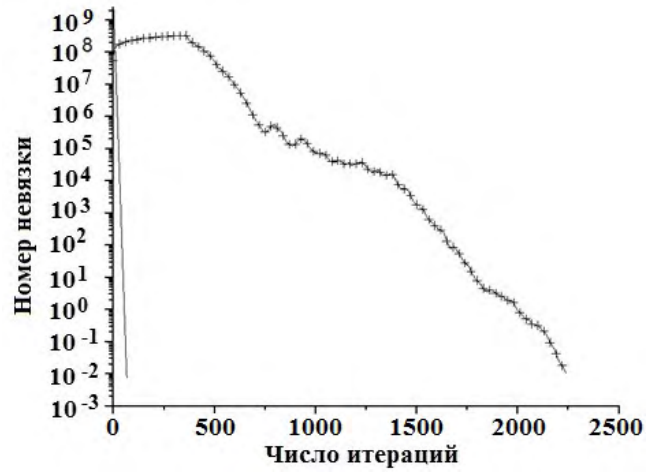


Рис. 13. Зависимости нормы невязки от итераций для модельной задачи 8: — — AgAMG; +++ — PCG

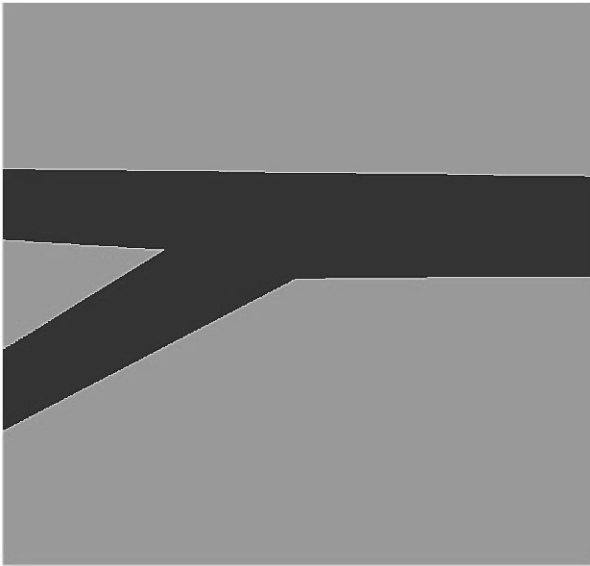


Рис. 14. Зоны неоднородности для модельной задачи 9

**Задача 9.** Рассчитывается поле давления в неоднородной области вблизи двух источников (рек) с заданным давлением. Рассматривается псевдотрехмерная область. Расчетная область  $100\text{ м} \times 100\text{ м} \times 1\text{ м}$  (вертикальный разрез пласта) покрыта сеткой с размерами  $1000 \times 1000 \times 1$ . Зоны неоднородных включений заданы согласно рис. 14. Слабопроницаемая перемычка (темного цвета) имеет проницаемость  $10^{-4}\text{ мкм}^2$ , вне перемычки проницаемость составляет  $1\text{ мкм}^2$ .

Сила тяжести направлена вниз. Начальное давление — 100 бар. В левом и правом верхних углах заданы источники/стоки (с номерами 1 и 2), которые моделируют взаимодействие геологических объектов с пористой средой:

$$Q_1 = \text{Cond}_1(P_1 - P); \quad Q_2 = \text{Cond}_2(P_2 - P),$$

где  $Q_i$  ( $i = 1, 2$ ) — массовый поток из источника  $i$  в область;  $\text{Cond}_i$  — коэффициент взаимодействия источника  $i$  с пористой средой;  $P_i$  — давление в  $i$ -м источнике.

Например, были использованы следующие параметры источников:

$$\text{Cond}_1 = \text{Cond}_2 = 1\,000\,000 \frac{\text{кг}}{\text{сут} \cdot \text{бар}}; \quad P_1 = 20\text{ бар}; \quad P_2 = 30\text{ бар}.$$

Решение СЛАУ методом AgAMG заняло 57,99 с, а методом PCG — 73,57 с. Поле давления, полученное с использованием решателя AgAMG, приведено на рис. 15. Максимальная по модулю компонента вектора невязки при решении СЛАУ равнялась  $1,7 \cdot 10^{-6}$ . При решении СЛАУ методом PCG получается такой же результат, поэтому для PCG-метода рисунки не приводятся.

На рис. 16 приводятся зависимости невязки от числа итераций в расчетах с AgAMG- и PCG-решателями. Для сходимости невязки до заданной точности при использовании AgAMG было выполнено 214 итераций, в то время как при использовании метода PCG для сходимости решения потребовалось 2617 итераций.

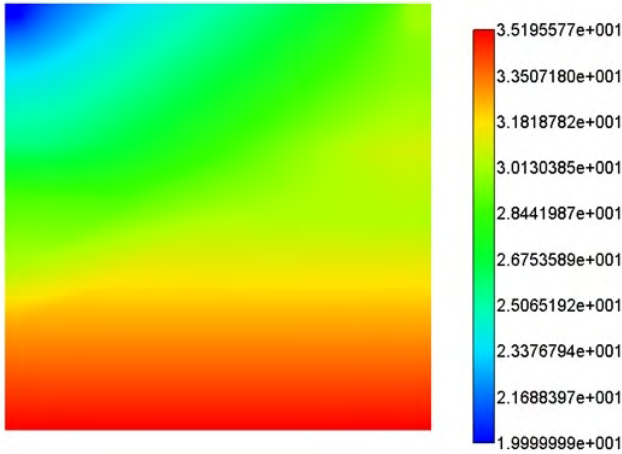


Рис. 15. Стационарное распределение давления (в бар) для модельной задачи 9

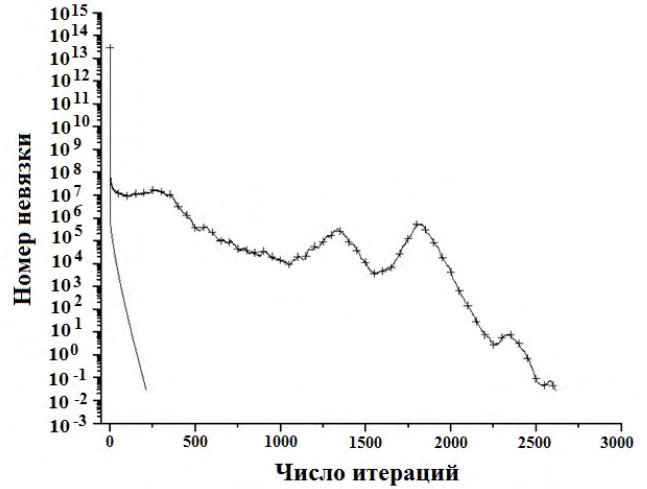


Рис. 16. Зависимости нормы невязки от итераций для модельной задачи 9: — — AgAMG; +++ — PCG

**Задача 10.** Рассчитывается поле давления в неоднородной области вблизи двух источников (рек) с заданным давлением. Рассматривается трехмерная область малой толщины. Зоны неоднородных включений заданы, как на рис. 14.

Постановка аналогична задаче 9. Расчетная область  $100 \text{ м} \times 100 \text{ м} \times 1 \text{ м}$  (вертикальный разрез пласта) покрыта сеткой, состоящей из 2 832 708 тетраэдров (рис. 17).

Коэффициент сглаживания по нелинейности для давления был принят равным 0,5. Это означает, что после каждого решения СЛАУ только половина от вектора приращения суммируется с предыдущим давлением. Критерием окончания итераций служила сходимость системы нелинейных уравнений по невязке (в норме  $L_1$ ):  $\varepsilon_{abs} < 0,01$ . Критерием остановки решения для СЛАУ также являлась абсолютная величина невязки  $\varepsilon_{abs} < 0,01$ . Решение всей задачи с использованием AgAMG-решателя заняло 2 445 с, с использованием PCG-решателя — 4 741 с. Давления, полученные на последней итерации, в обоих случаях идентичны. Поле давления, полученное с помощью AgAMG, приведено на рис. 18.

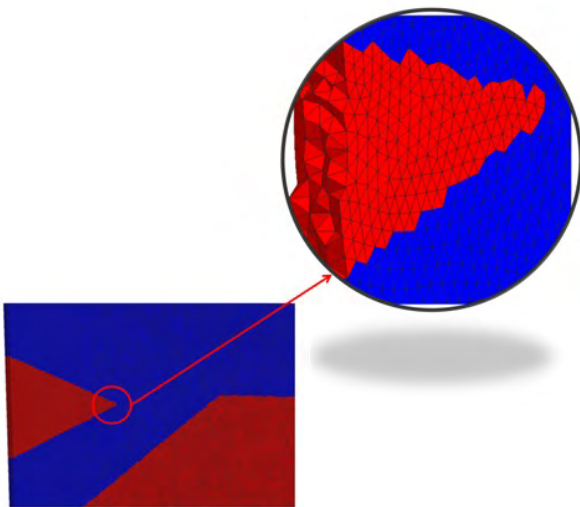


Рис. 17. Сетка, построенная из тетраэдров в модельной задаче 10

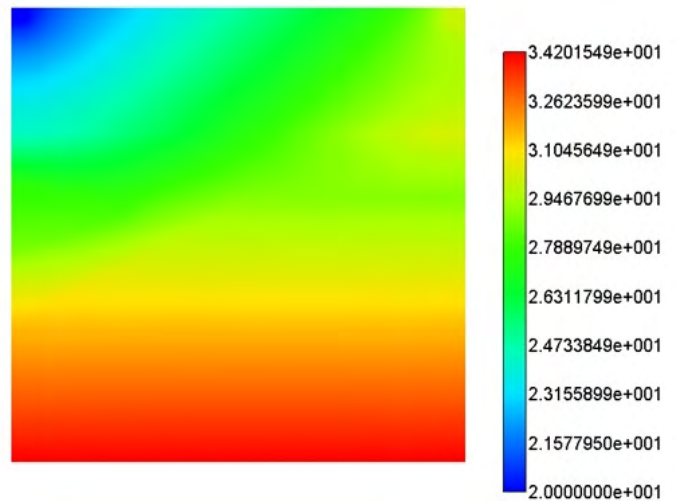


Рис. 18. Стационарное распределение давления (в бар) для модельной задачи 10

Таким образом, решение с использованием многосеточного решателя было получено в 1,94 раза быстрее.

На рис. 19 приведено время расчета потока СЛАУ. Видно, что сначала, при большой невязке (рис. 20), решение методом AgAMG намного опережает PCG. Именно этим фактом и обусловлена конечная разница во времени решения всей задачи. Судя по рис. 20, можно также сказать, что с большой вероятностью характер сходимости по нелинейности для обоих методов был одинаковым.

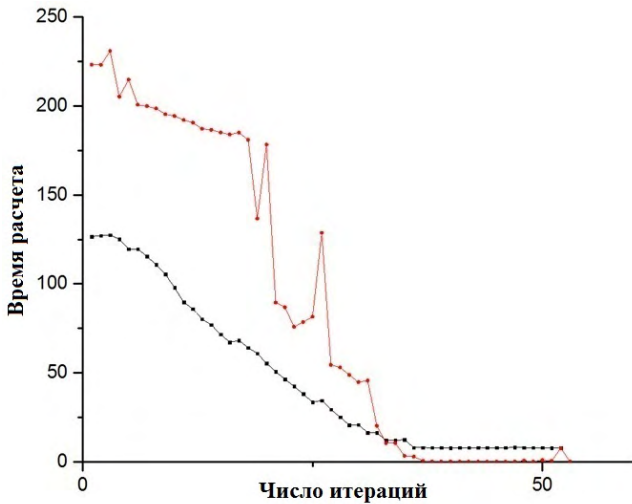


Рис. 19. Время расчета потока СЛАУ для модельной задачи 10: —■— — AgAMG; —●— — PCG

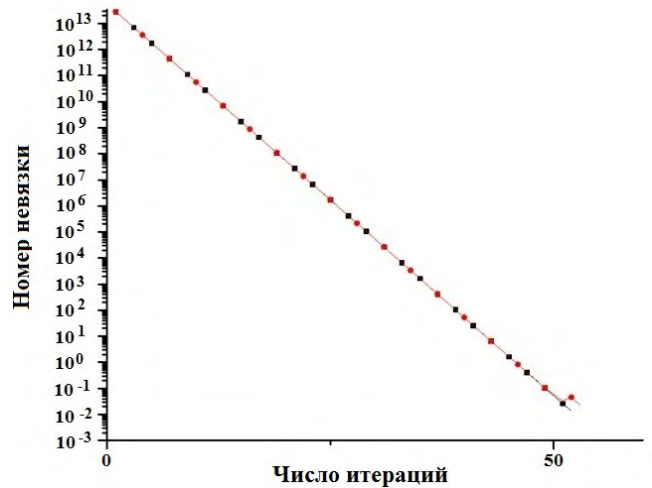


Рис. 20. Норма невязки при решении нелинейной СЛАУ для модельной задачи 10: —■— — AgAMG; —●— — PCG

Кроме того, на данной задаче были проведены сравнения разных реализаций многосеточного метода из библиотеки PMLP/ParSol, используемой в пакете НИМФА. Рассматривались следующие варианты:

- 1) решатель AgAMG, сглаживатель DILU. Число итераций предварительного сглаживания равно нулю, заключительного сглаживания — 3. Огрубление по двум ячейкам, максимальное число ячеек на грубом уровне равно 5. Тип цикла у AgAMG —  $W$ ;
- 2) CG-решатель с селективным AMG в качестве предобусловливателя, сила связи 0,0125. В качестве сглаживателя — решатель Якоби;
- 3) BiCGStab-решатель с AgAMG в качестве предобусловливателя, сглаживатель SGS. Число итераций предварительного сглаживания равно нулю, заключительного сглаживания — 1. Огрубление по двум ячейкам. Тип цикла у AgAMG —  $V$ ;
- 4) BiCGStab-решатель с AgAMG в качестве предобусловливателя, сглаживатель DILU. Число итераций предварительного сглаживания равно нулю, заключительного сглаживания — 3. Огрубление по двум ячейкам. Тип цикла у AgAMG —  $W$ .

Сравнивалось время решения первых десяти СЛАУ и 24-й СЛАУ. В таблице для указанных вариантов приведено время работы и число итераций (в скобках) решателей с критерием сходимости (в ЛОГОС и PMLP/ParSol) по  $L_2$ -норме вектора невязки.

Из таблицы видно, что использование CG-решателя с селективным AMG в качестве предобусловливателя (вариант 2) больше всего ускоряет решение задачи. Но при этом, как известно, увеличиваются затраты по оперативной памяти по сравнению с использованием AgAMG в качестве решателя.



## Время (в с) и число итераций решателей для модельной задачи 10

Номер СЛАУ	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
1	103,0 (21)	35,3 (102)	187,1 (156)	110 (10)
4	79,5 (16)	31,8 (99)	175,9 (149)	89,2 (8)
7	64,9 (13)	30,8 (96)	67,4 (56)	67,9 (6)
10	50,7 (10)	30,3 (92)	64,6 (54)	62,6 (6)
24	8,2 (2)	4,5 (9)	3,0 (1)	14,7 (1)

## Выводы

В ходе работы была реализована методика решения задач фильтрации в неоднородной пористой среде. Для решения СЛАУ используется метод AMG. Проведено исследование применимости решателя AgAMG для задач подземной гидродинамики. На модельных примерах показано, что на задачах с большим числом ячеек и существенной неоднородностью породы решатель AgAMG дает значительный выигрыш в скорости счета (более чем в 2 раза) по сравнению с PCG. При этом выигрыш растет с повышением неоднородности задачи и увеличением размеров сетки. Кроме того, число итераций метода AgAMG до достижения заданной точности невязки не зависит от числа неизвестных СЛАУ. Поэтому скорость решения "больших" задач фильтрации и гидродинамики с применением AgAMG является максимальной. Различные методы использования AMG-подхода, а также изменение параметров и настроек решателя также могут способствовать увеличению скорости счета задач, как это показано при решении потока СЛАУ задачи 10, где различные варианты AMG использовались в качестве предобусловливателей решателей крыловского типа. При использовании сеток небольшого размера СЛАУ обычно считаются быстрее с использованием PCG.

Авторы выражают благодарность Ю. Г. Бартеневу и А. Н. Стаканову за помощь в проведении численных экспериментов с использованием библиотеки PMLP/ParSol, а также обсуждения полученных результатов.

## Список литературы

1. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Корчёнова Н. В. Вычислительные методы. С.-Пб.: Лань, 2014.  
*Amosov A. A., Dubinskiy Yu. A., Korchenova N. V. Vychislitelnye metody. S.-Pb.: Lan, 2014.*
2. Волков К. Н., Дерюгин Ю. Н., Емельянов В. Н., Карпенко А. Г., Козелков А. С., Тетерина И. В. Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2013.  
*Volkov K. N., Deryugin Yu. N., Emelyanov V. N., Karpenko A. G., Kozelkov A. S., Teterina I. V. Metody uskoreniya gazodinamicheskikh raschetov na nestrukturovannykh setkakh. M.: Fizmatlit, 2013.*
3. Naumov M., Arsaev M., Castonguay P., Cohen J., Demouth J., Eaton J., Layton S., Markovskiy N., Reguly I., Sakharlykh N., Sellappan V., Strzodka R. AmgX: A library for GPU accelerated algebraic multigrid and preconditioned iterative methods // SIAM J. Sci. Comp. 2015. Vol. 37, No 5. P. S602–S626.
4. Gee M. W., Siefert C. M., Hu J. J., Tuminaro R. S., Sala M. G. ML 5.0 Smoothed Aggregation User's Guide. Sandia National Laboratories, 2006.
5. Falgout R. D., Jones J. E., Yang U. M. The design and implementation of hypre, a library of parallel high performance preconditioners // Numerical Solution of Partial Differential Equations of Parallel Computers. 2006. Vol. 51. P. 267–294.
6. Бартенева Ю. Г., Ерзунов В. А., Карпов А. П., Петров Д. А., Пищулин И. А., Стаканов А. Н., Щаникова Е. Б., Капорин И. Е., Милloкова О. Ю., Харченков С. А., Коньшин И. Н., Мее-

- ров И. Б., Сысоев А. В. Комплекс библиотек параллельных решателей SLAU LPARSOL версии 3 // Тр. XV Межд. конф. "Супервычисления и математическое моделирование". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2015. С. 89–101.
- Bartenev Yu. G., Erzunov V. A., Karpov A. P., Petrov D. A., Pishchulin I. A., Stakanov A. N., Shchanikova E. B., Kaporin I. E., Milyukova O. Yu., Kharchenkov S. A., Konshin I. N., Meerov I. B., Sysoev A. V.* Kompleks bibliotek paralelnykh reshateley SLAU LPARSOL versii 3 // Tr. XV Mezhd. konf. "Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie". Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2015. S. 89–101.
7. *Алейников А. Ю., Бардина М. Н., Горев В. В., Горев И. В., Глазунов В. А., Губкова Г. Н., Кузьмина О. И., Новиков И. Г., Панов А. И., Полищук С. Н., Резяпов А. А., Рябов Е. И., Чистякова И. Н.* Параллельная версия комплекса программ НИМФА // Тр. XIII Межд. конф. "Супервычисления и математическое моделирование". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2012. С. 40–49.
- Aleynikov A. Yu., Bardina M. N., Gorev V. V., Gorev I. V., Glazunov V. A., Gubkova G. N., Kuzmina O. I., Novikov I. G., Panov A. I., Polishchuk S. N., Rezyapov A. A., Ryabov E. I., Chistyakova I. N.* Parallelnaya versiya kompleksa programm NIMFA // Tr. XIII Mezhd. konf. "Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie". Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2012. S. 40–49.
8. *Козелков А. С., Дерюгин Ю. Н., Лашкин С. В., Силаев Д. П., Симонов П. Г., Тятюшккина Е. С.* Реализация метода расчета вязкой несжимаемой жидкости с использованием многосеточного метода на основе алгоритма SIMPLE в пакете программ ЛОГОС // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 4. С. 44–56.
- Kozelkov A. S., Deryugin Yu. N., Lashkin S. V., Silaev D. P., Simonov P. G., Tyatyushkina E. S.* Realizatsiya metoda rascheta vyazkoy neshhimaemoy zhidkosti s ispolzovaniem mnogosetochnogo metoda na osnove algoritma SIMPLE v pakete programm LOGOS // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2013. Vyp. 4. S. 44–56.
9. *Азис Х., Сеттари Э.* Математическое моделирование пластовых систем. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
- Azis Kh., Settari E.* Matematicheskoe modelirovanie plastovykh sistem. M.-Izhevsk: Institut kompyuternykh issledovaniy, 2004.
10. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2005.
- Samarskiy A. A., Mikhaylov A. P.* Matematicheskoe modelirovanie: Idei. Metody. Primery. M.: Fizmatlit, 2005.
11. *Ferziger J. H., Peric M.* Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer, 2002.
12. *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Minneapolis, University of Minnesota, 2000.
13. *Eisenstat S. C.* Efficient implementation of a class of preconditioned conjugate gradient methods // SIAM J. Sci. Comp. 1981. Vol. 2, No 1. P. 1–4.
14. *Федоренко Р. П.* Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1961. Т. 1, № 5. С. 922–927.
- Fedorenko R. P.* Relaksatsionny metod resheniya raznostnykh ellipticheskikh uravneniy // Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz. 1961. T. 1, № 5. S. 922–927.

