УДК 530.145

ВОЗМОЖЕН ЛИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПРОЦЕСС ИЗВЛЕЧЕНИЯ ЭНЕРГИИ ИЗ ЭРГОСФЕРЫ МЕТРИКИ КЕРРА (PENROSE PROCESS)?

В. П. Незнамов[1,2*]

[1]ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.
[2]Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

Существование эргосферы метрики Керра не проявляет себя в квантовых уравнениях для частиц различных спинов.

Для легитимизации процесса Пенроуза с извлечением энергии из эргосферы необходимо обоснование и доказательство его существования в рамках последовательной квантовой теории.

Ключевые слова: эргосфера, метрика Керра, процесс Пенроуза, квантовые уравнения для частиц различных спинов.

1. Введение

Стационарная метрика Керра является вакуумным решением ОТО [1]. Решение Керра характеризуется точечным источником с массой M, вращающимся с угловым моментом $J = Mca$. Метрика Керра имеет несколько физически значимых пространственных поверхностей. Это – внешний и внутренний горизонты событий с радиусами

$$\left(r_{\pm}\right)_K = \frac{r_0 \pm \sqrt{r_0^2 - 4a^2}}{2}. \qquad (1)$$

В (1) r_0 – горизонт (гравитационный радиус) Шварцшильда.

Две другие поверхности характеризуются радиусами

$$\left(r_{\pm}\right)_{erg} = \frac{r_0 \pm \sqrt{r_0^2 - 4a^2 \cos^2\theta}}{2}. \qquad (2)$$

Область, заключенная между радиусами (2), называется эргосферой. В этой области временная компонента метрического тензора g_{00} имеет отрицательный знак $\left(g_{00} < 0\right)$. Ниже мы будем рассматривать внешнюю эргосферу, заключенную между радиусами $\left(r_{\pm}\right)_K \div \left(r_{\pm}\right)_{erg}$.

В результате классического анализа Роджер Пенроуз в 1969 г. предложил процесс извлечения энергии из эргосферы вращающегося объекта с метрикой Керра (the Penrose process) [2, 3]. Процесс Пенроуза, в частности, позволяет увеличить энергию частицы, попадающей и потом выходящей из эргосферы.

В данной работе мы обращаем вниманием на отсутствие в квантовых уравнениях для частиц разных спинов экстремальных признаков существования эргосферы с граничными поверхностями $r = \left(r_{\pm}\right)_{erg}$. Наоборот, во всех квантовых уравнениях явно обнаруживается наличие горизонтов собы-

* vpneznamov@vniief.ru
vpneznamov@mail.ru

тий $(r_\pm)_K$, заметно влияющих на движение квантовых частиц.

Отсюда следует, что для «законности» классического процесса Пенроуза необходимо его получение в квантовой теории.

Это заключение не относится к прецессии Lense – Thirring [4] и к процессу увлечения инерциальных систем отсчета (frame – dragging), поскольку эти эффекты в ОТО присущи всем вращающимся объектам, в том числе не содержащим эргосферы.

Данная работа организована следующим образом. В разделе 2 для связности изложения представлена метрика Керра с горизонтами событий и эргосферой. В разделе 3 в пространстве-времени Керра приведены квантово-механические уравнения для бесспиновых частиц $(S=0)$, для фотонов $(S=1)$ и фермионов $(S=1/2)$. В разделе 4 обсуждаются полученные результаты. В Заключении формулируются основные выводы работы.

В работе, как правило, используется система единиц $\hbar = c = 1$; сигнатура метрики пространства Минковского выбрана равной

$$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}[1,-1,-1,-1]. \tag{3}$$

2. Метрика Керра

Метрику Керра в координатах Бойера–Линдквиста $(\mathrm{t}, r, \theta, \varphi)$ [5] можно представить в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0 r}{r_K^2}\right)dt^2 + \frac{2ar_0 r}{r_K^2}\sin^2\theta dt d\varphi - \frac{r_K^2}{\Delta_K}dr^2 - \\ - r_K^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 r_0 r}{r_K^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta d\varphi^2, \tag{4}$$

где

$$r_K^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta;\ \Delta_K = r^2 f_K = r^2\left(1 - \frac{r_0}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right);$$

$r_0 = 2GM/c^2$ – гравитационный радиус Шварцшильда; c – скорость света.

