

ТРЕХМЕРНАЯ МЕТОДИКА РАСЧЕТА ГЕНЕРАЦИИ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕРХШИРОКОПОЛОСНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИМПУЛЬСА В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ИЗЛУЧАТЕЛЕ

Е. С. Столмакова, И. В. Долженков

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров Нижегородской обл.

Введение

Для излучения мощных сверхширокополосных (СШП) электромагнитных импульсов (ЭМИ) используются в основном два типа излучателей, основанных на традиционных технологиях, в которых источники импульсного напряжения сопряжены с решетками рупорных антенн [1] и антеннами с параболическим рефлектором [2]. В настоящее время создается параболический излучатель, работа которого основана на новой технологии генерации СШП ЭМИ, использующей принцип излучения сверхсветовых источников. Метод вычисления характеристик полей для такого типа излучателя описан в [3].

Кроме этого, представляет практический интерес исследование генератора ЭМИ, имеющего форму эллипсоида вращения. Эта конструкция обладает рядом преимуществ по сравнению с излучателями, имеющими параболические формы:

а) фокусировка СШП излучения в локальной области вблизи фокуса, что необходимо в ряде применений генераторов, прежде всего в медицинских целях;

б) пространственная конфигурация излучения на выходе, соответствующая точечному источнику, что оптимально для получения направленного излучения при использовании фокусирующей антенной системы;

в) возможность каналирования СШП ЭМИ для использования в конструкциях с большой площадью поверхности (большой электрической емкостью) и сравнительно небольшой выходной апертурой, что важно для решения технологических проблем создания образцов.

Целью данной работы является описание численной методики расчета характеристик ЭМИ, излучаемого эллиптическим источником. Методика основана на численном интегрировании однородных уравнений Максвелла с поверхностными источниками в эллиптических координатах с использованием метода покоординатного расщепления.

Приведен пример численного расчета тестовой задачи, имеющей аналитическое решение.

Постановка задачи и исходные уравнения

Для получения решения в заданной области необходимо решить трехмерную систему уравнений

Максвелла, записанную в эллиптических координатах (v, u, φ) [4]:

$$\frac{\partial E_v}{\partial t} = \frac{1}{h_u \sqrt{1-u^2}} \frac{\partial (H_\varphi \sqrt{1-u^2})}{\partial u} - \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial H_u}{\partial \varphi}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_u}{\partial t} = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial H_v}{\partial \varphi} - \frac{1}{h_v \sqrt{v^2-1}} \frac{\partial (H_\varphi \sqrt{v^2-1})}{\partial v}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{h_v \sqrt{v^2-u^2}} \frac{\partial (H_u \sqrt{v^2-u^2})}{\partial v} - \frac{1}{h_u \sqrt{v^2-u^2}} \frac{\partial (H_v \sqrt{v^2-u^2})}{\partial u}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial H_v}{\partial t} = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial E_u}{\partial \varphi} - \frac{1}{h_u \sqrt{1-u^2}} \frac{\partial (E_\varphi \sqrt{1-u^2})}{\partial u}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial H_u}{\partial t} = \frac{1}{h_v \sqrt{v^2-1}} \frac{\partial (E_\varphi \sqrt{v^2-1})}{\partial v} - \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial E_v}{\partial \varphi}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{h_u \sqrt{v^2-u^2}} \frac{\partial (E_v \sqrt{v^2-u^2})}{\partial u} - \frac{1}{h_v \sqrt{v^2-u^2}} \frac{\partial (E_u \sqrt{v^2-u^2})}{\partial v}. \quad (6)$$

Здесь E_u , E_v и E_φ – компоненты напряженности электрического поля, H_u , H_v , H_φ – магнитного, $h_v =$

$$= a \sqrt{\frac{v^2-u^2}{v^2-1}}, \quad h_u = a \sqrt{\frac{v^2-u^2}{1-u^2}}, \quad h_\varphi = a \sqrt{(v^2-1)(1-u^2)} -$$

коэффициенты Ламе. Используется система единиц, в которой скорость света $c = 1$.