SINGLE-PHASE FLOW SIMULATIONS USING AN ALGEBRAIC MULTIGRID SOLVER FOR SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS / Yu. N. Deryugin, P. A. Mashenkin (FSUE "RFNC-VNIEF", Sarov, N. Novgorod region).

Usability of an algebraic multigrid solver for systems of linear algebraic equations in underground hydrodynamic simulations is considered. A methodology for solving the problems of single-phase flow in non-uniform and anisotropic porous media on unstructured meshes composed of convex non-self-intersecting cells is presented. It is shown experimentally that the efficiency of using the algebraic multigrid solver grows with increasing non-uniformity of bed rock and increasing problem mesh size. The algebraic multigrid solver is compared with the Krylov-type PCG solver in error convergence and computing time.

*Keywords:* SLAE (system of linear algebraic equations), algebraic multigrid solver, underground hydrodynamics, approximation on unstructured mesh.

---

УДК 519.6

## МНОГОКРАТНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНОГОУРОВНЕВОЙ СТРУКТУРЫ ДАННЫХ В АЛГЕБРАИЧЕСКОМ МНОГОСЕТОЧНОМ РЕШАТЕЛЕ СЛАУ

Ю. Г. Бартнев, А. П. Карпов  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Рассмотрен способ многократного использования построенной многоуровневой структуры данных алгебраического многосеточного предобусловливателя и решателя для потока СЛАУ с одинаковым портретом матриц. Этот способ, названный частичным построением алгебраического многосеточного решателя вслед за его полным построением для предшествующей СЛАУ, состоит в обновлении только значений коэффициентов ранее построенных грубых матриц без изменения их структуры. Представлены примеры применения сочетания полного и частичного построения алгебраического многосеточного решателя в разных вариантах его реализации. Показано значительное сокращение времени решения СЛАУ в задачах моделирования различных физических процессов с использованием указанного способа построения решателя в библиотеке PMLP/ParSol и некоторых других библиотеках. Вкратце затрагивается вопрос адаптивного сочетания полного и частичного построения алгебраического многосеточного решателя.

*Ключевые слова:* система линейных алгебраических уравнений, разреженные матрицы, алгебраические многосеточные предобусловливатели и решатели, уравнения гидродинамики, уравнения аэродинамики, уравнения распространения тепла в твердом теле, уравнения диффузии жидкости в пористых средах, уравнения лучистой теплопроводности, поток СЛАУ с одинаковым портретом матриц, итерационные решатели CG, BiCGStab.

### Введение

Алгебраические многосеточные решатели и предобусловливатели AMG (Algebraic MultiGrid) [1, 2] применяются при решении СЛАУ с разреженными матрицами при счете различных задач с использованием неявных численных методов на параллельных ЭВМ. Стадия построения AMG, заключающаяся в иерархическом построении грубых матриц и векторов правой части все уменьшающегося размера, часто занимает больше времени, чем стадия итерационного решения СЛАУ в случае небольшого числа итераций. Для сокращения полного времени решения СЛАУ с использованием AMG (построение + решение) предлагается эмпирически проверенный способ частичного построения AMG. Он заключается в фиксации структуры всех ранее построенных грубых матриц AMG для нескольких подряд идущих СЛАУ с одинаково разреженными матрицами и обновлении только значений коэффициентов этих матриц. Это достигается путем фиксации всех построенных для текущей СЛАУ матриц рестрикции  $R$  и пролонгации  $P = R^T$  для части последующих СЛАУ до тех пор, пока затраты на возможное увеличение числа итераций из-за неточности построения не превзойдут снижения затрат из-за частичного построения AMG.

Накладные расходы этого способа могут заключаться в повышенных затратах памяти. Матрицы  $R$  и  $P$  или только одну из них, а также грубые матрицы приходится хранить в памяти до момента

вызова решателя следующей СЛАУ. Медленная сходимость решения следующей СЛАУ из-за частичного (менее точного) построения AMG может быть условием полного построения AMG для следующей СЛАУ.

Частичное построение реализовано в агрегативном (AgAMG) и селективных многосеточных предобусловливателях библиотеки PMLP/ParSol [3] параллельных решателей СЛАУ и проверялось в задачах моделирования процессов лучистой теплопроводности, фильтрации жидкости в пористых средах, течения жидкости и газа, распространения тепла в твердом теле. Оно также вводилось и проверялось в AMG библиотеки Parallel Toolbox [4], BoomerAMG библиотеки hupre [5], решателе AgAMG модуля аэродинамики комплекса ЛОГОС [6]. Часть полученных результатов без описания рассматриваемого здесь способа опубликована в работах [3, 7]. Частичное построение AMG, как и другие способы частичного построения предобусловливателей, такие как переиспользование перекрытий матриц, векторов перестановки, грубой матрицы двухсеточного варианта Шварца (Coarse Grid Correction), были применены в адаптивном предобусловливателе потока СЛАУ с одним портретом матриц [8, 9].

### Описание способа и модель применения

Пусть программа моделирования некоторого физического процесса порождает последовательность (поток) СЛАУ с одним неизвестным в каждой ячейке сетки. При этом неизвестное в данной ячейке во всей последовательности СЛАУ зависит от одного и того же набора неизвестных. Например, такой неизменный состав взаимозависимых неизвестных свойственен счету на сетке постоянного размера и топологии. В этом случае СЛАУ данного потока обладают матрицами, отличающимися только коэффициентами в одних и тех же позициях (матрицы с одинаковым портретом). Существуют приложения, где топология и размер сетки постоянны на протяжении либо решения всей задачи, либо нескольких временных шагов, либо одного временного шага на итерациях по нелинейности. Соответственно матрицы множества СЛАУ, соответствующие таким этапам счета, обладают постоянным портретом. В этом случае некоторые операции решателя СЛАУ, например указанные в конце Введения, могут быть выполнены для первой СЛАУ и применяться для всех СЛАУ этого потока. К таким операциям можно отнести и частичное построение пирамиды предобусловливающих матриц AMG, которое, в отличие от обычного (полного) построения AMG, пренебрегает изменением силы связи неизвестных на каждом уровне иерархии при решении нескольких СЛАУ и использует зависимость мелких и грубых неизвестных, определенную алгоритмом AMG для первой СЛАУ такого потока. Таким образом, операция  $A_c = P^T A_f P$ , где  $A_f$  — подробная матрица, а матрица пролонгации  $P$  постоянна для каждого уровня грубых матриц нескольких подряд идущих СЛАУ, порождает грубые матрицы  $A_c$  с одинаковым портретом и разными значениями на одинаковых уровнях.

Частичное построение AMG, при котором не строятся матрицы пролонгации<sup>1</sup>, а используются ранее построенные, позволяет значительно сократить время построения грубых матриц нескольких следующих СЛАУ. Например, при решении в параллельном режиме трех СЛАУ нелинейного процесса теплопроводности в методике MPC [10] методом AgAMG(smooth=Jacoby, agg=4)+BiCGStab<sup>2</sup> [3, 6, 11], где полное построение AgAMG выполнялось для первой СЛАУ, а частичное — для двух следующих, на построение AgAMG затрачено 0,73 с вместо 174 с при полном построении AMG для каждой СЛАУ. При этом в обоих случаях на итерации затрачено 98 с.

Частичное построение AMG в отдельных случаях может совпадать с полным. Например, на итерациях по нелинейности в ряде случаев используется метод, приводящий к коррекции только диагонали матрицы СЛАУ. Такая коррекция не вносит изменений в метод разделения неизвестных на грубые и мелкие, который основан на отношении силы связи неизвестного  $j$  с неизвестным  $i$  к силе связи максимально связанного с  $i$  неизвестного  $k$  [5]:

<sup>1</sup>Построение матриц пролонгации — процесс выбора грубых неизвестных (или агрегатов неизвестных) путем обхода коэффициентов, избивлюющий операциями сравнения и условного перехода, которые являются источниками низкой производительности этого процесса.

<sup>2</sup>Здесь параллельный, многопоточный алгебраический многосеточный предобусловливатель агрегативного типа, подобный решателю, описанному в работе [6], используется в сочетании с итерационным решателем BiCGStab. В скобках указаны параметры: сглаживатель Якоби и агрегирование по 4 ячейки.

$$-A_{ij} \geq -st \cdot A_{ik}, \text{ где } -A_{ik} = \max_j \{-A_{ij}, j \neq i\}; 0 \leq st < 1, 0; A_{ij} < 0; A_{ik} < 0.$$

Игнорирование силы связи ( $st = 0$ ) имеет такой же результат.

В других случаях построенные матрицы пролонгации следующей СЛАУ на каждом уровне обычно отличаются от матриц пролонгации предыдущей СЛАУ из-за изменения взаимозависимости неизвестных. Поэтому *пролонгация матриц пролонгации* с текущей СЛАУ на следующую может изменить качество предобусловливания (число итераций), но, как правило, не сильно, как наблюдалось в экспериментах [8]. Частичное построение AMG должно контролироваться, чтобы экономия времени построения AMG не привела к значительному росту числа итераций и увеличению времени решения СЛАУ. Этот контроль может быть вынесен за пределы AMG и отнесен к выбору наилучшего предобусловливателя потока СЛАУ, среди которых, помимо данного AMG, могут быть другие его разновидности, блочные ILU и др. В библиотеке PMLP/ParSol это выполняется в методе адаптивного выбора предобусловливателя потока СЛАУ [9].

Число СЛАУ потока с постоянной структурой разреженности матриц, допускающих эффективное использование одной и той же пирамиды грубых матриц AMG на разных участках счета, различно, даже если размер и топология сетки не изменяются. Например, в задаче [8], удовлетворяющей вышеуказанным условиям, рассчитываемой по методике МИМОЗА [12], частичное построение AMG эффективно применялось для решения потока СЛАУ на одном, нескольких, сотнях временных шагов после полного построения AMG ранее решенной СЛАУ.

Способ частичного построения AMG изначально был предложен для решения СЛАУ давления на графическом сопроцессоре (GPGPU). Использовался предобусловливатель AMG решателя CG библиотеки Parallel Toolbox, в котором итерации CG выполнялись на GPGPU, а достаточно длительные операции построения AMG — на универсальном процессоре, что снижало эффективность применения GPU. Основой для нового подхода служила нестрогая определенность влияния одних неизвестных на другие, за которую "отвечает" внедиагональный коэффициент матрицы (который известен) и значение неизвестного при этом коэффициенте (которое неизвестно). Развитие физического процесса может медленно менять влияние переменных друг на друга, видимо, тем медленнее, чем грубее уровень для нахождения все более низкочастотной составляющей ошибки решения. Поэтому можно было предположить, что один раз определенное влияние переменных друг на друга на грубых уровнях можно использовать для решения нескольких СЛАУ, порождаемых в ходе расчета. Это должно было значительно сократить время построения AMG, возможно, при небольшом изменении числа итераций.

Данное предположение подтвердилось при решении задачи стационарного течения несжимаемой жидкости в пакете программ ЛОГОС [13, 14]. Задача решалась с использованием AMG Parallel Toolbox с параметром  $\varepsilon = 0$ , при котором все ячейки  $j$ , инцидентные ячейке  $i$ , одинаково влияют на  $i$ , а затем с  $\varepsilon > 0$ , при котором ячейка  $j$  влияет на ячейку  $i$ , только если  $-A_{ij}/A_{ii} > \varepsilon$ . Хотя при  $\varepsilon = 0$  значения коэффициентов пирамиды грубых матриц  $A$  последовательности СЛАУ давления различались, их структура, а также значения пирамиды матриц пролонгации  $P$  и рестрикции  $R$  совпадали. Поэтому первым шагом по оптимизации процесса построения AMG стала реализация однократного построения пирамиды матриц пролонгации и рестрикции и многократное их применение для всех СЛАУ потока, что потребовало небольшого репрограммирования AMG. Это несколько сократило время построения AMG, которое и так относительно невелико при построении на центральном процессоре (ЦП) в последовательном режиме.

Дополнительным шагом было использование одинаковой структуры разреженности построенной пирамиды грубых матриц коэффициентов (а не только  $P$  и  $R$ ) для ускорения оператора Галеркина  $A_c = RA_fP$  при частичном построении AMG. Приведенный далее алгоритм относится только к одному уровню построения AMG, для остальных уровней он выполняется аналогично.

Для текущей СЛАУ используются массивы  $j$ -индексов  $jind$  и позиций первых ненулевых элементов строки  $pos$  (матрицы значений хранятся в формате CSR — Compressed Sparse Rows) грубой матрицы AMG, построенной для предыдущей СЛАУ. Матрица рестрикции  $R$  хранится в формате CSR, матрица интерполяции  $P$  — в формате CSC (Compressed Sparse Columns). В действительности же используется только матрица  $P$ : так как  $P = R^T$ , то, чтобы получить строку матрицы  $R$ , можно взять столбец матрицы  $P$ .

Пусть *srows* — количество строк (и столбцов) грубой матрицы коэффициентов  $A_c$  следующего уровня AMG (оно, как и число ее ненулевых коэффициентов, известно от предыдущего построения AMG), *RArow* — плотная строка для хранения результата умножения строки матрицы  $R$  (она же — столбец матрицы  $P$ ) на матрицу коэффициентов  $A_f$ , изначально заполняемая нулями. Тогда алгоритм эффективного умножения трех матриц при известном положении коэффициентов в матрице  $A_c$  записывается следующим образом:

```

for i = 0...srows
do
  {Вычисление RArow для i-й строки матрицы R}
  for j = posP[i]...posP[i+1]
  do
    for k = posAf[jindP[j]]...posAf[jindP[j]+1]
    do
      RArow[jindAf[k]] += valP[j] * valAf[k]
    enddo
  enddo
  {Вычисление i-й строки матрицы Ac}
  for j = posAc[i]...posAc[i+1]
  do
    valAc[j] = 0
    for k = posP[jindB[j]]...posP[jindB[j]+1]
    do
      valAc[j] += valP[k] * RArow[jindP[k]]
    enddo
  enddo
  {Зануление только ненулевых элементов RArow}
  for j = posP[i]...posP[i+1]
  do
    for k = posAc[jindP[j]]...posAc[jindP[j]+1]
    do
      RArow = 0
    enddo
  enddo
enddo

```

Отметим, что в алгоритме отсутствуют ветвления, что также может позитивно сказаться на его выполнении.

Рассмотренный способ частичного построения AMG проверялся на задачах, где решались СЛАУ с одним неизвестным в каждой ячейке сетки (или частице в методе SPH)<sup>3</sup> и несколькими неизвестными (три, пять) при одном ведущем неизвестном<sup>4</sup>. При его использовании время решения СЛАУ методом AgAMG или AMG/AgAMG+CG/BiCGStab сокращалось, что свидетельствует о довольно широком диапазоне действия предложенного способа.

### Примеры применения частичного построения AMG

Приведем примеры решения потока СЛАУ с использованием частичного построения AMG после решения первой СЛАУ в задаче гидродинамики на неподвижной неструктурированной сетке.

В табл. 1, 2 представлены результаты решения потока СЛАУ при расчете течения в *рубашке охлаждения двигателя* в задаче с условным названием "ГБЦ КАМАЗ". Результаты получены в пакете программ ЛЮГОС с использованием решателя CG с оптимизированным AMG на гибридной рабочей станции. Построение AMG выполнялось на ЦП, а решение СЛАУ — на GPGPU. Параметры

<sup>3</sup>Для задач гидродинамики несжимаемой жидкости, диффузии жидкости в пористых средах, диффузии тепла в твердом теле, лучистой теплопроводности.

<sup>4</sup>В задачах аэродинамики, диффузии многофазной жидкости в пористых средах.

Таблица 1

Результаты решения потока СЛАУ в задаче "ГБЦ КАМАЗ" с  $\varepsilon = 0$  на ЦП+GPGPU

Шаг задачи	Полное построение AMG		Частичное построение AMG		Частичное построение AMG с эффективным RAP	
	число итераций	общее время, с	число итераций	общее время, с	число итераций	общее время, с
1	127	9,39	—	—	—	—
2	219	11,65	219	10,21	219	7,06
5	220	11,63	220	10,21	220	7,07
51	166	10,31	166	8,98	166	5,90
55	175	10,54	175	9,16	175	6,06
251	179	10,65	179	9,40	179	6,21
255	168	10,40	168	9,08	168	5,91
451	204	11,25	204	9,80	204	6,74
455	209	11,39	209	10,44	209	6,83

Таблица 2

Время (в с) построения AMG второй СЛАУ в задаче "ГБЦ КАМАЗ" с  $\varepsilon = 0$  на ЦП

Полное построение AMG	Частичное построение AMG	Частичное построение AMG с эффективным RAP
5,78	4,59	1,77

AMG: сглаживатель Якоби;  $\varepsilon = 0$ . Параметры CG: точность решения  $rtol = 10^{-8}$  по критерию  $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| < rtol \cdot \|\mathbf{b}\|$ , где  $\mathbf{b}$  — вектор правой части,  $\mathbf{x}$  — вектор решения. Параметры разреженной матрицы СЛАУ: 2 758 929 строк, 14 340 611 коэффициентов. Использовались полное построение AMG для первой СЛАУ давления и частичное построение AMG для остальных СЛАУ давления.

В результате оптимизации процесса построения предобусловливателя AMG в библиотеке Parallel Toolbox удалось сократить время построения более чем в 3 раза. Одновременно с этим доля времени построения AMG для СЛАУ в общем времени решения задачи "ГБЦ КАМАЗ" заметно сократилась — с  $\sim 53$  до  $\sim 16\%$ , а количество итераций на каждом конкретном шаге не изменилось.

В табл. 3, 4 приведены данные по решению потока СЛАУ в задаче "ГБЦ КАМАЗ", полученные с использованием оптимальных (в ходе тестирования) параметров AMG:  $\varepsilon = 0,05$  и сглаживателя Якоби на GPGPU.