В метрике (4) $g_{00} = 0$ при условии

$$r^2 - r_0 r + a^2\cos^2\theta = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) определяет радиусы граничных поверхностей эргосферы $(r_\pm)_{erg}$.

1. Если $r_0 > 2a$, то

$$f_K = \left(1 - \frac{(r_+)_K}{r}\right)\left(1 - \frac{(r_-)_K}{r}\right), \tag{6}$$

где $(r_\pm)_K$ – радиусы внешнего и внутреннего горизонтов событий метрики Керра.

2. Случай $r_0 = 2a,\ (r_+)_K = (r_-)_K = r_0/2$ соответствует экстремальному полю Керра.

3. Случай $r_0 < 2a$ соответствует голой сингулярности поля Керра. В этом случае $f_K > 0$.

3. Квантовые уравнения для частиц с различными спинами в пространстве-времени Керра

Поскольку уравнение (5) для граничных поверхностей эргосферы описывает двумерную поверхность, выпишем квантовые уравнения до разделения переменных (r, θ).

3.1. Уравнение Клейна–Гордона для бесспиновых частиц $(S=0)$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma\left(g^{\sigma\tau}\sqrt{-g}\partial_\tau\right) + \mu^2\right]\Psi = 0, \tag{7}$$

где $g = -r_K^4\sin^2\theta$ – детерминант метрики Керра, μ – масса частицы. Если $\Psi(r,\theta,\varphi,t) = \Phi(r,\theta)e^{-i\omega t}e^{im\varphi}$, то уравнение (7) имеет вид [6]

$$\left\{\frac{1}{\Delta_K}\left[\Delta_K a^2\sin^2\theta - \left(r^2+a^2\right)^2\right]\omega^2 - \frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta_K\frac{\partial}{\partial r}\right) - \right. \\ - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{m^2}{\Delta_K\sin^2\theta}\left(r^2 - r_0 r + a^2\cos^2\theta\right) - \\ \left. - \frac{2a}{\Delta_K}\left[\Delta_K - \left(r^2+a^2\right)\right]m\omega + r_K^2\mu^2\right\}\Phi(r,\theta) = 0. \tag{8}$$

3.2. Уравнения Максвелла для фотонов $(S=1)$

Уравнения Максвелла выпишем в виде, изложенном в монографии Чандрасекара [7]. Уравнения представляют собой систему четырех уравнений для трех скалярных функций. Скалярные функции связаны с компонентами тензора электромагнитного поля F_{ij}, свернутыми с тетрадой Киннерсли (l^i, n^i, m^i) [8] в формализме Ньюмена–Пенроуза [9]. Итак,

$$\varphi_0 = F_{ij} l^i m^j;\ \varphi_1 = \frac{1}{2} F_{ij} \left(l^i n^j + \overline{m}^i m^j \right);\ \varphi_2 = F_{ij} \overline{m}^i n^j. \tag{9}$$

После переобозначений $\Phi_0 = \varphi_0;\ \Phi_1 = \varphi_1 \overline{\rho}^* \sqrt{2};\ \ \Phi_2 = 2\varphi_2 \left(\overline{\rho}^*\right)^2$, где $\overline{\rho} = r + ia\cos\theta;\ \overline{\rho}^* = r - ia\cos\theta$, представим Φ_0, Φ_1, Φ_2 в виде

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \Phi_0\left(r,\theta\right) e^{-i\omega t} e^{im\varphi}, \\ \Phi_1 &= \Phi_1\left(r,\theta\right) e^{-i\omega t} e^{im\varphi}, \\ \Phi_2 &= \Phi_2\left(r,\theta\right) e^{-i\omega t} e^{im\varphi}. \end{aligned} \tag{10}$$

В результате получим следующую систему уравнений (см. [7], гл. 8, уравнения (13)–(16)):