В этой системе координат φ – угол вращения относительно оси симметрии вытянутого эллипсоида; область изменения переменных v, u, φ определяется неравенствами:

$$1 \leq v \leq v_{\max}, \quad -1 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

где v_{\max} – граница расчетной области.

Координатные поверхности $v = const$, $u = const$ представляют собой вытянутые эллипсоиды вращения и двухполостные гиперboloиды вращения, соответственно. В декартовой системе координат в разрезе плоскостью $y = 0$ эта область представляет собой систему софокусных эллипсов и гипербол с фокусами F , F' (рис. 1).

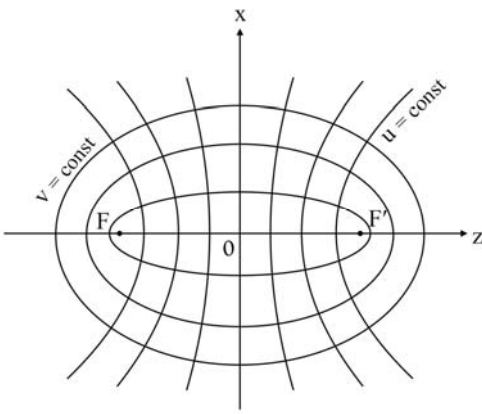


Рис. 1. Ортогональная система софокусных эллипсов и гипербол с фокусами F и F'

Таким образом, сечение области плоскостью ($y = 0$), в которой требуется найти решение уравнений (1) – (6), в декартовой системе координат имеет вид, показанный на рис. 2. На этом рисунке жирной линией обозначен контур эллиптического источника излучения, имеющего размеры, соответствующие координатам v_s и u_s .

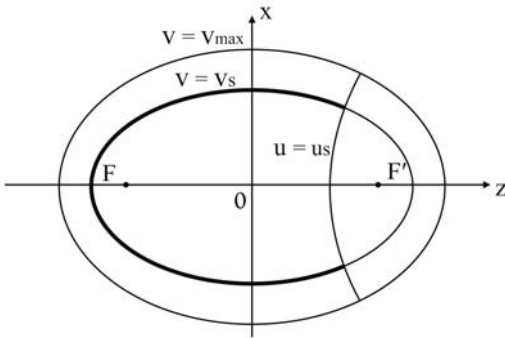


Рис. 2. Геометрия задачи в декартовых координатах (разрез плоскостью $y = 0$)

В плоскости (v, u) границы расчетной области будут иметь вид, показанный на рис. 3.

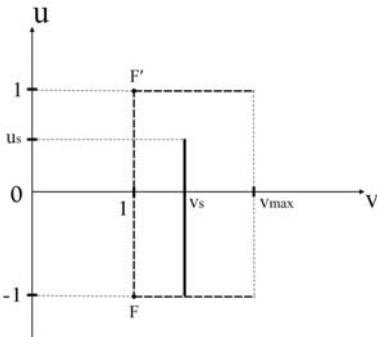


Рис. 3. Геометрия задачи в эллиптических координатах в плоскости (v, u)

Жирная линия на этом рисунке соответствует контуру поверхности эллиптического источника, а пунктирная обозначает ось симметрии, которой соответствуют следующие значения координат:

$$\begin{cases} v = 1, & -1 \leq u \leq 1, \\ u = \pm 1, & 1 \leq v \leq v_{\max}. \end{cases}$$

При решении системы уравнений (1) – (6) ее необходимо дополнить начальными и граничными условиями.

В начальный момент времени $t = 0$ все компоненты E_α, H_α ($\alpha = v, u, \varphi$) равны нулю.

Граничные условия следующие:

– на границе области $v = v_{\max}$, $-1 \leq u \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ задаются условия излучения вида

$$E_u - H_\varphi = 0, \quad E_\varphi + H_u = 0;$$

– на внутренней поверхности эллиптического излучателя $v = v_s$, $-1 \leq u \leq u_s$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ задаются эффективные граничные условия для тангенциальных компонент электрического поля [5]:

$$E_{eff} \ell = -4\pi \frac{\partial}{\partial \ell} P(t, \vec{r}),$$

где $P = P(t, \vec{r})$ – функция источника.