Таблица 3

Результаты решения потока СЛАУ в задаче "ГБЦ КАМАЗ" с  $\varepsilon = 0,05$  на ЦП+GPGPU

Шаги задачи	Полное построение AMG		Частичное построение AMG с эффективным RAP	
	число итераций	общее время, с	число итераций	общее время, с
1	52	8,65	—	—
2	55	8,64	83	4,51
5	47	9,56	84	4,51
51	51	9,29	67	4,1
55	44	9,5	69	4,09
251	45	9,3	67	4,09
255	36	7,99	69	4,16
451	43	8,71	75	4,28
455	42	9,11	84	4,52



Время (в с) построения AMG второй СЛАУ в задаче "ГБЦ КАМАЗ" с  $\varepsilon = 0,05$  на ЦП

Полное построение AMG	Частичное построение AMG с эффективным RAP
6,66	1,98

При сравнении времени построения предобусловливателя AMG с оптимальным  $\varepsilon = 0,05$  и параметром по умолчанию  $\varepsilon = 0$  видно, что в первом случае время построения больше. В случае  $\varepsilon = 0$  огрубление сетки при построении сильнее и строится меньше уровней. В этом случае на огрубление не влияет сила связи. При  $\varepsilon > 0$  сетка огрубляется слабее, уровней строится больше, время построения предобусловливателя увеличивается, и дополнительно увеличивается число итераций при частичном построении AMG.<sup>5</sup> Однако положительным итогом такого построения является более эффективное, чем с  $\varepsilon = 0$ , предобусловливание. Решение последовательности СЛАУ с частичным построением AMG с оптимальным параметром  $\varepsilon = 0,05$  быстрее в 1,5 раза по сравнению с частичным построением AMG с  $\varepsilon = 0$  и в 2,1 раза — по сравнению с полным построением AMG с  $\varepsilon = 0,05$ .

Отметим, что вышепоказанная эффективность последовательного решения СЛАУ при частичном построении AMG в многопоточном режиме только усиливается из-за более сильного параллелизма по сравнению со слабым параллелизмом полного построения AMG. Следует также заметить, что еще более неточное построение AMG для потока СЛАУ с изменяющимися коэффициентами матриц, при котором не только не изменяются позиции коэффициентов грубых матриц, но и сами коэффициенты, дает отрицательный результат.

Далее приводятся примеры решения СЛАУ в различных задачах с разновидностями AMG в параллельном (распределенном) и многопоточном режимах на универсальных процессорах с использованием частичного построения. В данном случае алгоритм частичного построения имеет особенности в реализации оператора Галеркина при знании позиций ненулевых коэффициентов грубой матрицы и несколько отличается от описанного выше эффективного алгоритма, которому присущи повышенные затраты памяти.

В 2014 г. в пакете программ "ЛОГОС Аэрогидромеханика" [13] было выполнено *распоточивание* его параллельного кода с реализацией частичного построения AgAMG.<sup>6</sup> Эффективность применения частичного построения AgAMG была проверена при решении СЛАУ в стационарных модельных задачах аэродинамики с использованием нерасщепленной схемы, порождающей мелкоблочные матрицы СЛАУ (блоки  $5 \times 5$ ) для нахождения пяти неизвестных в каждой ячейке трехмерной сетки.

На рис. 1 показан график времени решения ста СЛАУ тестовой задачи АВ13<sup>7</sup> на гибридном узле кластера ООО "ЦКО" [15], содержащем сервер с двумя восьмиядерными ЦП Intel Xeon (модель Sandy Bridge) и сопроцессор Intel Xeon Phi (модель KNC). Задача считалась на неструктурированной сетке, состоящей примерно из 214 тыс. ячеек, содержащих по 5 неизвестных в каждой ячейке. AgAMG агрегировал по 4 ячейки, выполнял 3 итерации постсглаживания многопоточным многоцветным симметричным сглаживателем Гаусса—Зейделя (SGS) на каждом уровне. Пунктирные линии на рис. 1 относятся ко времени решения всех ста СЛАУ задачи с полным построением AgAMG, сплошные линии — ко времени решения с полным построением AgAMG только для первой СЛАУ и частичным построением AgAMG для остальных ( $2 \div 100$ ) СЛАУ. Суммарное количество итераций AgAMG на этой задаче в обоих случаях одинаково. Число используемых нитей на оси X указано в виде произведения числа процессов на число нитей в каждом процессе.

Как видно, применение частичного построения AMG дало положительный результат, особенно заметный на сопроцессоре, менее эффективно обрабатывающем операции ветвления программы,

<sup>5</sup>При  $\varepsilon > 0$ , когда учитывается сила связей между неизвестными, структура грубых матриц текущей СЛАУ обычно не совпадает со структурой грубых матриц первой СЛАУ. Поэтому частичное построение AMG, использующее матрицы интерполяции с первого шага, как менее точное, чем полное построение AMG, увеличивает число итераций.

<sup>6</sup>Однопоточный AgAMG для мелкоблочных матриц СЛАУ реализован Д. П. Силаевым, но не опубликован.

<sup>7</sup>В данной задаче выполняется расчет стационарных аэродинамических характеристик механизированного сечения крыла, которое содержит 4 элемента (профиль NASA с двухзвенными закрылками и предкрылком).

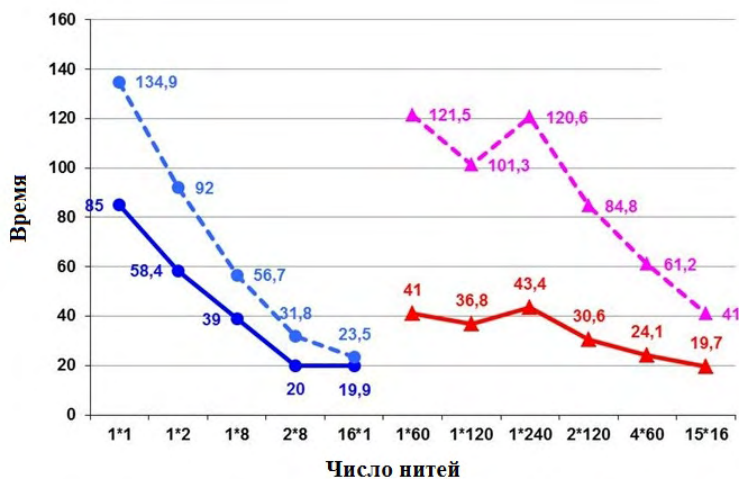


Рис. 1. Время решения ста СЛАУ задачи AV13: —▲—, —▲— — сопроцессор; —●—, —●— — ЦП

характерные для полного построения AMG. Аналогичные результаты были получены и на задаче C20<sup>8</sup> (~731 тыс. ячеек) [3].

Нельзя гарантировать, что частичное построение AgAMG будет позитивно действовать на всю оставшуюся часть порождаемого потока СЛАУ. Поэтому для решения более сложных задач целесообразна тривиальная адаптивная схема использования частичного построения, а именно, для каждой  $k$ -й СЛАУ выполнение полного построения AMG, а для следующих  $k - 1$  СЛАУ — частичного построения.

На рис. 2 показаны графики масштабируемости полного и частичного построения решателя AgAMG в отдельности, а также суммарно с итерационной частью. Проверялись два типа поразному распоточенных сглаживателя DILU [16]: многоцветный mcDILU (на уровнях малого размера) и комбинированный adDILU (на уровнях большого размера). Как видно, масштабируемость полного построения AgAMG на ускорителе невысокая. На ЦП на масштабируемость всего решателя в

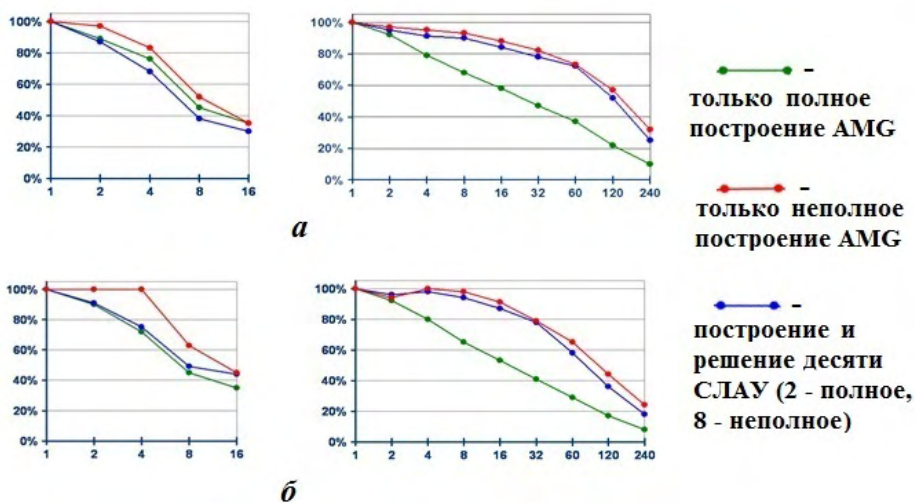


Рис. 2. Эффективность решения потока СЛАУ с использованием решателя AgAMG: *a* — сглаживатель mcDILU; *б* — сглаживатель adDILU; слева — ЦП; справа — сопроцессор

<sup>8</sup>В данной задаче выполняется расчет аэродинамических характеристик экспериментальной ступени компрессора с использованием технологии *rotor-stator*.

большей мере оказывает влияние итерационный процесс, нежели построение пирамиды сеток. Применение адаптивного режима частичного построения (контроль за сходимостью, полное построение AgAMG на двух СЛАУ и, если число итераций не изменилось, решение следующих восьми СЛАУ с частичным построением) повысило надежность и масштабируемость решателя AgAMG.

Ряд экспериментов с частичным и полным построением AMG библиотеки PMLP/ParSol был проведен в модуле "ЛОГОС Тепло" [17] при моделировании процесса распространения тепла в твердом теле. В ряде задач такого типа (но не во всех) AMG и AgAMG с CG или BiCGStab обеспечивают наискорейшее решение СЛАУ. Табл. 5 отражает преимущество решения СЛАУ размером  $1,5 \cdot 10^6$  двенадцатью процессами с частичным построением AMG.

В комплексе программ НИМФА для решения СЛАУ задач фильтрации жидкости в пористых средах [18] предобусловливатель AMG в сочетании с решателем CG из библиотеки PMLP/ParSol стал использоваться для решения СЛАУ в задачах однофазной фильтрации, а также решения СЛАУ давления в полунеевной схеме IMPES многофазной фильтрации. Это позволяет решать СЛАУ быстрее, чем другими методами. В настоящее время первая СЛАУ решается методом AMG+CG с полным построением AMG, а следующие — с частичным построением AMG до тех пор, пока число итераций при решении очередной СЛАУ не превысит определенного уровня, после чего для следующей СЛАУ повторяется данный цикл. Полное построение AMG в процессе решения задачи выполняется редко — иногда всего один раз, в то время как число порождаемых СЛАУ значительно, что косвенно свидетельствует об эффективности применения частичного построения AMG в комплексе программ НИМФА.

В работах [8, 9] отражена эффективность применения частичного построения AMG и BoomerAMG в сочетании с решателем BiCGStab с адаптивным предобусловливателем потока СЛАУ процесса лучистой теплопроводности при решении трех задач с постоянной топологией сетки по методике МИМОЗА [12]. С частичным построением AMG СЛАУ решались быстрее, чем блочным методом Шварца с ILU<sub>t</sub> внутри блоков.

Наконец, покажем преимущество применения частичного построения AMG при решении СЛАУ нелинейного процесса лучистой теплопроводности методом частиц в ячейках на часто изменяющейся дробной сетке в методике MPC. В табл. 6 отражено время решения 24 СЛАУ на четырех шагах трудоемкого участка счета с использованием 30 многопоточных MPI-процессов, где с точностью  $10^{-8}$  первая на шаге СЛАУ решается с полным построением AMG<sup>9</sup>, а остальные — с частичным. Указаны наилучшие значения параметров. Как видно, на оба селективных AMG решение двадцати СЛАУ с частичным построением оказало положительное влияние, что значительно ускорило решение всех СЛАУ даже в случае заметного возрастания числа итераций при использовании наиболее точного сглаживания полиномом Чебышёва (Cheby), применимого для SPD-матриц. При этом был получен наилучший по времени и числу итераций результат.

Для сравнения в табл. 7 приведены результаты решения СЛАУ с использованием методики MPC с точностью  $10^{-8}$  на менее трудоемком участке счета задачи. Здесь у предобусловливателя AMG2

Таблица 5

**Результаты решения СЛАУ диффузии тепла с использованием решателя BiCGStab с полным и частичным построением AMG**

Параметры	Время решения СЛАУ, с (% в задаче)	Число решенных СЛАУ	Число итераций общее/среднее/максимальное
AMG ( $\epsilon = 0$ , всегда полное построение)	151,3 (87,6)	38	1 140/30/35
AMG ( $\epsilon = 0$ , одно полное построение)	139,9 (89,0)	38	1 145/30/36
BlockJacobi (ILU0)	464,1 (97,8)	38	13 101/345/381

<sup>9</sup>В методике MPC сетка перестраивается довольно часто. Поэтому в ней применяется ограниченное поддержание режима частичного построения AMG — до первой СЛАУ следующего шага. В задачах с постоянной топологией сетки режим частичного построения AMG эффективно работает дольше.

## Решение 24 СЛАУ с использованием решателя CG с AMG и блочным IC0

Предобусловливатель	Число полных построений	Общее число итераций (min-max)	Время, с		
			построения	итераций	суммарное
BlockJacobi (Schwarz_omp(IC0))	24	4 369(1-522)	4,24	28,72	32,96
AMG ( $\varepsilon = 0,0125$ , Jacobi)	24	337 (1-42)	39,27	11,09	50,36
AMG2 (SGS)	24	944 (1-161)	20,28	30,30	50,58
<b>AMG2 (Cheby)</b>	<b>24</b>	<b>104(1-10)</b>	<b>22,94</b>	<b>3,92</b>	<b>26,85</b>
BlockJacobi (Schwarz_omp(IC0))	4	4 369(1-522)	1,51	29,53	31,04
AMG ( $\varepsilon = 0,0125$ , Jacobi)	4	377 (1-42)	15,41	12,51	27,92
AMG2 (SGS)	4	964(1-161)	6,23	29,31	35,54
<b>AMG2 (Cheby)</b>	<b>4</b>	<b>200 (1-30)</b>	<b>8,74</b>	<b>7,51</b>	<b>16,24</b>

## Решение 20 СЛАУ с использованием решателя CG с AMG и блочным IC0

Предобусловливатель	Число полных построений	Общее число итераций (min-max)	Время, с		
			построения	итераций	суммарное
BlockJacobi (Schwarz_omp(IC0))	20	606 (1-215)	5,618	7,054	12,671
AMG ( $\varepsilon = 0,0125$ , Jacobi)	20	нет решения			
BlockJacobi (Schwarz_omp(IC0))	4	783(1-215)	2,487	9,683	12,170
AMG2 (SGS)	4	255(1-55)	4,142	8,474	12,616
AMG2 (Cheby)	4	62(12)	7,803	3,036	10,839

небольшое преимущество по сравнению с блочным Якоби, причем только в режиме частичного построения. Расходы на полное построение значительны, примерно, как показано в табл. 6. Предобусловливателю AMG здесь не хватило 600 итераций, хотя СЛАУ не очень сложные. Это объясняется тем, что при заданном параметре  $\varepsilon = 0,0125$ , по которому оценивается сила связи неизвестных, AMG в данном случае не строит даже первой грубой матрицы, так как число ее строк слабо сокращается по сравнению с исходной матрицей. В AMG библиотеки PMLP/ParSol предусмотрена "самозащита" от изредка возникающих подобных ситуаций, например, завершение построения грубых матриц переходом на  $\varepsilon = 0$ .

### Заключение

В работе показана возможность ускорить решение потока СЛАУ за счет частичного, более быстрого, построения AMG для текущей СЛАУ, опираясь на переиспользование данных предшествующего затратного полного построения с необходимой адаптацией к скорости сходимости.

В качестве дополнительного усовершенствования AMG-предобусловливателей библиотеки PMLP/ParSol представляет интерес реализация адаптивного сглаживания, развитого в работах ИПМ им. М. В. Келдыша РАН [19].

Авторы признательны Е. Б. Щаниковой, В. А. Ерзунову, Д. А. Петрову за участие в реализации и проверке различных вариантов AMG PMLP/ParSol, а также М. Л. Сидорову за консультации по использованию решателей в пакете программ НИМФА.

### Список литературы

1. Федоренко Р. П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1961. Т. 1, № 5. С. 922–927.

- Fedorenko R. P.* Relaksatsionnyy metod resheniya raznostnykh ellipticheskikh uravneniy // Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz. 1961. T. 1, № 5. S. 922–927.
2. *Ruge J. W., Stuben K.* Algebraic multigrid // Frontiers in Applied Mathematics. Multigrid methods / Ed. by S. F. McCormick. Philadelphia, Pennsylvania: SIAM, 1987. P. 73–130.
  3. *Алейников А. Ю., Барабанов Р. А., Ерзунов В. А., Карпов А. П., Кузнецов В. Ю., Петров Д. А., Резчиков В. Ю., Стаканов А. Н., Щаникова Е. Б.* Применение параллельных решателей СЛАУ в пакетах программ инженерного анализа РФЯЦ-ВНИИЭФ // Супервычисления и математическое моделирование. Тр. XVI межд. конф. 3–7 октября 2016 г. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2017. С. 28–36.  
*Aleynikov A. Yu., Barabanov R. A., Erzunov V. A., Karpov A. P., Kuznetsov V. Yu., Petrov D. A., Rezchikov V. Yu., Stakanov A. N., Shchanikova E. B.* Primenenie parallelnykh reshatelye SLAU v paketakh programm inzhenernogo analiza RFYaTs-VNIIEF // Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie. Tr. XVI mezhd. konf. 3–7 oktyabrya 2016 g. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2017. S. 28–36.
  4. *Liebmann M.* Algebraic Multigrid Methods on GPU-Accelerated Hybrid Architectures. Graz: Institute for Mathematics and Scientific Computing of University, 2011.
  5. *Henson V. E., Yang U. M.* BoomerAMG: a parallel algebraic multigrid solver and preconditioner // Applied Numerical Mathematics. 2002. Vol. 41. P. 155–177.
  6. *Козелков А. С., Дерюгин Ю. Н., Лашкин С. В., Силаев Д. П., Симонов П. Г., Тятюшкина Е. С.* Реализация метода расчета вязкой несжимаемой жидкости с использованием многосеточного метода на основе алгоритма SIMPLE в пакете программ ЛОГОС // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 4. С. 44–56.  
*Kozelkov A. S., Deryugin Yu. N., Lashkin S. V., Silaev D. P., Simonov P. G., Tyatyushkina E. S.* Realizatsiya metoda rascheta vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti s ispolzovaniem mnogosetochnogo metoda na osnove algoritma SIMPLE v pakete programm LOGOS // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2013. Vyp. 4. S. 44–56.
  7. *Алейников А. Ю., Барабанов Р. А., Карпов А. П., Кузнецов В. Ю., Петров Д. А., Резчиков В. Ю., Стаканов А. Н., Щаникова Е. Б.* Параллельные решатели СЛАУ в пакетах программ РФЯЦ-ВНИИЭФ // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2016. Вып. 47. С. 73–92.  
*Aleynikov A. Yu., Barabanov R. A., Karpov A. P., Kuznetsov V. Yu., Petrov D. A., Rezchikov V. Yu., Stakanov A. N., Shchanikova E. B.* Parallelnye reshateli SLAU v paketakh programm RFYaTs-VNIIEF // Vestnik PNIPU. Aerokosmicheskaya tekhnika. 2016. Vyp. 47. S. 73–92.
  8. *Карпов А. П., Бартнев Ю. Г., Ерзунов В. А., Стаканов А. Н., Петров Д. А., Щаникова Е. Б.* Решение СЛАУ в программных комплексах ИТМФ алгебраическими многосеточными методами // XVII межд. конф. "Супервычисления и математическое моделирование": сб. науч. трудов. 15–19 октября 2018 г. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2019. С. 300–310.  
*Karpov A. P., Bartenev Yu. G., Erzunov V. A., Stakanov A. N., Petrov D. A., Shchanikova E. B.* Reshenie SLAU v programmnykh kompleksakh ITMF algebraicheskimi mnogosetochnymi metodaми // XVII mezhd. konf. "Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie": sb. nauch. trudov. 15–19 oktyabrya 2018 g. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2019. S. 300–310.
  9. *Ерзунов В. А., Бартнев Ю. Г.* Программа адаптивного выбора метода решения потока СЛАУ в библиотеке PMLP/LParSol // Там же. С. 58–67.  
*Erzunov V. A., Bartenev Yu. G.* Programma adaptivnogo vybora metoda resheniya potoka SLAU v biblioteke PMLP/LParSol // Tam zhe. S. 58–67.
  10. *Дерюгин Ю. Н., Полищук С. Н., Тихомиров Б. П.* Расчет лучистой теплопроводности в методике МРС с использованием неточных методов Ньютона // Супервычисления и математическое моделирование. Тр. XV межд. конф. 13–17 октября 2014 г. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2015. С. 198–205.