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - a\omega\sin\theta + \frac{m}{\sin\theta} + \mathrm{ctg}\theta - \frac{ia\sin\theta}{\overline{\rho}^*} \right) \Phi_0\left(r,\theta\right) = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{iK}{\Delta_K} + \frac{1}{\overline{\rho}^*} \right) \Phi_1\left(r,\theta\right), \\
&\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - a\omega\sin\theta + \frac{m}{\sin\theta} + \frac{ia\sin\theta}{\overline{\rho}^*} \right) \Phi_1\left(r,\theta\right) = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{iK}{\Delta_K} - \frac{1}{\overline{\rho}^*} \right) \Phi_2\left(r,\theta\right), \\
&\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + a\omega\sin\theta - \frac{m}{\sin\theta} + \mathrm{ctg}\theta - \frac{ia\sin\theta}{\overline{\rho}^*} \right) \Phi_2\left(r,\theta\right) = -\Delta_K \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{iK}{\Delta_K} + \frac{1}{\overline{\rho}^*} \right) \Phi_1\left(r,\theta\right), \\
&\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + a\omega\sin\theta - \frac{m}{\sin\theta} + \frac{ia\sin\theta}{\overline{\rho}^*} \right) \Phi_1\left(r,\theta\right) = -\Delta_K \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{iK}{\Delta_K} + \frac{2r - r_0}{\Delta_K} - \frac{1}{\overline{\rho}^*} \right) \Phi_0\left(r,\theta\right),
\end{aligned} \tag{11}$$

где $K = -\left(r^2 + a^2\right)\omega + am.$

3.3. Уравнения для фермионов $\left(S = 1/2\right)$

Вначале для нашего анализа мы привлечем уравнение Дирака для компонент биспинорной функции, полученное Чандрасекаром (см. [10], уравнения (21) – (24)):

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{iK}{\Delta_K} + \frac{1}{\overline{\rho}^*} \right) F_1 + \frac{1}{\overline{\rho}^* \sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} - a\omega\sin\theta + \frac{m}{\sin\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta \right) F_2 = i\mu G_1, \\
&\frac{\Delta_K}{2\rho_K^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{iK}{\Delta_K} + \frac{\left(r - r_0/2\right)}{\Delta_K} \right) F_2 - \frac{1}{\overline{\rho}\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + a\omega\sin\theta - \frac{m}{\sin\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta + \frac{ia\sin\theta}{\overline{\rho}^*} \right) F_1 = -i\mu G_2, \\
&\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{iK}{\Delta_K} + \frac{1}{\overline{\rho}} \right) G_2 - \frac{1}{\overline{\rho}\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + a\omega\sin\theta - \frac{m}{\sin\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta \right) G_1 = i\mu F_2, \\
&\frac{\Delta_K}{2\rho_K^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{iK}{\Delta_K} + \frac{\left(r - r_0/2\right)}{\Delta_K} \right) G_1 + \frac{1}{\overline{\rho}^* \sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} - a\omega\sin\theta + \frac{m}{\sin\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta - \frac{ia\sin\theta}{\overline{\rho}} \right) G_2 = -i\mu F_1.
\end{aligned} \tag{12}$$

В (12) μ – масса фермиона. При получении (12) предполагалось, что волновая функция $\sim e^{-i\omega t + im\varphi}$.

Для дискуссии в разделе 4 мы будем привлекать уравнение Дирака с самосопряженным гамильтонианом в поле Керра, полученным в [11, 12]. Кроме того, мы будем обсуждать самосопряженные уравнения для фермионов в поле Керра со спинорными волновыми функциями [13, 14].

4. Дискуссия

Анализируя вид уравнений (8), (11), (12), а также уравнения в [11–14], можно отметить следующее:

1. Во всех уравнениях для частиц с разными спинами явно присутствует величина

$$\Delta_K = r^2 f_K = \left(r - \left(r_+\right)_K\right)\left(r - \left(r_-\right)_K\right).$$

Наличие Δ_K приводит к сингулярностям на горизонтах событий с присутствием режима квантово-механического «падения» частиц на соответствующий горизонт [15].

2. В уравнениях Максвелла для фотонов (11), в уравнении Дирака для фермионов (12), а также в уравнениях для фермионов в [11–14] отсутствуют уравнения (5) для граничных поверхностей эргосферы. Эти уравнения присутствуют лишь в уравнении Клейна–Гордона (8) для скалярных частиц. Слагаемое с левой стороной уравнения (5) имеет вид без сингулярностей на границах эргосферы

$$\frac{m^2}{\Delta_K \sin^2\theta}\left(r^2 - r_0 r + a^2\cos^2\theta\right). \qquad (13)$$

Напомним, что $m = -j, -j+1 \ldots j,$ где j – квантовое число полного углового момента. При достижении внешнего радиуса эргосферы $(r_+)_{erg}$ слагаемое (13) зануляется и далее меняет знак.

3. Мы видим, что существование эргосферы в метрике Керра не проявляет себя значимым образом в квантовых уравнениях для частиц различных спинов. В связи с этим процесс Пенроуза представляется недостаточно обоснованным. В рамках существующей парадигмы первоначально должно быть доказано и обосновано существование процесса Пенроуза в рамках квантовой теории. Затем после перехода к квазиклассическому и классическому пределу с $\hbar \to 0$ должны быть получены классические результаты авторов работ [2, 3].

Аналогичное рассмотрение может быть проведено для эргосфер других метрик с вращением, в частности, например, для эргосферы заряженной метрики Керра–Ньюмена.

5. Заключение

Существование эргосферы метрики Керра значимо не проявляет себя в квантовых уравнениях для частиц различных спинов.

Для легитимизации процесса Пенроуза с извлечением энергии из эргосферы необходимо обоснование и доказательство его существования в рамках последовательной квантовой теории.

Автор благодарит А. Л. Новоселову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

Список литературы

1. Kerr R. P. // Phys. Rev. Lett. 1963. Vol. **11**. P. 237–238.
2. Penrose R. Rivista del Nuovo Cimento, Serie I, 1, Numero Speciale: 252-276 (1969).
3. Penrose R., Floyd R. M. // Nature Phys. Sci. 1971. Vol. **229**. P. 177–179.
4. Lense J., Thirring H. // Physikalische Zeitschrift. 1918. Vol. **19**. P. 156–163.
5. Boyer R. H., Lindquist R. W. // J. Math. Phys. 1967. Vol. **8**. P. 265–281.
6. Bezerra V. B., Vieira H. S. and Costa A. // Class. Quantum. Grav. 2014. Vol. 31. P. 045003, arxiv: 1312.4823v1 (gr-qc).
7. Chandrasekhar S. The mathematical theory of black holes. Clarendon Press Oxford, Oxford University Press, New York (1983).
8. Kinnersley W. // J. Math. Phys. 1969. Vol. **10**. P. 1195.
9. Newman E. T., Penrose R. // J. Math. Phys. 1962. Vol. **3**. P. 566.
10. Chandrasekhar S. // Proc. Roy. Soc. London Ser. 1976. Vol. A **349**. P. 571–575.
11. Горбатенко М. В., Незнамов В. П. // J. Mod. Phys. 2015. Vol. **6**. P. 303–326, arxiv: 1107.0844 (gr-qc, hep-th).
12. Горбатенко М. В., Незнамов В. П. // Ann. Phys. (Berlin). 2014. Vol. **526**. No. 11–12. P. 491–498, arxiv: 1402.6639 (gr-qc).
13. Незнамов В. П. // ТМФ. 2018. Т. **197**. С. 493–509.
14. Незнамов В. П., Шемарулин В. Е. // Grav. Cosmol. 2018. Vol. **24**. C. 129–138, arxiv: 1806.03835 (gr-qc, hep-th).
15. Gorbatenko M. V. and Neznamov V. P. // Int. J. Mod. Phys. A **35**, 2040013 (2020); Errata, Int. J. Mod. Phys. Vol. A **35**, 2092001 (2020); arxiv: 2003.11354 (physics.gen-ph); М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика, 2019. Вып. 2. С. 22, 47, 57.

Статья поступила в редакцию 18.06.2020