- Deryugin Yu. N., Polishchuk S. N., Tikhomirov B. P.* Raschet luchistoy teploprovodnosti v metodike MPC s ispolzovaniem netochnnykh metodov Nyutona // Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie. Tr. XV mezhd. konf. 13—17 oktyabrya 2014 g. Sarov: RFYaTs-VNIEF, 2015. S. 198—205.
11. *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems. 2<sup>nd</sup> edition. NY: PWS Publish., 2000.
  12. *Софронов И. Д., Винокуров О. А., Змушко В. В., Плетенёв Ф. А., Измайлова Т. Б., Потапкина Л. Ф., Рыбаченко П. В., Рябикина Н. А., Соколова Н. В., Трофимова Л. Я.* Комплекс программ МИМОЗА-99 // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 4. С. 37—41.  
*Sofronov I. D., Vinokurov O. A., Zmushko V. V., Pletenev F. A., Izmaylova T. B., Potapkina L. F., Rybachenko P. V., Ryabikina N. A., Sokolova N. V., Trofimova L. Ya.* Kompleks programm MIMOZA-99 // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 1999. Vyp. 4. S. 37—41.
  13. *Козелков А. С., Дерюгин Ю. Н., Зеленский Д. К., Полищук С. Н., Лашкин С. В., Жучков Р. Н., Глазунов В. А., Яцевич С. В., Куруллин В. В.* Многофункциональный пакет программ ЛОГОС: физико-математические модели расчета задач аэро-гидродинамики и тепло-массопереноса: Препринт № 111-2-13. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013.  
*Kozelkov A. S., Deryugin Yu. N., Zelenskiy D. K., Polishchuk S. N., Lashkin S. V., Zhuchkov R. N., Yatsevich S. V., Kurulin V. V.* Mnogofunktsionalny paket programm LOGOS: fiziko-matematicheskie modeli rascheta zadach aero-gidrodinamiki i teplomassoperenosa: Preprint № 111. Sarov: RFYaTs-VNIEF, 2013.
  14. *Бартенеv Ю. Г., Карпов А. П., Крючков И. А., Пищулин И. А.* Адаптация некоторых решателей СЛАУ для арифметических ускорителей NVIDIA // Супервычисления и математическое моделирование. Тез. XIV межд. конф. 1—5 октября 2012 г. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2012. С. 30—32.  
*Bartenev Yu. G., Karpov A. P., Kryuchkov I. A., Pishchulin I. A.* Adaptatsiya nekotorykh reshateley SLAU dlya arifmeticheskikh uskoriteley NVIDIA // Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie. Tez. XIV mezhd. konf. 1—5 oktyabrya 2012 g. Sarov: RFYaTs-VNIEF, 2012. S. 30—32.
  15. ООО "ЦКО". <https://compcenter.org/>.  
ООО "ТсКО". <https://compcenter.org/>.
  16. *Eisenstat S. C.* Efficient implementation of a class of preconditioned conjugate gradient methods // SIAM J. Sci. Comp. 1981. Vol. 2, No 1. P. 1—4.
  17. *Вишняков А. Ю., Дерюгин Ю. Н., Глазунов В. А., Чистякова И. Н.* Пакет программ ЛОГОС. Модуль расчета сопряженных и связанных задач теплопереноса // Супервычисления и математическое моделирование. Тр. XIV межд. конф. 1—5 октября 2012 г. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013. С. 154—161.  
*Vishnyakov A. Yu., Deryugin Yu. N., Glazunov V. A., Chistyakova I. N.* Paket programm LOGOS. Modul rascheta sopryazhennykh i svyazannykh zadach teploperenosa // Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie. Tr. XIV mezhd. konf. 1—5 oktyabrya 2012 g. Sarov: RFYaTs-VNIEF, 2013. S. 154—161.
  18. *Пронин В. А., Бутнев О. И., Горев И. В., Дерюгин Ю. Н., Сидоров М. Л., Машенькин П. А., Колесников С. С., Журавлёва М. В., Лысова Е. Н.* Комплекс программ НИМФА. Методика решения нелинейной однофазной фильтрации жидкости и тепло-массопереноса в пористых средах // Супервычисления и математическое моделирование. Тр. XVI межд. конф. 3—7 октября 2016 г. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2017. С. 252—260.  
*Pronin V. A., Butnev O. I., Gorev I. V., Deryugin Yu. N., Sidorov M. L., Mashenkin P. A., Kolesnikov S. S., Zhuravleva M. V., Lysova E. N.* Kompleks programm NIMFA. Metodika resheniya nelineynoy odnofaznoy filtratsii zhidkosti i teplomassoperenosa v poristyykh sredakh // Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie. Tr. XVI mezhd. konf. 3—7 oktyabrya 2016 g. Sarov: RFYaTs-VNIEF, 2017. S. 252—260.

19. Жуков В. Т., Краснов М. М., Новикова Н. Д., Феодоритова О. Б. Алгебраический многосеточный метод с адаптивными сглаживателями на основе многочленов Чебышёва: Препринт № 113. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2016. doi: 10.20948/prepr-2016-113.  
*Zhukov V. T., Krasnov M. M., Novikova N. D., Feodoritova O. B. Algebraicheskiy mnogosetochny metod s adaptivnymi sglazhivatelyami na osnove mnogochlenov Chebysheva: Preprint № 113. M.: IPM im. M. V. Keldysha RAN, 2016. doi: 10.20948/prepr-2016-113.*

Статья поступила в редакцию 18.04.19.

REPEATED USE OF A HIERARCHICAL DATA STRUCTURE IN AN ALGEBRAIC MULTIGRID SOLVER FOR SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS / Yu. G. Bartenev, A. P. Karpov (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region).

Repeated use of a hierarchical data structure generated in an algebraic multigrid preconditioner and solver for a series of SLAEs with the same matrix profile is considered. This approach, called partial construction of a multigrid algebraic solver fully pre-constructed for a previous SLAE, involves updating merely the coefficients of the pre-constructed coarse matrices without changing their structure. Examples of using a combination of full and partial construction of an algebraic multigrid solver in different modifications of its implementation are given. This solver construction approach in the PMLP/ParSol and some other libraries is shown to considerably reduce the time of solving SLAEs in simulations of different physical processes. The issue of adaptive combination of full and partial algebraic multigrid solver construction is discussed in brief.

*Keywords:* SLAE (system of linear algebraic equations), sparse matrices, algebraic multigrid preconditioners and solvers, hydrodynamic equations, aerodynamic equations, equations of heat transfer in solids, equations of liquid diffusion in porous media, equations of radiant heat transfer, series of SLAEs with the same matrix profile, iterative solvers CG, BiCGStab.

---

УДК 621.039

## ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС "КОРИДА" ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РАДИАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИК ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ И ИНЖЕНЕРНЫХ БАРЬЕРОВ БЕЗОПАСНОСТИ

А. И. Блохин, П. А. Блохин, Ю. Е. Ванеев, И. В. Сипачёв  
(ИБРАЭ РАН, г. Москва)

Представлены описания функциональных возможностей и структуры разрабатываемого программного комплекса КОРИДА, предназначенного для решения задач обоснования радиационной безопасности объектов ядерного наследия и пунктов захоронения радиоактивных отходов. Результаты решения таких задач в значительной степени зависят от характеристик радиоактивных отходов как источников излучения, поэтому в состав комплекса входит модуль нуклидной кинетики. Для моделирования переноса нейтронного и фотонного излучения используется программа TDMCC. С целью упрощения процедуры подготовки исходных данных в формате этой программы в состав комплекса включены специализированный графический редактор и конвертер данных о геометрии, материалах и источниках излучения. Приведены результаты тестирования модуля нуклидной кинетики и программного комплекса в целом.

*Ключевые слова:* программный комплекс, радиоактивные отходы, нуклидная кинетика, моделирование переноса излучения, графический редактор, конвертер данных, энерговыделение, мощность дозы.

### Введение

В последние десятилетия решение проблем обращения с радиоактивными отходами (РАО) и отработавшим ядерным топливом (ОЯТ) на заключительных стадиях их жизненного цикла перешло в фазу интенсивной практической реализации в рамках федеральных целевых программ по обеспечению ядерной и радиационной безопасности. Теоретическая проработка этих вопросов начиналась еще раньше, в том числе с применением различных, не связанных между собой и не аттестованных программных средств. С учетом масштабов предстоящих работ по заключительным стадиям жизненного цикла объектов использования атомной энергии (ОИАЭ) и отсутствия готовых подходов к решению предстоящих задач на данном этапе обозначилась потребность в проведении многовариантных расчетных исследований, нацеленных, в частности, на оптимизацию процессов обращения с РАО и ОЯТ, по-

иск оптимальных решений по выводу из эксплуатации и созданию пунктов захоронения РАО. Задача осложняется тем, что для множества ОИАЭ, введенных в эксплуатацию в годы становления отечественной атомной промышленности (объектов ядерного наследия [1–3]), сохраняются проблемы в сферах радиационной и экологической безопасности в связи с недостаточностью информации о реальном состоянии объектов, хранящихся в них РАО, инженерных барьеров безопасности, степени их деградации.

Впервые опыт разработки специализированных программных средств, отвечающих современным требованиям, был получен при создании в 2011–2015 гг. программно-технического комплекса ОБОЯН [4], который успешно применялся при отнесении отходов к особым РАО [2, 5].

На современном этапе решения проблем, связанных с оценкой безопасности объектов ядерного наследия и пунктов захоронения РАО, осуществляются разработка и внедрение новой



системы расчетно-прогностических комплексов. Отличия новых программных разработок по сравнению с расчетными модулями в комплексе [4] связаны с возможностями расчетов радиационных характеристик РАО и ОЯТ, с переходами от консервативных методов оценки к моделированию процессов на основе фактических исходных данных, от упрощенных моделей к детализированным трехмерным моделям, создаваемым на основе САПР-моделей объектов.

Для прогнозирования изменений радиационных характеристик РАО и ОЯТ как источников ионизирующих излучений, а также дозовых характеристик создаваемых ими радиационных полей с 2016 г. в ИБРАЭ РАН разрабатывается программный комплекс (ПК) КОРИДА (Комплекс для Обоснования Радиационной безопасности объектов с Источниками ионизирующего излучения, Дозовый Аспект) [6].

Целью статьи является описание принятых к разработке решений по архитектуре комплекса и функциям основных модулей. Приводятся результаты первого этапа их тестирования на примере решения комплексной задачи, связанной с расчетом выходов и спектров излучения РАО, составляющих энерговыделения в объеме источника и поля мощности эквивалентной дозы (МЭД), создаваемого этим источником.

### Назначение ПК КОРИДА и его состав

Разработка ПК КОРИДА [7] продиктована практическими потребностями в создании расчетного инструментария, ориентированного на решение задач по двум основным направлениям:

- определение радиационных характеристик РАО и ОЯТ в контексте долговременной безопасности (радионуклидный состав, тепловыделение, выходы и спектры гамма- и нейтронного излучений и др.);
- обоснование радиационной безопасности и защиты при обращении с радиоактивными материалами на ОИАЭ.

С учетом специфики решаемых задач разрабатываемый ПК должен обладать следующими функциональными возможностями:

- моделирование радионуклидного состава ОЯТ и РАО, формирующегося в процессах нейтронного облучения материалов и радиоактивного распада ядер, и определение радиационных характеристик источников излучений;

- моделирование переноса гамма- и нейтронного излучений в трехмерной геометрии;
- ускоренное моделирование переноса излучений как в последовательном, так и в параллельном режиме на многоядерных и многопроцессорных ЭВМ;
- расчет эквивалентной дозы внешнего облучения персонала с учетом сценария проведения работ, изменения характеристик источников излучений и барьеров безопасности;
- автоматизация процесса создания расчетных моделей путем конвертации файлов из графического представления в форматы моделирующих программ;
- визуализация расчетных моделей, сценариев демонтажа конструкций и удаления РАО, перемещений персонала, результатов расчетов.

Для реализации этих функций в составе ПК предусмотрено четыре основных блока, интегрированных в единую системную оболочку: препроцессор, блок вычислительных модулей, постпроцессор и база данных.

**Препроцессор** состоит из трех компонентов:

- НК-модуль нуклидной кинетики для расчета составов и характеристик источников излучений;
- PGM-модуль для создания графических моделей объектов;
- CONV-модуль конвертации данных из графических моделей в форматы файлов исходных данных для расчетных модулей.

На этапе препроцессинга НК-модуль используется для расчетов выходов и спектров гамма- и нейтронного излучений как исходных данных для моделирования радиационных полей.

PGM-модуль позволяет пользователю самому создать графическую модель объекта или использовать модель, уже подготовленную в какой-либо САПР-системе в формате **step**. Для этого используется специально разработанный графический редактор GRATOR со следующими функциями:

- создание графической модели объекта на базе стандартных геометрических тел-примитивов и булевых операций с ними;
- преобразование графической модели в **step**-формате в набор примитивов в **xml**-формате с заданием для них дополнительных параметров;

- формирование выходных файлов в форматах `step`, `xml` и `mcs` для использования разработанных моделей другими графическими редакторами и подмодулями препроцессора;
- задание параметров сценариев демонтажа объекта и перемещений персонала.

Подробное описание алгоритма, заложенного в основу работы графического редактора, представлено в [8].

При загрузке CONV-модуля на его вход поступает информация от PGM-модуля, которая обрабатывается несколькими последовательно загружаемыми подмодулями-конвертерами: GEOM, MAT, SOUR, RUL. Они анализируют предназначенные для них данные, по условным ссылкам извлекают из базы данных дополнительную информацию и конвертируют ее в соответствующие разделы файла исходных данных, который поступает на вход расчетного модуля. Подробное описание алгоритма конвертации данных представлено в работе [9].

Новизна разработки заключается в следующем:

- обеспечение CONV-модуля данными о характеристиках более двух тысяч радионуклидов, химическом составе нескольких десятков природных, строительных и конструкционных материалов. В результате работы CONV-модуля геометрическая модель объекта и проставленные в ней ссылки на расположение и типы источников излучения и материалов преобразуются в полный набор данных в формате расчетного модуля;
- реализация возможности задания параметров сценария демонтажа объекта, графическая модель которого разработана в редакторе GRATOR. При этом для каждого этапа, когда существенно изменяется состав объекта, подключается CONV-модуль для формирования файла исходных данных в формате расчетного модуля. Для всего же сценария получается набор таких файлов для последующего моделирования поэтапного изменения радиационных полей и более точной оценки дозового воздействия на персонал в процессе выполнения работ.

**Блок вычислительных модулей** предназначен для получения расчетных значений радиационных характеристик ОЯТ и РАО, а так-

же пространственно-энергетических распределений функционалов плотности потока нейтронов и фотонов.

Для моделирования процессов обращения с ОЯТ и РАО в состав этого блока включен НК-модуль нуклидной кинетики, который разработан на основе программы TRACT [10]. Он учитывает следующие особенности расчетных исследований процессов на заключительных стадиях жизненного цикла объектов:

- при решении ряда задач необходимо оценивать множество радиационных характеристик (энерговыведение, выходы и спектры гамма- и нейтронного излучений, газовыделение, радиационные нагрузки на матрицу РАО и др.);
- временной интервал, на котором должны моделироваться процессы, составляет от десятка до нескольких тысяч лет.

Особое значение при разработке НК-модуля уделено константному обеспечению и его тестированию, результаты которого приведены в работе [10].

В качестве основного метода моделирования переноса излучения выбран метод Монте-Карло, реализованный в ряде отечественных программ (TDMCC [11], MCU [12] и др.). На данном этапе разработки ПК в качестве базового расчетного модуля используется программа TDMCC, аттестованная для расчетов с целью обоснования ядерной и радиационной безопасности объектов.

**Постпроцессор** предназначен для обработки результатов расчетов и их визуализации с возможностью совмещения с изображением графической модели объекта. Он состоит из POST-модуля обработки результатов расчетов, включая подготовку данных к визуализации, и PGM-модуля, в котором используется графический редактор со средствами визуализации.

**База данных** предназначена для хранения справочной информации и данных по объектам исследований, включая их описание, характеристики используемых материалов и источников излучения, файлы с исходными данными в различных форматах и результатами расчетов.

Первая версия программного комплекса КОРИДА планируется к выпуску в 2020 году, но уже сейчас отдельные его компоненты применяются для решения практических задач. Далее приведены примеры решения таких задач при тестировании модуля нуклидной кинетики и комплекса в целом.

### Тестирование модуля нуклидной кинетики

Для подтверждения корректности разработанных расчетных алгоритмов и сформированных библиотек ядерно-физических данных НК-модуль проходит верификацию на бенчмарк-экспериментах и тестовых задачах. Для примера ниже приведены результаты расчетов радионуклидного состава ОЯТ реактора типа ВВЭР-440 в составе четвертого энергоблока Нововоронежской АЭС [13–15] в сравнении с результатами экспериментального определения массового содержания радионуклидов при различных уровнях выгорания топлива.

В экспериментах использовался комплекс радиохимических, масс-спектрометрических и гамма-спектрометрических методик. Для определения выгорания ядерного топлива выделялись гамма-линии изотопа  $^{137}\text{Cs}$ , имеющего большой выход при делении ядер  $^{235}\text{U}$  и  $^{239}\text{Pu}$ , и изотопа  $^{106}\text{Ru}$  с преимущественным выходом от деления ядер  $^{239}\text{Pu}$  и  $^{241}\text{Pu}$ . Погрешность определения выгорания  $^{235}\text{U}$  не превышала  $\pm 10\%$ , а  $^{239}\text{Pu}$  —  $\pm 15\%$ .

В расчетах нормировка нейтронного потока проводилась исходя из экспериментальных данных по накопленной массе продуктов деления.

В табл. 1 приведена часть результатов сравнения экспериментальных (Э) и расчетных (Р) значений массового содержания изотопов урана, плутония, америция и кюрия в виде отношений Р/Э.

### Результаты апробации комплекса

В обычных условиях эксплуатации ОИАЭ радиационная обстановка в помещениях при выполнении транспортно-технологических операций обеспечивается наряду с техническими и организационными мерами сертифицированной конструкцией используемых упаковок (бочек, бидонов, чехлов, контейнеров и т. п.) и нормами загрузки в них радиоактивных материалов — источников ионизирующих излучений.

В нестандартных (аварийных) ситуациях при исходных событиях, связанных с ошибками персонала и отказами оборудования (незакрепленные крышки контейнеров, не сработавшие на закрытие защитные устройства и т. д.), возможно несанкционированное образование в помещениях зон с повышенным уровнем облучения.

В данной работе в качестве иллюстрации возможностей программного комплекса КОРИДА рассматривается одна из аварийных ситуаций в проектируемом здании перегрузки ПГЗРО "Нижне-Канский массив" [16]. В одном из отделений этого здания (помещение постоянного пребывания персонала) предусматривается перегрузка пеналов с РАО первого класса из контейнеров ТУК-140 в перегрузочные контейнеры.

Анализируется конечное состояние для следующего сценария.

У контейнера ТУК-140 удаляют верхнюю крышку, на него устанавливают защитную плиту с шибером. Шибер открывают, удаляют внутреннюю крышку, подают сигнал на закрытие

Таблица 1

Отношения расчетных и экспериментальных значений масс изотопов в образцах с различной глубиной выгорания топлива

Изотоп	Выгорание, кг/тU				
	$10,97 \pm 0,36$	$11,18 \pm 0,32$	$11,89 \pm 0,42$	$35,5 \pm 1,6$	$36,5 \pm 1,7$
$^{235}\text{U}$	1,06	1,08	1,10	1,05	1,06
$^{236}\text{U}$	1,13	1,14	1,12	1,12	1,12
$^{238}\text{U}$	1,09	1,11	1,10	1,05	1,06
$^{239}\text{Pu}$	1,09	1,11	1,10	1,05	1,06
$^{240}\text{Pu}$	1,32	1,18	1,27	1,24	1,23
$^{241}\text{Pu}$	1,24	1,23	1,24	1,17	1,18
$^{242}\text{Pu}$	1,23	1,24	1,25	1,16	1,16
$^{243}\text{Am}$	1,21	1,26	1,25	1,19	1,19
$^{244}\text{Cm}$	1,27	1,31	1,28	1,18	1,16

шибера, но он не закрывается (единичный отказ механизма). Конечное состояние изображено на рис. 1, а.

Для оценки превышения МЭД в указанном конечном состоянии над предельно допустимыми значениями при стандартных операциях были использованы программные средства рабочей версии ПК КОРИДА: программа TRACT, база данных с параметрами материалов и источников излучения, редактор GRATOR, конвертер CONV, программа TDMCC. Взаимодействие этих программных средств осуществлялось в среде интерфейса пользователя ПК.

Графическая модель контейнера ТУК-140 в редакторе GRATOR создавалась путем объединения трех отдельных моделей: незаполненного контейнера, пенала и бидона, который заполнен РАО на 80%. При этом, с использованием опции интерфейса *Решетка* модель пенала с тремя стоящими друг на друге бидонами была "размножена" в трех экземплярах внутри корпуса контейнера (рис. 1, б).

В результате конвертации сборной модели контейнера в формат геометрического модуля программы TDMCC создан файл в формате xml, который сохранен в разделе базы данных *Графические модели*.

Расчеты интегрального выхода и спектра фотонов, генерируемых в РАО, проведены с использованием программы TRACT для двух типов РАО, образованных после переработки ОЯТ реакторов ВВЭР-440 (РАО-1) и БН-600 (РАО-2).

Исходные данные для расчетов были следующими:

- тип топлива — диоксид урана  $UO_2$  с обогащением по  $^{235}U$ , составляющим 4,0% в реакторе ВВЭР-440 и 26% в реакторе БН-600;
- выгорание топлива, извлеченного из реактора ВВЭР-440, равно 40 ГВт·сут/т $UO_2$  (время выдержки 7 лет), из реактора БН-600 — 60 ГВт·сут/т $UO_2$  (время выдержки 14 лет).

После переработки ОЯТ с извлечением урана и плутония их массовое содержание в обоих типах РАО оценивается как 0,01% для урана и 0,025% для плутония.

Результаты расчетов выхода гамма-излучения из РАО, включающих смесь РАО-1 (70%) и РАО-2 (30%), для времен выдержки этих РАО до 1000 лет приведены в табл. 2.

Для указанной смеси РАО в табл. 3 приведены результаты расчетов по программе TRACT составляющих энерговыделения от альфа-, бета- и гамма-излучений.

Временные зависимости энерговыделения в смеси РАО и выхода гамма-излучения приведены на рис. 2, 3.

Поскольку выход нейтронов из смеси РАО на три и более порядков меньше выхода гамма-излучения, подготовка данных и расчеты нейтронного поля не проводились.

Для смеси РАО с выдержкой 10 лет сформирован файл с параметрами источника гамма-излучения (выход и спектр).

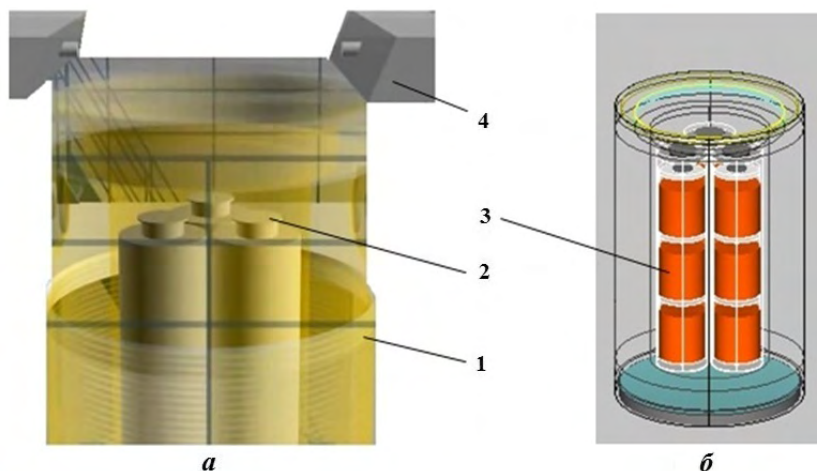


Рис. 1. Виды конечного состояния для рассматриваемого сценария: а — контейнер ТУК-140 с открытым шибером; б — графическая модель контейнера в редакторе GRATOR (корпус прозрачный); 1 — корпус контейнера; 2 — пенал; 3 — РАО в бидоне; 4 — шибер защитной плиты

Таблица 2

Удельные выходы гамма-излучения из смеси РАО (в  $10^{10} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ )

Тип РАО	Время выдержки, годы						
	0	1	7	10	100	500	1 000
РАО-1	7,49	6,88	5,09	4,63	0,577	0,0158	0,0073
РАО-2	7,83	7,58	6,41	5,94	0,736	0,0012	0,0006
РАО-1 + РАО-2	7,73	7,37	6,01	5,54	0,689	0,0056	0,0026

Таблица 3

Составляющие энерговыделения в смеси РАО (в  $\text{Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ )

Величина	Время выдержки, годы						
	0	1	7	10	100	500	1 000
$Q_\alpha$	0,13	0,12	0,13	0,12	0,10	0,054	0,024
$Q_\beta$	4,64	4,35	3,57	3,31	0,39	0,00055	0,00029
$Q_\gamma$	3,04	2,85	2,23	<b>2,05</b>	0,25	0,00034	0,00017
$Q_\alpha + Q_\beta + Q_\gamma$	7,81	7,32	5,93	5,48	0,74	0,055	0,025

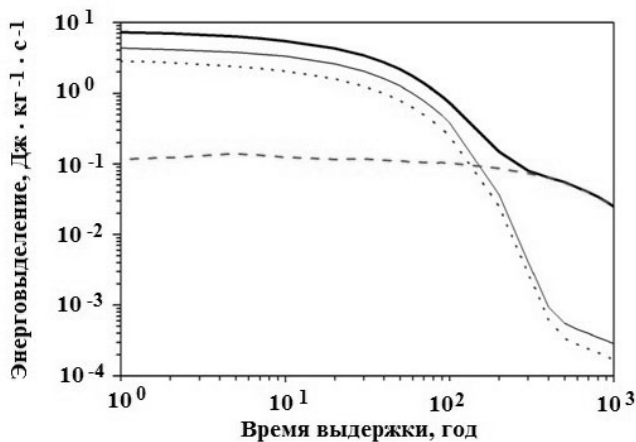


Рис. 2. Зависимости энерговыделения в смеси РАО от времени выдержки: — — полное; — — бета-излучение; ···· — гамма-излучение; - - - - альфа-излучение

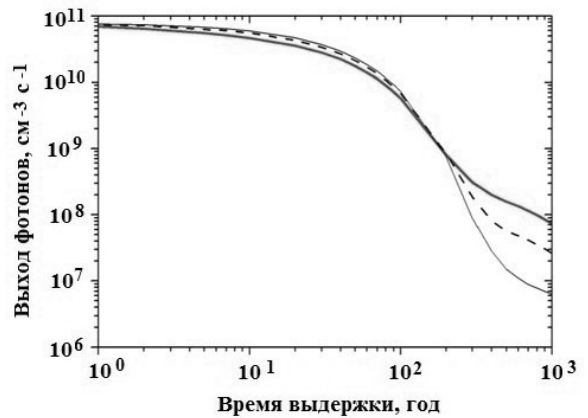


Рис. 3. Зависимость выхода гамма-излучения от времени выдержки: — — РАО-1; — — РАО-2; ···· — смесь РАО

Файл размещен в объектовом разделе базы данных *Источники излучения*.

Справочный раздел базы данных *Материалы* дополнен файлом с составом стекла, заполняющего бидоны (плотность  $2,5 \text{ г/см}^3$ ).

После подготовки всех необходимых исходных данных и соответствующих текстовых файлов, относящихся к геометрии, материалам и источникам излучения, при обращении к конвертеру CONV эти данные преобразованы в файл в формате тсс программы TDMCC.

В результате выполненных расчетов получено значение поглощенной энергии гамма-излучения в РАО, равное  $1,77 \text{ Гр/с}$ , что составляет 86% от гамма-энерговыделения, приведенного в табл. 3 (см. значение  $Q_\gamma$  для времени выдержки 10 лет). Получено также пространственное распределение МЭД над контейнером в отсутствие крышек и каких-либо верхних защитных элементов. Одно из этих распределений, построенное средствами визуализации в редакторе GRATOR, представлено на рис. 4, а. Высотное распределение

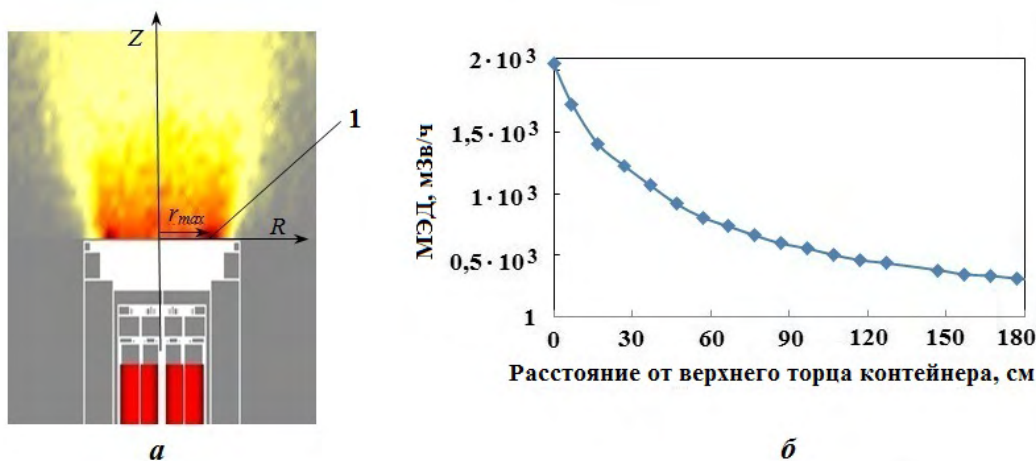


Рис. 4. Виды пространственного распределения МЭД над контейнером ТУК-140 без верхних крышек: *a* — визуализация поля МЭД на графической модели контейнера; *б* — распределение МЭД вдоль оси  $Z$  на расстоянии  $r_{max} = 80$  см; 1 — позиция с максимальным значением МЭД

МЭД на расстоянии  $r_{max} = 80$  см от оси контейнера приведено на рис. 4, б.

Если ориентироваться на предельно допустимое значение МЭД на поверхности контейнера  $2,0$  МЗВ/ч, то можно сделать заключение о возрастании МЭД как минимум в 1 000 раз при удалении крышек и отказе шибера на закрытие. В связи с существенным изменением радиационной обстановки в помещении перегрузки необходимо в проекте этого объекта предусмотреть технические и организационные меры, предотвращающие переоблучение персонала в случае реализации рассмотренного сценария.

### Заключение

В работе представлено описание функциональных возможностей и архитектуры ПК КОРИДА, предназначенного для решения практических задач в сфере обоснований радиационной безопасности ОИАЭ, прежде всего объектов ядерного наследия и пунктов хранения РАО и ОЯТ. С учетом специфики этих задач в состав комплекса включены модули для расчета радионуклидных составов облученных материалов и их радиационных характеристик, для моделирования полей ионизирующих излучений, а также специализированный графический редактор и конвертер для упрощения трудоемкой процедуры подготовки исходных данных в формате базового расчетного модуля.

Продемонстрированы возможности ПК для сквозного решения практической задачи по оценке изменений радиационной обстановки около

упаковок с РАО при изменениях параметров источников излучения и защитных барьеров. Проведен первичный анализ аварийного сценария, связанного с извлечением пеналов, содержащих РАО первого класса, из типового контейнера ТУК-140 в здании перегрузки ПГЗРО (проект) с наложением отказа шибера на закрытие. Показано, что МЭД над контейнером может возрасти на три и более порядков и привести к существенному повышению дозового воздействия на персонал.

На следующем этапе разработки ПК КОРИДА предусмотрено расширение функциональных возможностей модуля нуклидной кинетики в части расчетов газовой выделенности и повреждающей дозы, оценок зависимости результатов расчетов от неопределенностей исходных данных, методического обеспечения при моделировании образования ОЯТ и сценариев его переработки.

Планируется также реализация в составе ПК КОРИДА алгоритма для оперативного расчета мощности дозы гамма-излучения в системах с упрощенной геометрией источника и защиты на основе прецизионного расчета нерассеянного компонента и формализма факторов накопления, учитывающего вклад рассеянного излучения.

### Список литературы

1. Проблемы ядерного наследия и пути их решения. Т. 1. / Под ред. Е. В. Евстратова, А. М. Агапова, Л. А. Большова, Н. П. Лавен

- рова, И. И. Линге. М.: Энергопроманалитика, 2012.
- Problemy yadernogo naslediya i puti ikh resheniya. T. 1. / Pod red. E. V. Evstratova, A. M. Agarova, L. A. Bolshova, N. P. Lavrova, I. I. Linge. М.: Energopromanalitika, 2012.
2. *Абрамов А. А., Дорофеев А. Н., Комаров Е. А., Кудрявцев Е. Г., Большов Л. А., Линге И. И., Абалкина И. Л., Бирюков Д. В., Ведерникова М. В., Хамаза А. А., Шарафутдинов Р. Б., Бочкарев В. В.* К вопросу оценки объема ядерного наследия в атомной промышленности и на иных объектах мирного использования атомной энергии в России // *Ядерная и радиационная безопасность*. 2014. Т. 73, № 3. С. 111.  
*Abramov A. A., Dorofeev A. N., Komarov E. A., Kudryavtsev E. G., Bolshov L. A., Linge I. I., Abalkina I. L., Biryukov D. V., Vedernikova M. V., Khamaza A. A., Sharafutdinov R. B., Bochkarev V. V.* K voprosu otsenki ob'ema yadernogo naslediya v atomnoy promyshlennosti i na inykh obektakh mirnogo ispolzovaniya atomnoy energii v Rossii // *Yadernaya i radiatsionnaya bezopasnost*. 2014. T. 73, № 3. S. 111.
  3. *Макаров Е. П.* Обращение с РАО от переработки ОЯТ на ФГУП ПО "Маяк". [http://www.atomeco.org/mediafiles/u/files/Presentation\\_31\\_10\\_2013/Makarov.pdf](http://www.atomeco.org/mediafiles/u/files/Presentation_31_10_2013/Makarov.pdf).  
*Makarov E. P.* Obrashchenie s RAO ot pererabotki OYAT na FGUP PO "Mayak". [http://www.atomeco.org/mediafiles/u/files/Presentation\\_31\\_10\\_2013/Makarov.pdf](http://www.atomeco.org/mediafiles/u/files/Presentation_31_10_2013/Makarov.pdf).
  4. О критериях отнесения твердых, жидких и газообразных отходов к радиоактивным отходам, критериях отнесения радиоактивных отходов к особым радиоактивным отходам и к удаляемым радиоактивным отходам и критериях классификации удаляемых радиоактивных отходов. Постановление Правительства Российской Федерации от 19 октября 2012 г., № 1069.  
О критериях отнесения твердых, жидких и газообразных отходов к радиоактивным отходам, критериях отнесения радиоактивных отходов к особым радиоактивным отходам и к удаляемым радиоактивным отходам и критериях классификации удаляемых радиоактивных отходов. Postanovlenie Pravitelstva Rossiyskoy Federatsii ot 19 oktyabrya 2012 g., № 1069.
  5. *Блохин П. А., Ванеев Ю. Е., Ковальчук В. Д., Крючков Д. В., Мевлюс В. В.* Программно-технический комплекс обоснования безопасности объектов ядерного наследия // *Изв. вузов. Ядерная энергетика*. 2016. № 4. С. 55–66.  
*Blokhin P. A., Vaneev Yu. E., Kovalchuk V. D., Kryuchkov D. V., Mevlus V. V.* Programmno-tehnicheskiy kompleks obosnovaniya bezopasnosti obektov yadernogo naslediya // *Izv. vuzov. Yadernaya energetika*. 2016. № 4. S. 55–66.
  6. *Блохин А. И., Блохин П. А., Ванеев Ю. Е., Сипачёв И. В.* Программный комплекс CORIDA для прогнозирования характеристик источников ионизирующего излучения и создаваемых ими радиационных полей // *Мат. докл. IV науч.-практ. конф. с международным участием, 18–19 октября 2017 г., "Экологическая и радиационная безопасность объектов атомной энергетики"* / Под ред. М. И. Орловой, Е. Е. Ежовой. Калининград, 2017. С. 16–22.  
*Blokhin A. I., Blokhin P. A., Vaneev Yu. E., Sipachev I. V.* Programmny kompleks CORIDA dlya prognozirovaniya kharakteristik istochnikov ioniziruyushchego izlucheniya i sozdavaemykh imi radiatsionnykh poley // *Mat. dokl. IV nauch.-prakt. konf. s mezhdunarodnym uchastiem, 18–19 oktyabrya 2017 g., "Ekologicheskaya i radiatsionnaya bezopasnost obektov atomnoy energetiki"* / Pod red. M. I. Orlovoy, E. E. Ezhovoy. Kaliningrad, 2017. S. 16–22.
  7. *Блохин П. А., Блохин А. И., Ванеев Ю. Е., Кизуб П. А., Сипачёв И. В.* Программный комплекс КОРИДА для прогнозирования характеристик источников ионизирующих излучений и создаваемых ими радиационных полей: Препринт № IBRAE-2018-06. М.: ИБРАЭ РАН, 2018.  
*Blokhin P. A., Blokhin A. I., Vaneev Yu. E., Kizub P. A., Sipachev I. V.* Programmny kompleks CORIDA dlya prognozirovaniya kharakteristik istochnikov ioniziruyushchikh izlucheny i sozdavaemykh imi radiatsionnykh poley: Preprint № IBRAE-2018-06. М.: IBRAE RAS, 2018.
  8. *Блохин П. А., Ванеев Ю. Е., Сипачёв И. В.* Специализированный графический редактор для разработки трехмерных моделей ЯРОО и конвертации геометрических параметров в формат монте-карловских программ: Препринт № IBRAE-2018-05. М.:

- ИБРАЭ РАН, 2018.  
*Blokhin P. A., Vaneev Yu. E., Sipachev I. V.* Spetsializirovanny graficheskiy redaktor dlya razrabotki trekhmernykh modeley YaROO i konvertatsii geometricheskikh parametrov v format monte-karlovskikh program: Preprint № IBRAE-2018-05. М.: IBRAE RAS, 2018.
9. *Блохин П. А., Ванеев Ю. Е., Сипачёв И. В.* Алгоритм автоматизации подготовки исходных данных для программ моделирования переноса ионизирующих излучений: Препринт № IBRAE-2017-07. М.: ИБРАЭ РАН, 2017.  
*Blokhin P. A., Vaneev Yu. E., Sipachev I. V.* Algoritm avtomatizatsii podgotovki iskhodnykh dannykh dlya programm modelirovaniya perenosa ioniziruyushchikh izlucheniye: Preprint № IBRAE-2017-07. М.: IBRAE RAS, 2017.
  10. *Блохин А. И., Блохин П. А., Сипачёв И. В.* Возможности расчетного кода TRACT для решения задач характеристики радионуклидного состава РАО и ОЯТ // Радиоактивные отходы. 2018. № 2 (3). С. 95–104.  
*Blokhin A. I., Blokhin P. A., Sipachev I. V.* Vozmozhnosti raschetnogo koda TRACT dlya resheniya zadach kharakterizatsii radionuklidnogo sostava RAO i OYAT // Radioaktivnye otkhody. 2018. № 2 (3). С. 95–104.
  11. *Житник А. К., Рослов В. И., Семёнова Т. В., Огнев С. П., Иванов Н. В., Артемьева Е. В.* Программа TDMCC (Time Dependent Monte Carlo Code). Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2010614412 от 07.07.2010.  
*Zhitnik A. K., Roslov V. I., Semenova T. V., Ognev S. P., Ivanov N. V., Artemeva E. V.* Programma TDMCC (Time Dependent Monte Carlo Code). Svidetelstvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM №2010614412 ot 07.07.2010.
  12. *Гуревич М. И., Калугин М. А., Олейник Д. С., Шкаровский Д. А.* Характерные особенности MCU-FR // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика ядерных реакторов. 2016. Вып. 5. С. 17–21.  
*Gurevich M. I., Kalugin M. A., Oleynik D. S., Shkarovskiy D. A.* Kharakternye osobennosti MCU-FR // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Fizika yadernykh reaktorov. 2016. Vyp. 5. S. 17–21.
  13. *Обчинников Ф. Я., Семёнов В. В.* Эксплуатационные режимы водо-водяных энергетических реакторов. 3-е изд., переработанное и дополненное. М.: Энергоатомиздат, 1988.  
*Ovchinnikov F. Ya., Semenov V. V.* Ekspluatatsionnye rezhimy vodo-vodyanykh energeticheskikh reaktorov. 3-e izd., pererabotannoe i dopolnennoe. М.: Energoatomizdat, 1988.
  14. *Миллер О. А., Демидов А. М., Обчинников Ф. Я., Голубев Л. И., Сунчугашев М. А.* Исследование выгорания в твэлах реактора ВВЭР-1 Нововоронежской АЭС с помощью германиевого детектора // Атомная энергия. 1969. Т. 27, № 4. С. 281.  
*Miller O. A., Demidov A. M., Ovchinnikov F. Ya., Golubev L. I., Sunchugashev M. A.* Issledovanie vygoraniya v tvelakh reaktora VVER-1 Novovoronezhskoy AES s pomoshchyu germanievogo detektora // Atomnaya energiya. 1969. T. 27, № 4. S. 281.
  15. *Зеленков А. Г., Пирожков С. В., Пчелин В. А., Родионов Ю. Ф., Тарасевич В. П., Синюткина З. М., Чистяков Л. В., Шатинский В. М., Швецов И. К., Шубко В. М., Баранов С. А.* Полный анализ выгоревшего топлива АЭС с ВВЭР-440 // Там же. 1981. Т. 51. Вып. 1. С. 53–54.  
*Zelenkov A. G., Pirozhkov S. V., Pchelin V. A., Rodionov Yu. F., Tarasevich V. P., Sinyutina Z. M., Chistyakov L. V., Shatinskiy V. M., Shvetsov I. K., Shubko V. M., Baranov S. A.* Polny analiz vygorevshego topliva AES s VVER-440 // Tam zhe. 1981. T. 51. Vyp. 1. S. 53–54.
  16. *Дорофеев А. Н., Большов Л. А., Линге И. И., Уткин С. С., Савельева Е. А.* Стратегический мастер-план исследований в обоснование безопасности сооружения, эксплуатации и закрытия пункта глубинного захоронения радиоактивных отходов // Радиоактивные отходы. 2017. № 1. С. 32–41.  
*Dorofeev A. N., Bolshov L. A., Linge I. I., Utkin S. S., Saveleva E. A.* Strategicheskiy master-plan issledovaniy v obosnovanie bezopasnosti sooruzheniya, ekspluatatsii i zakrytiya punkta glubinnogo zakhoroneniya radioaktivnykh otkhodov // Radioaktivnye otkhody. 2017. № 1. S. 32–41.

Статья поступила в редакцию 16.05.19.



"CORIDA": A PROGRAM PACKAGE FOR PREDICTING RADIATION FIELDS BASED ON THE VARIATIONS IN THE PROPERTIES OF RADIATION SOURCES AND ENGINEERING SECURITY BARRIERS / A. I. Blokhin, P. A. Blokhin, Yu. E. Vaneev, I. V. Sipachev (IBRAE RAS, Moscow).

The paper describes the functionality and structure of a program package called CORIDA being developed for radiation safety analysis of legacy nuclear facilities and radioactive waste disposal sites. Results of such computations are heavily dependent on the emissive properties of radioactive wastes; that is why the program package includes a nuclide kinetics module. Neutron and photon transport is simulated using the TDMCC code. To simplify the pre-processing procedure in the program-specific format, the program package contains a special graphics editor and a data converter for problem geometry, materials and radiation sources. Results of testing the nuclide kinetics module and the program package as a whole are reported.

*Keywords:* program package, radioactive wastes, nuclide kinetics, radiative transfer simulations, graphics editor, data converter, yield, dose rate.

---

УДК 004.94:004.8

## ВОЗМОЖНОСТИ ВИЗУАЛИЗАЦИОННО-ИНТЕГРАЦИОННОЙ ПЛАТФОРМЫ "ОптИМУС" ДЛЯ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВООРУЖЕНИЙ, ВОЕННОЙ И СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

О. В. Коваленко, И. А. Крючков, А. В. Огородников, Д. В. Ежов, Д. С. Собанин  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Приводится обзор программных подходов и технологий, используемых в визуализационно-интеграционной платформе ОптИМУС. Показаны возможности взаимной интеграции различных технологий, включая технологии искусственного интеллекта, в едином программном комплексе имитационного мультиагентного моделирования для обеспечения разработки сложных интеллектуальных моделей различных образцов вооружений и военной техники. Даны практические примеры использования приведенных подходов и технологий для моделирования систем физической защиты и создания прогнозной имитационной модели оценки воздействия противника на объекты материально-технического обеспечения Вооруженных сил Российской Федерации.

*Ключевые слова:* визуализационно-интеграционная платформа ОптИМУС, имитационное мультиагентное моделирование, искусственный интеллект, метаэвристическая оптимизация, интеллектуальные агенты, предметно-ориентированный язык, навигационная сеть, вооружения, военная и специальная техника.

### Введение

На сегодняшний день многие крупные предприятия и ведомства России, включая Министерство обороны, занимаются созданием и эксплуатацией программных комплексов (ПК) имитационного моделирования и поддержки принятия решений на всех уровнях функционирования — от проектирования изделий до проведения операций. Как правило, такие ПК подразумевают проведение моделирования и оптимизации поведения действующих или перспективных пространственно-распределенных систем. Анализ результатов моделирования и оптимизации сложных систем позволяет выявить оптимальные режимы функционирования и наиболее подходящие способы управления, оценить возможности моделируемых объектов в различных условиях при заявленных и перспективных характеристиках. Обеспечиваемые в таких ПК качественная визуализация моделируемых процессов с привязкой к геопространству и множество инструментальных технических средств позво-

ляют облегчить выполнение и улучшить качество проводимого анализа.

Различные образцы вооружений, военной и специальной техники (ВВСТ), комплексы и системы военного назначения являются сложными многопараметрическими системами. Совершенствование их характеристик — это длительный и итеративный процесс, который может быть существенно сокращен с применением эффективного имитационного моделирования. При этом уровень качества изделий может быть увеличен за счет:

- практически неограниченного количества модельных экспериментов;
- возможностей поиска оптимальных параметров (в ручном, полуавтоматическом и автоматическом режимах);
- доступности современных геоинформационных средств;
- качественных средств анализа и обработки результатов.

Сейчас в мире активно развиваются технологии искусственного интеллекта. Они реализуются в виде различных инструментальных средств, таких как нейросетевые программные библиотеки, библиотеки машинного обучения, библиотеки генетического программирования, библиотеки различных эволюционных алгоритмов, программные продукты создания и анализа онтологий, различные базы знаний, методы и алгоритмы метаэвристической оптимизации, платформы мультиагентного моделирования и т. д.

Интеграция подобных технологий в едином ПК имитационного моделирования позволит разрабатывать существенно более сложные модели, используя эффективно взаимодействующие инновационные программные компоненты. Разработка сложных интеллектуальных моделей средствами такого ПК приведет в перспективе к качественно новому уровню поддержки принятия решений при проектировании ВВСТ, что особо востребовано при прогнозировании поведения сложных систем, при создании и совершенствовании автономных беспилотных аппаратов и т. п.

С целью практического освоения данных направлений авторами ведется разработка визуализационно-интеграционной платформы (ВИП) ОптИМУС [1] для оптимизационного имитационного моделирования и управления системами. В архитектуру данной платформы изначально заложены подходы, позволяющие на разных этапах эксплуатации и разработки использовать ряд технологий искусственного интеллекта. Далее рассмотрим некоторые из них.

### Имитационное моделирование интеллектуальных агентов

В качестве базовой технологии имитационного моделирования в ВИП ОптИМУС выбран подход мультиагентного моделирования, с помощью которого анализируемая система представляется в виде совокупности программных агентов. Имитационная модель, построенная по агентной технологии, описывает поведение децентрализованных агентов, определяющих поведение всей системы в целом. При этом поведение агентов определяется на индивидуальном уровне (рис. 1), а глобальное поведение возникает как результат деятельности множества агентов [2].



Рис. 1. Разнообразие типов и вариантов программных агентов

В мультиагентной платформе организовано взаимодействие по формализованным правилам произвольного количества агентов разных типов, запрограммированных в соответствии с определенными требованиями. Платформа использует единый для всех агентов механизм продвижения по времени и решает вопросы взаимодействия агентов (обмен событиями, сообщениями и т. д.).

Одним из самых трудоемких и критически важных процессов при создании мультиагентных систем является разработка функциональных и поведенческих моделей агентов. В зависимости от требований к агентам, уровня проработанности, сложности предметной области и квалификации разработчиков создание агентов может выполняться различными способами.

В платформе ОптИМУС могут использоваться классические языки программирования высокого уровня (С/С++) и специальные предметно-ориентированные языки (ПОЯ, в англоязычной литературе Domain Specific Language — DSL) [3].

Использование ПОЯ в агентных моделях также относится к технологиям искусственного интеллекта.

ПОЯ, как правило, является расширением регулярного языка программирования. За счет этого свойства обеспечивается полнота ПОЯ. При наличии полноты ПОЯ его можно использовать вместо языка общего назначения для обеспечения быстрой и эффективной разработки логики принятия решений, включая пове-

денческую логику, логику выбора оптимального пути или выбора оптимальной конструкции/структуры. Реализация интеллектуального программного кода на ПОЯ существенно упрощает понимание и сопровождение разрабатываемых моделей агентов (рис. 2).

В качестве составных элементов в логике поведения агентов используются отдельно реализованные программные блоки. В перспективе их могут заменить нейросетевые блоки, ранее обученные для применения в задачах принятия решений. Это даст возможность заранее провести сложные физико-математические расчеты с целью машинного обучения и использовать в имитационных расчетах проверенные обученные функции. При этом сохранятся реалистичность и подробность исходной модели поведения агента со значительным увеличением производительности.

### Навигационные сети в имитационном моделировании

В процессе реального моделирования физических агентов (люди, техника) возникает необ-

ходимость учета геометрии окружающего пространства (рельеф, здания и т. п.). Таким образом, для обеспечения реалистичных моделей при проведении имитационного моделирования требуется реализовать представление окружающей среды, позволяющее максимально реалистично обеспечивать перемещение агентов по местности и интеллектуально оценивать пространственное расположение и геометрию зданий и сооружений. Для этого необходимо обеспечить динамическое построение маршрутов агентов во время расчета с учетом окружающего пространства.

Одним из способов реализации учета геометрии окружающего пространства и построения в нем корректных маршрутов является построение навигационных сетей [4, 5].

Навигационная сеть представляет собой многолистовую поверхность, состоящую из связанных выпуклых многоугольников, отображающих поверхности, по которым может перемещаться центр агента конечных размеров. Таким образом, навигационная сеть получается в результате дискретизации непрерывного пространства в виде графа (рис. 3). Это позволяет свести задачу поиска кратчайшего по заданным крите-

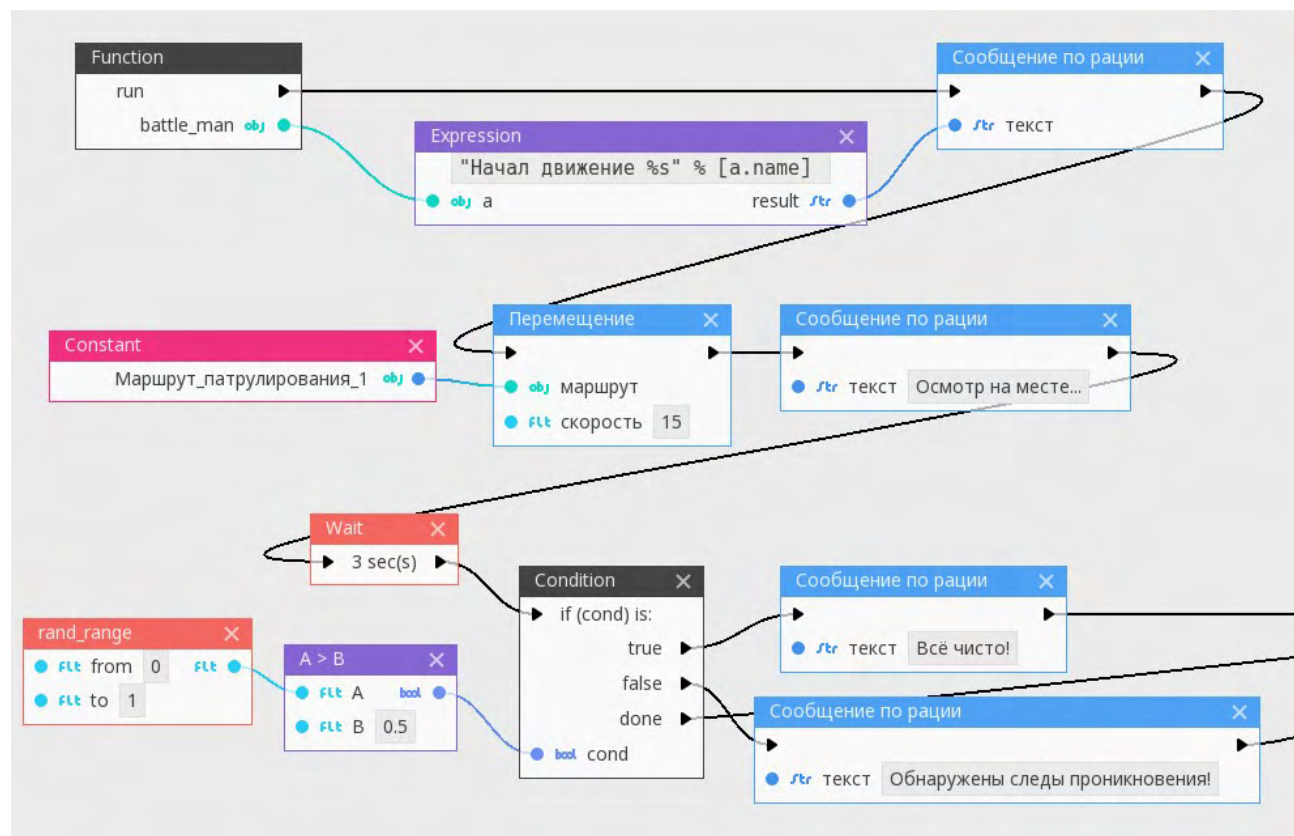


Рис. 2. Пример использования ПОЯ для описания поведения агента

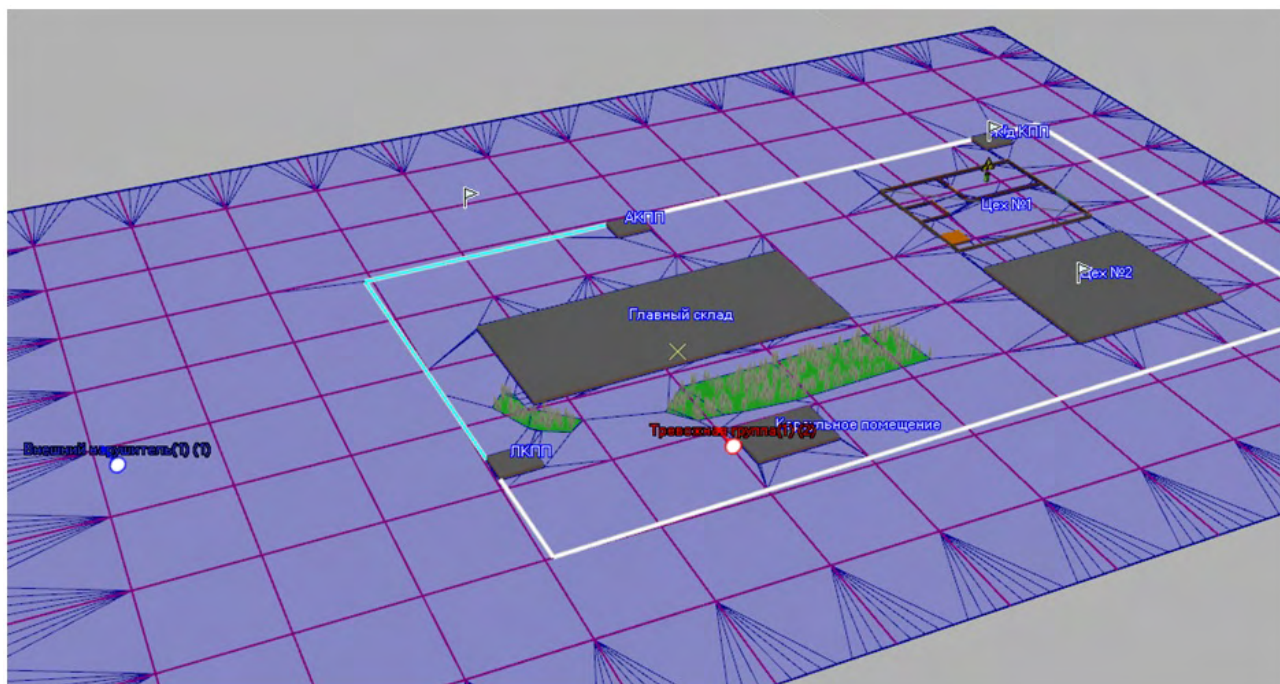


Рис. 3. Пример навигационной сети из выпуклых многоугольников

риям пути в пространстве к задаче поиска кратчайшего пути на графе, которая решается с помощью достаточно быстрых алгоритмов, таких как алгоритм A\* или алгоритм Дейкстры [3].

Представление окружающей среды в виде навигационной сети в ВИП ОпТИМУС позволило решить следующие задачи:

- 1) быстрый поиск оптимальных маршрутов по заданным критериям;
- 2) построение графов возможных путей перемещения;
- 3) перемещение агента по заданному маршруту;
- 4) определение ближайших к агенту объектов;
- 5) обход статических объектов (зданий, сооружений и т. д.);
- 6) определение видимости.

### Стохастические расчеты и средства оптимизации

В большинстве задач, моделирующих реальные процессы, присутствует значительное количество стохастических и нечетко определенных данных. Для решения таких задач требуется использование математического метода Монте-Карло, итогом которого является усреднение результатов множества расчетов с вычислением математического ожидания.

С другой стороны, часто требуется поиск оптимальной конфигурации или поведения некоторой системы. Система состоит из множества взаимодействующих агентов, каждый из которых обладает своим набором параметров. Задачей может быть поиск такой конфигурации системы и ее элементов, чтобы некий формализованный параметр являлся экстремумом (минимумом или максимумом) целевой функции (например, эффективность, вероятность победы одной из сторон или количественные потери в столкновении). Таким образом получается задача с такой постановкой, которая традиционными методами не всегда решается. Такие практические задачи часто характеризуются следующими математическими свойствами:

- необходимостью поиска глобального оптимума;
- сложным ландшафтом поверхности поиска, связанным, в том числе, с наличием овражности, многомерностью, многоэкстремальностью, многокритериальностью задач с ограничениями;
- отсутствием аналитических выражений для целевых функций, а следовательно, их алгоритмическим представлением и высокой вычислительной сложностью;
- недифференцируемостью и нелинейностью;

- наличием дискретных и непрерывных переменных в целевой функции;
- NP-сложностью задачи.

В математике для решения задач такого класса используют биоинспирированные метаэвристические методы [6]. Эти методы основаны на имитации естественных процессов, заимствованных у живой природы, и реализуют адаптивный случайный поиск. В подобных задачах случайность, как правило, обладает большей эффективностью и позволяет отыскивать хорошие, т. е. достижимые оптимальные (субоптимальные) решения, не всегда определяемые точными методами.

В ВИП ОптИМУС реализованы оптимизационные расчеты методом Монте-Карло, а также ряд эволюционных оптимизационных алгоритмов. На рис. 4 в общем виде приведена схема использования оптимизатора в платформе.

Стохастические и оптимизационные алгоритмы требуют многократного расчета исследуемой модели, что существенно влияет на календарную длительность выполнения исследований. Для решения этой проблемы задействуются возможности многопроцессорных параллельных вычислений, которые позволяют кратно ускорить выполнение расчетов.

### Примеры использования ВИП ОптИМУС для имитационного моделирования ВВСТ

Представленные подходы были опробованы в различных программных продуктах и моделях.

Например, в рамках подготовки к стратегическим учениям органов военного управления "Запад 2017" совместно с НИИ (ВСИ МТО ВС РФ) был разработан вариант прогнозной имитационной модели оценки воздействия противника на объекты материально-технического обеспечения (МТО) в операции на западном стратегическом направлении [7].

Создание прототипа представленного программного продукта выполнялось с использованием базовых возможностей ВИП ОптИМУС. В частности, для ввода исходной обстановки и параметров массивированного ракетно-авиационного удара был разработан специализированный пользовательский интерфейс (рис. 5), прогнозные вычисления выполнены методом мульти-агентного моделирования.

На основе методик, предоставленных НИИ (ВСИ МТО ВС РФ), были разработаны программные агенты для разных типов объектов моделирования, а именно сети военных автомобильных и железных дорог, объектов морского, речного и воздушного транспорта, складской инфраструктуры обеспечения горючим, продовольствием, вещевым имуществом. Для всех инфраструктурных объектов реализованы модели поражения, адаптированные к функционированию в режиме имитационного моделирования. Тем самым обеспечена адекватность полученных результатов, а также возможность быстрого и динамичного пересчета.

В прогнозной модели использованы возможности платформы для визуализации результатов моделирования в различных формах: в таблич-

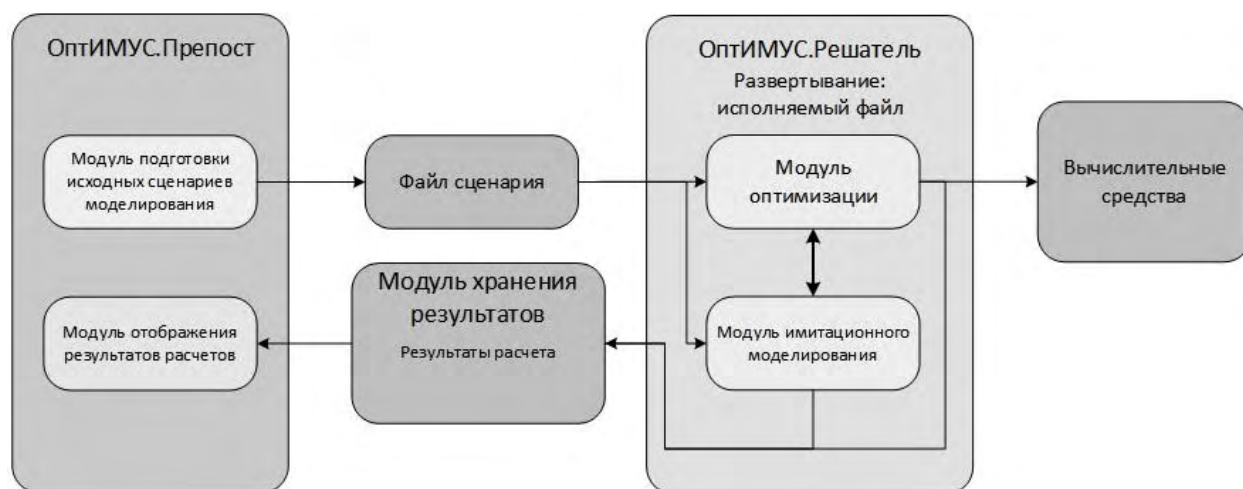


Рис. 4. Схема использования оптимизатора

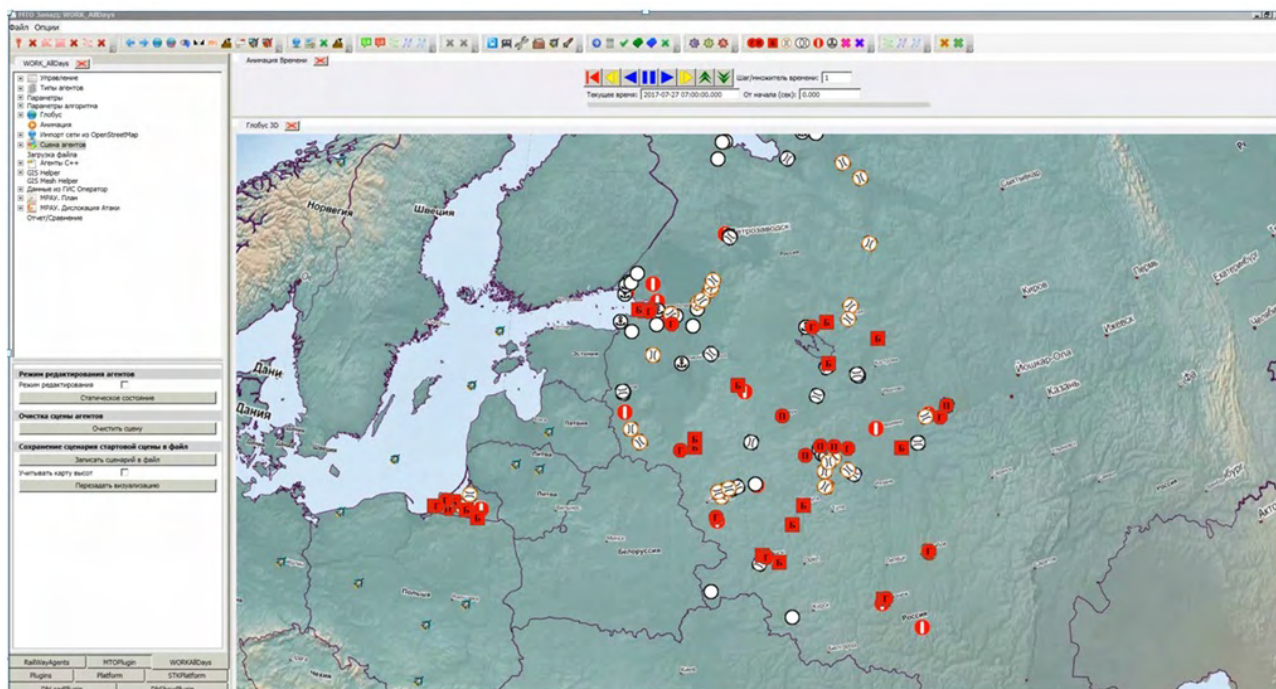


Рис. 5. Интерфейс условной имитационной модели МТО

ном представлении, в виде обобщенных и частных диаграмм, а также в двух- и трехмерном представлениях на виртуальном глобусе (рис. 6).

Еще одним примером использования базовых возможностей ВИП ОпТИМУС является программное обеспечение (ПО) для оценки эффективности (ОЭ) систем физической защиты (СФЗ) ОБЗОР [8]. ПО ОЭ СФЗ ОБЗОР представляет собой интегрированную с единой базой данных среду для мультиагентного моделирования конфликтной ситуации *силы СФЗ – нарушители*, включающую в себя трехмерную среду визуализации на трехмерном глобусе с поддержкой геоданных. Назначением ПО является

ОЭ СФЗ различных территориально распределенных объектов, площадок, зданий и т. д. (рис. 7).

Реализация в данном ПО представленных выше подходов (формирование индивидуального поведения интеллектуальных агентов с помощью ПОЯ, использование стохастических расчетов методом Монте-Карло, применение навигационных сетей для перемещения агентов в пространстве) позволила в единой визуальной среде синтезировать всю полноту расчетных и картографических данных для исследуемого объекта, принимать решения по конфигурации СФЗ и делать научно обоснованную оценку их достаточности.

Снижение обеспеченности группировки войск		
Операционное направление	Потери на ОН	ВСЕГО по ЗСН
Балтийское	13,67% 86,33%	65,75%
Смоленское	12,15% 87,85%	
Орловско-Воронежское	41,09% 58,91%	
Кольское	63,73% 36,27%	
Калининградское	51,46% 48,54%	
		34,25%

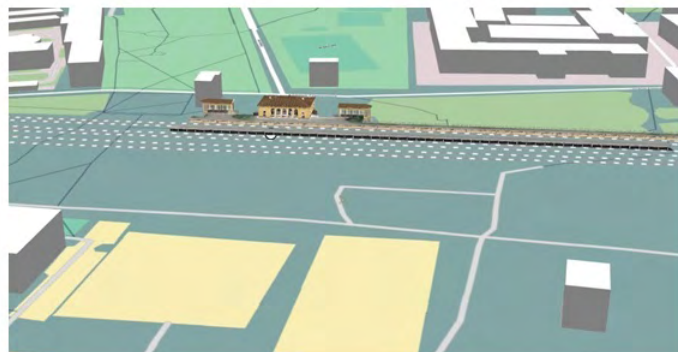


Рис. 6. Фрагменты визуализации условной имитационной модели МТО

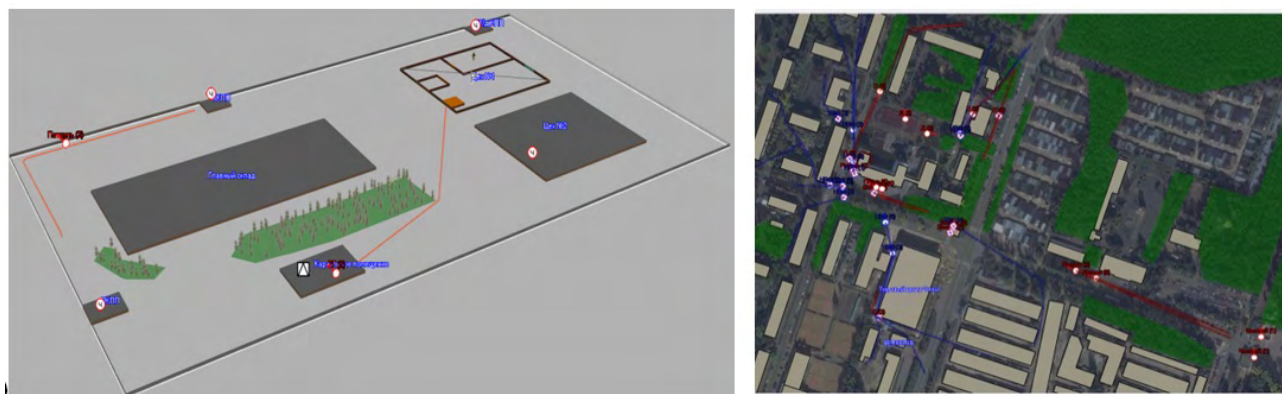


Рис. 7. Примеры условных объектов моделирования в ПО ОЭ СФЗ ОБЗОР

### Заключение

В статье дан краткий обзор ключевых технологий, используемых в ВИП ОпТИМУС. Показаны направления применения, развития и взаимодействия данных технологий в едином ПК. В приведенных примерах моделирования сложных систем показана перспективность использования различных технологий (включая технологии искусственного интеллекта) для определения и обоснования способов применения существующих ВВСТ и формирования тактико-технических требований к перспективным ВВСТ.

### Список литературы

1. Коваленко О. В., Крючков И. А., Ежов Д. В., Огородников А. В., Ерошкина И. В., Собанин Д. С., Хочкин Н. И., Варгина Е. Ф., Тихомиров Ю. В., Рыжик А. В., Васильева Е. А., Кондратьев А. Б. Визуализационно-интеграционная платформа для оптимизационного имитационного моделирования и управления системами (ВИП ОпТИМУС), ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ". Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019617157.  
*Kovalenko O. V., Kryuchkov I. A., Ezhov D. V., Ogorodnikov A. V., Eroshkina I. V., Sobanin D. S., Khochkin N. I., Vargina E. F., Tikhomirov Yu. V., Ryzhikh A. V., Vasileva E. A., Kondratev A. B. Vizualizatsionno-integratsionnaya platforma dlya optimizatsionnogo imitatsionnogo modelirovaniya i upravleniya sistemami*

(VIP OptIMUS), FGUP "RFYaTs-VNIIEF". Svidetelstvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2019617157.

2. *Rassel S., Norvig P. Искусственный интеллект: современный подход. 2-е изд. / Пер. с англ. М.: "Вильямс", 2006. Rassel S., Norvig P. Iskustvenny intellekt: sovremenny podkhod. 2-e izd. / Per. s angl. M.: "Vilyams", 2006.*
3. Multi-Agent Programming. Languages, Tools and Applications / Ed. by R. H. Bordini, M. Dastani, J. Dix, A. F. Seghrouchni. Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
4. *Hart P. E., Nilsson N. J., Raphael B. A. Formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths // IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics. SSC4. 1968. Vol. 4 (2). P. 100–107.*
5. *Demyen D. J. Efficient Triangulation-Based Pathfinding. University of Alberta, 2007.*
6. *Скобцов Ю. А., Фёдоров Е. Е. Метаэвристики: монография. Донецк: "Ноулидж", 2013. Skobtsov Yu. A., Fedorov E. E. Metaevristiki: monografiya. Donetsk: "Noulidzh", 2013.*
7. Коваленко О. В., Крючков И. А., Огородников А. В., Собанин Д. С., Хочкин Н. И. Использование визуализационно-интеграционной платформы ОпТИМУС для прогнозного имитационного моделирования воздействия противника по объектам материально-технического обеспечения // Отраслевая науч.-практ. конф. "Проблемные вопросы материально-технического обеспечения группировки войск (сил)" (по итогам исследований в ходе ССУ МТО и



СКШУ "Запад-2017"). Санкт-Петербург, 16 ноября 2017 г.

*Kovalenko O. V., Kryuchkov I. A., Ogorodnikov A. V., Sobanin D. S., Khochkin N. I.* Ispolzovanie vizualizatsionno-integratsionnoy platformy OptIMUS dlya prognoznoy imitatsionnoy modelirovaniya vozdeystviya protivnika po obektam materialno-tekhnicheskogo obespecheniya // Otrasleyaya nauch.-prakt. konf. "Problemye voprosy materialno-tekhnicheskogo obespecheniya gruppировки voysk (sil)" (po itogam issledovaniy v khode SSU MTO i SKShU "Zapad-2017"). Sankt-Peterburg, 16 noyabrya 2017 g.

8. *Коваленко О. В., Собанин Д. С., Ерошкина И. В., Крючков И. А., Хочкин Н. И., Вар-*

*гина Е. Ф., Тихомиров Ю. В.* Программное обеспечение оценки эффективности СФЗ, ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ". Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018616230.

*Kovalenko O. V., Sobanin D. S., Eroshkina I. V., Kryuchkov I. A., Khochkin N. I., Vargina E. F., Tikhomirov Yu. V.* Programmnoe obespechenie otsenki effektivnosti SFZ, FGUP "RFYaTs-VNIIEF". Svidetelstvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2018616230.

Статья поступила в редакцию 12.03.19.

FUNCTIONALITY OF THE "OptIMUS" VISUALIZATION AND INTEGRATION PLATFORM FOR SIMULATIONS OF WEAPONS AND MILITARY AND SPECIAL-PURPOSE EQUIPMENT / O. V. Kovalenko, I. A. Kryuchkov, A. V. Ogorodnikov, D. V. Ezhov, D. S. Sobanin (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhny Novgorod Region).

The paper provides an overview of the software approaches and technologies employed in the OptIMUS visualization and integration platform. We demonstrate capabilities of the platform for mutual integration of different technologies, including artificial intelligence (AI), in a single program package for multi-agent simulations enabling the development of sophisticated intelligent models of different weapons and military equipment designs. Practical examples are provided to show how these approaches and technologies can be used to simulate physical protection systems and develop predictive models of adversary impact on logistics entities of the Armed Forces of the Russian Federation.

*Keywords:* OptIMUS visualization and integration platform, multi-agent simulation, artificial intelligence, meta-heuristic optimization, intelligent agents, domain-specific language, navigation network, weapons, military and special-purpose equipment.

---

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Бартенев Юрий Германович** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, главный научный сотрудник, *e-mail*: YGBartenev@vniief.ru

**Блохин Анатолий Иванович** — ИБРАЭ РАН, г. Москва, старший научный сотрудник, *e-mail*: bai@ibrae.ac.ru

**Блохин Павел Анатольевич** — ИБРАЭ РАН, г. Москва, научный сотрудник, *e-mail*: blokhin@ibrae.ac.ru

**Ванеев Юрий Евгеньевич** — ИБРАЭ РАН, г. Москва, ведущий научный сотрудник, *e-mail*: yuvan@ibrae.ac.ru

**Величко Ольга Михайловна** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, ведущий научный сотрудник, *e-mail*: OMVelichko@vniief.ru

**Дерюгин Юрий Николаевич** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, главный научный сотрудник, *e-mail*: YNDeryugin@vniief.ru

**Ежов Дмитрий Владимирович** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, начальник научно-исследовательской лаборатории, *e-mail*: DVIEzhov@vniief.ru

**Карлыханов Николай Григорьевич** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ", г. Снежинск Челябинской области, начальник научно-исследовательской лаборатории, *e-mail*: n.g.karlykhanov@vniitf.ru

**Карпов Андрей Павлович** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, начальник научно-исследовательской группы, *e-mail*: APKarpov@vniief.ru

**Коваленко Олег Владимирович** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, начальник научно-исследовательского отдела, *e-mail*: OVKovalenko@vniief.ru

**Крючков Илья Алиевич** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, начальник научно-исследовательской лаборатории, *e-mail*: IAKryuchkov@vniief.ru

**Машенькин Павел Александрович** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, научный сотрудник, *e-mail*: PAMashenkin@vniief.ru

**Огородников Андрей Валерьевич** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, старший научный сотрудник, *e-mail*: AVOgorodnikov@vniief.ru

**Сипачев Иван Васильевич** — ИБРАЭ РАН, г. Москва, главный специалист, *e-mail*: sipachev@ibrae.ac.ru

**Собанин Данила Сергеевич** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, научный сотрудник, *e-mail*: DSSobanin@vniief.ru

**Соболев Игорь Вадимович** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, ведущий научный сотрудник, *e-mail*: I.V.Sobolev@vniief.ru

## INFORMATION ABOUT AUTHORS

- Bartenev Yuriy Germanovich** – FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, chief scientist, *e-mail*: YGBartenev@vniief.ru
- Blokhin Anatoliy Ivanovich** – IBRAE RAS, Moscow, senior scientist, *e-mail*: bai@ibrae.ac.ru
- Blokhin Pavel Anatolevich** – IBRAE RAS, Moscow, scientist, *e-mail*: blokhin@ibrae.ac.ru
- Vaneev Yuriy Evgenevich** – IBRAE RAS, Moscow, leading scientist, *e-mail*: yuvan@ibrae.ac.ru
- Velichko Olga Mikhailovna** – FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, leading scientist, *e-mail*: OMVelichko@vniief.ru
- Deryugin Yuriy Nikolaevich** – FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, chief scientist, *e-mail*: YNDeryugin@vniief.ru
- Ezhov Dmitriy Vladimirovich** – FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, head of research laboratory, *e-mail*: DVIEzhov@vniief.ru
- Karlykhanov Nikolay Grigorevich** – FSUE "RFNC-VNIITF", Snezhinsk, Chelyabinsk region, head of research laboratory, *e-mail*: n.g.karlykhanov@vniitf.ru
- Karpov Andrey Pavlovich** – FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, head of research group, *e-mail*: APKarpov@vniief.ru
- Kovalenko Oleg Vladimirovich** – FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, head of research department, *e-mail*: OVKovalenko@vniief.ru
- Kryuchkov Ilya Alievich** – FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, head of research laboratory, *e-mail*: IAKryuchkov@vniief.ru
- Mashenkin Pavel Aleksandrovich** – FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, scientist, *e-mail*: PAMashenkin@vniief.ru
- Ogorodnikov Andrey Valerevich** – FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, senior scientist, *e-mail*: AVOgorodnikov@vniief.ru
- Sipachev Ivan Vasilevich** – IBRAE RAS, Moscow, chief specialist, *e-mail*: sipachev@ibrae.ac.ru
- Sobanin Danila Sergeevich** – FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, scientist, *e-mail*: DSSobanin@vniief.ru
- Sobolev Igor Vadimovich** – FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, leading scientist, *e-mail*: I.V.Sobolev@vniief.ru

## ПЕРЕЧЕНЬ

статей, опубликованных в 2019 г. в научно-техническом сборнике "Вопросы атомной науки и техники". Сер. "Математическое моделирование физических процессов"

*Николаева О. В., Казанцева А. С.* Сравнение свойств сеточных схем для решения уравнения переноса на неструктурированных тетраэдрических сетках. Вып. 1. С. 3–18.

*Кривохиин А. А., Стадник А. Л., Янцлжин Ю. В.* Численное моделирование движения жестких ударников в упругопластических средах на неподвижной счетной сетке по методике ЭГАК. Вып. 1. С. 19–32.

*Модестов Д. Г.* Погрешности расчета выгорания ядерного топлива при использовании методов статистического моделирования. Вып. 1. С. 33–43.

*Шестаков А. А.* Численные эффекты при моделировании переноса теплового излучения. Вып. 1. С. 44–56.

*Юдов Ю. В., Данилов И. Г., Чепилко С. С., Кастерин Д. С.* Объединение одномерной и трехмерной моделей теплогидравлики в расчетном коде КОРСАР/CFD. Вып. 1. С. 57–68.

*Усов Э. В., Бутов А. А., Чухно В. И., Климонов И. А., Кудашов И. Г., Прибатурин Н. А., Мосунова Н. А., Стрижов В. Ф.* Особенности алгоритмов кода ЕВКЛИД/V2 для математического моделирования движения расплава во время тяжелой аварии в быстром реакторе. Вып. 1. С. 69–77.

*Серёгин С. В.* Радиальные колебания кольцевых элементов машин. Вып. 1. С. 78–83.

*Стенин А. М.* Консервативный пересчет величин в разностных схемах газовой динамики на лагранжево-эйлеровой сетке. Вып. 2. С. 3–16.

*Шестаков А. А.* TVDR-схемы для решения системы уравнений переноса теплового излучения. Вып. 2. С. 17–36.

*Володина Н. А., Титова В. Б., Ширшова М. О.* Результаты численного моделирования в методике ЛЭГАК изменения ударно-волновой чувствительности ВВ типа ТАТБ при многократном воздействии ударных волн. Вып. 2. С. 37–49.

*Иванов Н. В.* Условие выбора мажоранты в методе "максимального сечения". Вып. 2. С. 50–54.

*Стручков А. В., Козелков А. С., Жучков Р. Н., Уткина А. А., Саразов А. В.* Численное моделирование задач аэродинамики со статической адаптацией сетки под особенности решения. Вып. 2. С. 55–67.

*Петунин С. А.* Эффективное прогнозирование временных характеристик вычислительных заданий по расширенным метаданным. Вып. 2. С. 68–80.

*Зайцев А. И., Дмитриев С. М., Куркин А. А., Пелиновский Е. Н.* Вероятностная оценка опасности цунами на побережье Египта в районе возводимой АЭС "Эль-Дабаа". Вып. 2. С. 81—89.

*Янцкин Ю. В.* Численное исследование взаимовлияния зоны турбулентного перемешивания и локальных возмущений границы раздела в задаче гравитационного турбулентного перемешивания. Вып. 3. С. 3—17.

*Чубарешко И. С., Шестаков А. А.* Разностная схема УРАЛ для решения гиперболической системы  $P_1$ -уравнений. Вып. 3. С. 18—34.

*Володина Н. А., Краюхин С. А.* Алгоритм итерационной коррекции времен детонации за счет учета направления движения детонационной волны в методике ЛЭГАК. Вып. 3. С. 35—47.

*Алексеев А. В., Бнятов А. В., Крутько Н. А., Раткевич С. С.* Комплекс программ GROUND2 обработки оцененных ядерных данных и расчета систем групповых констант. Вып. 3. С. 48—60.

*Соколов С. С., Новиков И. Г., Воропинов А. А., Половникова Т. Н.* Методы балансировки вычислительной нагрузки в методике ТИМ. Вып. 3. С. 61—72.

*Бахаев А. Н., Машенькин П. А., Сидоров М. Л.* Модели насыщенно-ненасыщенной и напорно-безнапорной фильтрации в комплексе программ НИМФА. Вып. 3. С. 73—83.

*Соловьёв В. П., Анисин А. В., Анисина И. М., Надёжин С. С., Железнов М. М., Певзнер В. О., Третьяков И. В.* Модель деформируемости грунтового основания железнодорожного пути при пропуске длинносоставных поездов. Вып. 3. С. 84—89.

Памяти Виталия Ефимовича Трощиева. Вып. 3. С. 90—91.

УДК 519.633.6

МЕТОД РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ / И. В. Соболев // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2019. Вып. 4. С. 3–20.

Описано численное решение уравнений электродинамики на неструктурированных многогранных сетках методом типа Годунова второго порядка. Для уравнений идеальной магнитной газовой динамики применяются три разностные схемы, основанные на приближенном решении задачи о распаде разрыва. Рассмотрено также исключение численного магнитного заряда методом СТ. Разностная схема для уравнений Максвелла использует точное решение задачи Римана. Приводятся тестовые расчеты и их сравнение с опубликованными данными (рис. 21, табл. 4, список лит. — 19).

*Ключевые слова:* уравнения идеальной магнитной газовой динамики, уравнения Максвелла, метод Годунова, неструктурированные сетки.

УДК 519.6

УЧЕТ СПЕКТРАЛЬНЫХ И КИНЕТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ В ПРИБЛИЖЕНИИ ЛУЧИСТОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ / Н. Г. Карлыханов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2019. Вып. 4. С. 21–31.

Рассматривается один подход для усреднения по спектру и угловой переменной уравнения переноса излучения. В отличие от известных методов рассматриваемый здесь алгоритм сводит усредненную задачу к уравнению для приближения лучистой теплопроводности. Показано, что при выполнении определенных условий результаты расчетов, проведенных с использованием предлагаемого алгоритма, близки к результатам расчетов в кинетической постановке. Показано, что в оптически плотных средах данный алгоритм естественным образом переходит в приближение лучистой теплопроводности со средним росселандовым пробегом (рис. 2, список лит. — 7).

*Ключевые слова:* перенос теплового излучения, квазидиффузия, квазиспектральность.

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ РЕЛАКСАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ С ТРЕЩИНАМИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОПЫТОВ С ОБРАЗЦАМИ ВВ НА УСТАНОВКЕ СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ ГОПКИНСОНА / О. М. Величко // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2019. Вып. 4. С. 32–50.

Представлены однокомпонентная вязкоупругая модель среды с трещинами, сформулированная на основе работ американских авторов, и ее модификация расчета вязкой релаксации и кинетики роста трещин. Разработан приближенный вычислительный алгоритм, ускоряющий процесс подбора параметров модели для взрывчатого вещества на основе октогена. Критерием подбора является приемлемое согласие результатов расчетов и экспериментов с образцами ВВ на установке составных стержней Гопкинсона из работы российских авторов. Численное моделирование процессов деформирования образцов ВВ проводится на основе расчетной модели, реализованной методом Годунова (рис. 20, табл. 8, список лит. — 17).

*Ключевые слова:* ВВ, деформирование и разрушение, вязкоупругая модель с трещинами, метод Годунова, численное моделирование.

УДК 519.6

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОСЕТОЧНОГО РЕШАТЕЛЯ СЛАУ / Ю. Н. Дерюгин, П. А. Машенькин // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2019. Вып. 4. С. 51–65.

Рассматривается применимость технологии решения системы линейных алгебраических уравнений многосеточным методом для задач подземной гидродинамики. Приведена методика решения задач однофазной фильтрации в неоднородной и анизотропной пористой среде на неструктурированной сетке, состоящей из выпуклых несамопересекающихся ячеек. Экспериментально показано, что эффективность использования алгебраического многосеточного метода растет с увеличением характера неоднородности породы в пластах и с увеличением размера расчетной сетки в задаче. Проведено сравнение решателя крыловского типа PCG и алгебраического многосеточного решателя по сходимости невязки и по затраченному времени решения (рис. 20, табл. 1, список лит. — 14).

*Ключевые слова:* СЛАУ, алгебраический многосеточный решатель, подземная гидродинамика, аппроксимация на неструктурированной сетке.

УДК 519.6

МНОГОКРАТНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНОГОУРОВНЕВОЙ СТРУКТУРЫ ДАННЫХ В АЛГЕБРАИЧЕСКОМ МНОГОСЕТОЧНОМ РЕШАТЕЛЕ СЛАУ / Ю. Г. Бартенев, А. П. Карпов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2019. Вып. 4. С. 66–77.

Рассмотрен способ многократного использования построенной многоуровневой структуры данных алгебраического многосеточного предобуславливателя и решателя для потока СЛАУ с одинаковым портретом матриц. Этот способ, названный частичным построением алгебраического многосеточного решателя вслед за его полным построением для предшествующей СЛАУ, состоит в обновлении только значений коэффициентов ранее построенных грубых матриц без изменения их структуры. Представлены примеры применения сочетания полного и частичного построения алгебраического многосеточного решателя в разных вариантах его реализации. Показано значительное сокращение времени решения СЛАУ в задачах моделирования различных физических процессов с использованием указанного способа построения решателя в библиотеке PMLP/ParSol и некоторых других библиотеках. Вкратце затрагивается вопрос адаптивного сочетания полного и частичного построения алгебраического многосеточного решателя (рис. 2, табл. 7, список лит. — 19).

*Ключевые слова:* система линейных алгебраических уравнений, разреженные матрицы, алгебраические многосеточные предобуславливатели и решатели, уравнения гидродинамики, уравнения аэродинамики, уравнения распространения тепла в твердом теле, уравнения диффузии жидкости в пористых средах, уравнения лучистой теплопроводности, поток СЛАУ с одинаковым портретом матриц, итерационные решатели CG, BiCGStab.



УДК 621.039

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС "КОРИДА" ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РАДИАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИК ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ И ИНЖЕНЕРНЫХ БАРЬЕРОВ БЕЗОПАСНОСТИ / А. И. Блохин, П. А. Блохин, Ю. Е. Ванеев, И. В. Сипачёв // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2019. Вып. 4. С. 78—87.

Представлены описания функциональных возможностей и структуры разрабатываемого программного комплекса КОРИДА, предназначенного для решения задач обоснования радиационной безопасности объектов ядерного наследия и пунктов захоронения радиоактивных отходов. Результаты решения таких задач в значительной степени зависят от характеристик радиоактивных отходов как источников излучения, поэтому в состав комплекса входит модуль нуклидной кинетики. Для моделирования переноса нейтронного и фотонного излучений используется программа TDMSS. С целью упрощения процедуры подготовки исходных данных в формате этой программы в состав комплекса включены специализированный графический редактор и конвертер данных о геометрии, материалах и источниках излучения. Приведены результаты тестирования модуля нуклидной кинетики и программного комплекса в целом (рис. 4, табл. 3, список лит. — 16).

*Ключевые слова:* программный комплекс, радиоактивные отходы, нуклидная кинетика, моделирование переноса излучения, графический редактор, конвертер данных, энерговыделение, мощность дозы.

УДК 004.94:004.8

ВОЗМОЖНОСТИ ВИЗУАЛИЗАЦИОННО-ИНТЕГРАЦИОННОЙ ПЛАТФОРМЫ "ОптИМУС" ДЛЯ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВООРУЖЕНИЙ, ВОЕННОЙ И СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕХНИКИ / О. В. Коваленко, И. А. Крючков, А. В. Огородников, Д. В. Ежов, Д. С. Собанин // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2019. Вып. 4. С. 88—95.

Приводится обзор программных подходов и технологий, используемых в визуализационно-интеграционной платформе ОптИМУС. Показаны возможности взаимной интеграции различных технологий, включая технологии искусственного интеллекта, в едином программном комплексе имитационного мультиагентного моделирования для обеспечения разработки сложных интеллектуальных моделей различных образцов вооружений и военной техники. Даны практические примеры использования приведенных подходов и технологий для моделирования систем физической защиты и создания прогнозной имитационной модели оценки воздействия противника на объекты материально-технического обеспечения Вооруженных сил Российской Федерации (рис. 7, список лит. — 8).

*Ключевые слова:* визуализационно-интеграционная платформа ОптИМУС, имитационное мультиагентное моделирование, искусственный интеллект, метаэвристическая оптимизация, интеллектуальные агенты, предметно-ориентированный язык, навигационная сеть, вооружения, военная и специальная техника.

A METHOD FOR MULTI-DIMENSIONAL ELECTRODYNAMIC SIMULATIONS ON UNSTRUCTURED MESHES / I. V. Sobolev // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. 2019. No 3. P. 3–20.

The paper describes numerical simulations of electrodynamic equations on unstructured polyhedral meshes by a second-order Godunov-type method. For ideal magnetohydrodynamics we use three difference schemes based on an approximate Riemann solver. We also discuss exclusion of the numerical magnetic charge by the CT method. The difference scheme for Maxwell's equations employs an exact Riemann solver. Test simulations are presented and compared with published data.

*Key words:* Maxwell's equations, equations of ideal magnetohydrodynamics, Godunov method, unstructured meshes.

INCORPORATING SPECTRAL AND KINETIC EFFECTS IN THE RADIATIVE HEAT TRANSFER APPROXIMATION FOR RADIATIVE TRANSFER SIMULATIONS / N. G. Karlykhanov // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. 2019. No 3. P. 21–31.

The paper considers an approach to averaging the radiative transfer equation over spectrum and angular variable. As distinct from the known methods, the algorithm under consideration reduces an averaged problem to an equation for the radiative heat transfer approximation. It is demonstrated that the simulation results obtained using the proposed algorithm — provided that some conditions are satisfied — are close to the simulation results obtained in the kinetic statement. As applied to optically thick media, this algorithm is shown to naturally transform into the radiative heat transfer approximation with a mean Rosseland path.

*Key words:* heat transfer, quasi-diffusion, quasi-spectral property.

APPLICATION OF A RELAXATION MODEL OF FRACTURED VISCOELASTICITY FOR THE DESCRIPTION OF HIGH-EXPLOSIVE SPECIMEN TESTING USING A SPLIT-HOPKINSON PRESSURE BAR / O. M. Velichko // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. 2019. No 3. P. 32–50.

A single-material viscoelastic model of a fractured medium is considered, which has been formulated based on publications of US authors, and its modification for viscous relaxation and fracture growth kinetics is presented. An approximate computational algorithm accelerating the process of model fitting for an HMX-based high explosive has been developed. The fitting is based on the criterion of acceptable agreement between calculated data and results of HE specimen testing on a split-Hopkinson pressure bar apparatus from a publication of Russian authors. Numerical modeling of HE specimen deformation is performed based on a computational model implemented by the Godunov method.

*Key words:* HE, deformation and fracture, fractured viscoelastic model, Godunov method, numerical modeling.

SINGLE-PHASE FLOW SIMULATIONS USING AN ALGEBRAIC MULTIGRID SOLVER FOR SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS / Yu. N. Deryugin, P. A. Mashenkin // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. 2019. No 3. P. 51–65.

Usability of an algebraic multigrid solver for systems of linear algebraic equations in underground hydrodynamic simulations is considered. A methodology for solving the problems of single-phase flow in non-uniform and anisotropic porous media on unstructured meshes composed of convex non-self-intersecting cells is presented. It is shown experimentally that the efficiency of using the algebraic multigrid solver grows with increasing non-uniformity of bed rock and increasing problem mesh size. The algebraic multigrid solver is compared with the Krylov-type PCG solver in error convergence and computing time.

*Key words:* SLAE (system of linear algebraic equations), algebraic multigrid solver, underground hydrodynamics, approximation on unstructured mesh.

REPEATED USE OF A HIERARCHICAL DATA STRUCTURE IN AN ALGEBRAIC MULTIGRID SOLVER FOR SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS / Yu. G. Bartenev, A. P. Karpov // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. 2019. No 4. P. 66–77.

Repeated use of a hierarchical data structure generated in an algebraic multigrid preconditioner and solver for a series of SLAEs with the same matrix profile is considered. This approach, called partial construction of a multigrid algebraic solver fully pre-constructed for a previous SLAE, involves updating merely the coefficients of the pre-constructed coarse matrices without changing their structure. Examples of using a combination of full and partial construction of an algebraic multigrid solver in different modifications of its implementation are given. This solver construction approach in the PMLP/ParSol and some other libraries is shown to considerably reduce the time of solving SLAEs in simulations of different physical processes. The issue of adaptive combination of full and partial algebraic multigrid solver construction is discussed in brief.

*Key words:* system of linear algebraic equations, sparse matrices, algebraic multigrid preconditioners and solvers, hydrodynamic equations, aerodynamic equations, equations of heat transfer in solids, equations of liquid diffusion in porous media, equations of radiant heat transfer, series of SLAEs with the same matrix profile, iterative solvers CG, BiCGStab.

"CORIDA": A PROGRAM PACKAGE FOR PREDICTING RADIATION FIELDS BASED ON THE VARIATIONS IN THE PROPERTIES OF RADIATION SOURCES AND ENGINEERING SECURITY BARRIERS / A. I. Blokhin, P. A. Blokhin, Yu. E. Vaneev, I. V. Sipachev // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. 2019. No 4. P. 78–87.

The paper describes the functionality and structure of a program package called CORIDA being developed for radiation safety analysis of legacy nuclear facilities and radioactive waste disposal sites. Results of such computations are heavily dependent on the emissive properties of radioactive wastes; that is why the program package includes a nuclide kinetics module. Neutron and photon transport is simulated using the TDMCC code. To simplify the pre-processing procedure in the program-specific format, the program package contains a special graphics editor and a data converter for problem geometry, materials and radiation sources. Results of testing the nuclide kinetics module and the program package as a whole are reported.

*Key words:* program package, radioactive wastes, nuclide kinetics, radiative transfer simulations, graphics editor, data converter, yield, dose rate.

FUNCTIONALITY OF THE "OptIMUS" VISUALIZATION AND INTEGRATION PLATFORM FOR SIMULATIONS OF WEAPONS AND MILITARY AND SPECIAL-PURPOSE EQUIPMENT / O. V. Kovalenko, I. A. Kryuchkov, A. V. Ogorodnikov, D. V. Ezhov, D. S. Sobanin // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. 2019. No 3. P. 88–95.

The paper provides an overview of the software approaches and technologies employed in the OptIMUS visualization and integration platform. We demonstrate capabilities of the platform for mutual integration of different technologies, including artificial intelligence (AI), in a single program package for multi-agent simulations enabling the development of sophisticated intelligent models of different weapons and military equipment designs. Practical examples are provided to show how these approaches and technologies can be used to simulate physical protection systems and develop predictive models of adversary impact on logistics entities of the Armed Forces of the Russian Federation.

*Key words:* OptIMUS visualization and integration platform, multi-agent simulation, artificial intelligence, meta-heuristic optimization, intelligent agents, domain-specific language, navigation network, weapons, military and special-purpose equipment.