– на внешней поверхности эллиптического излучателя $v = v_s + h$, $-1 \leq u \leq u_s$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (h – толщина излучателя) тангенциальные компоненты электрического поля полагаются равными нулю:

$$E_\tau = 0;$$

– на оси симметрии предполагается ограниченность всех компонент полей.

Описание метода численного решения

Для нахождения численного решения в расчетной области строится сетка узлов $\Omega = \omega_v \times \omega_u \times \omega_\varphi$, где $\omega_v = (v_1 = 1, v_2, \dots, v_{Nv} = v_{\max})$, $\omega_u = (u_1 = -1, u_2, \dots, u_{Nu} = 1)$, $\omega_\varphi = (\varphi_1 = 0, \dots, \varphi_{N\varphi} = 2\pi)$.

Сеточные аналоги величин размещаются на построенной сетке так, как изображено на рис. 4.

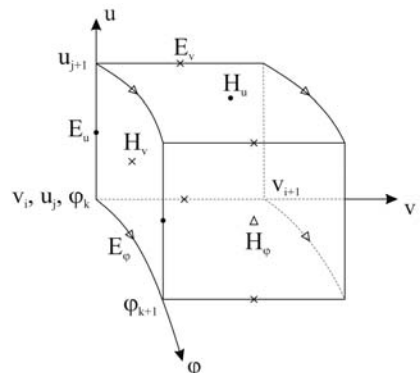


Рис. 4. Расположение сеточных величин

При получении пространственной дискретизации исходные дифференциальные уравнения интегрировались по площади грани соответствующего шестигранника, в качестве которого выбиралась ячейка сетки Ω , показанная на рис. 4. Проинтегрировав уравнение (4) по площади грани $v = v_i$ (введя для нее обозначение $S_{u\varphi}^{(H)}$), можно получить:

$$\iint_{S_{u\varphi}^{(H)}} \frac{dH_v}{dt} dS_{u\varphi} =$$

$$= \iint_{S_{u\varphi}^{(H)}} \left(\frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_u - \frac{1}{h_u \sqrt{1-u^2}} \frac{\partial}{\partial u} E_\varphi \sqrt{1-u^2} \right) dS_{u\varphi}.$$

Интеграл в левой части вычисляется по квадратной формуле вида

$$\iint_{S_{u\varphi}^{(H)}} \frac{dH_v}{dt} dS_{u\varphi} \approx \frac{dH_{v_i, j+1/2, k+1/2}}{dt} S_{u\varphi}^{(H)},$$

интеграл в правой части можно вычислить, применив формулу Грина,

$$\iint_{S_{u\varphi}^{(H)}} \left(\frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_u - \frac{1}{h_u \sqrt{1-u^2}} \frac{\partial}{\partial u} E_\varphi \sqrt{1-u^2} \right) dS_{u\varphi} =$$

$$= \oint_L h_u E_u du + h_\varphi E_\varphi d\varphi,$$

где через L обозначен контур грани $v = v_i$. Используя при вычислении контурного интеграла квадратурные формулы средних, учитывая, что обход контура производится против часовой стрелки, можно получить

$$\oint_L h_u E_u du + h_\varphi E_\varphi d\varphi =$$

$$= E_{\varphi_{i, j+1, k+1/2}} a \sqrt{(v_i^2 - 1)(1 - u_{j+1}^2)} (\varphi_k - \varphi_{k+1}) +$$

$$+ E_{u_{i, j+1/2, k}} a \sqrt{\frac{v_i^2 - u_{j+1/2}^2}{1 - u_{j+1/2}^2}} (u_j - u_{j+1}) +$$

$$+ E_{\varphi_{i, j, k+1/2}} a \sqrt{(v_i^2 - 1)(1 - u_j^2)} (\varphi_{k+1} - \varphi_k) +$$

$$+ E_{u_{i, j+1/2, k+1}} a \sqrt{\frac{v_i^2 - u_{j+1/2}^2}{1 - u_{j+1/2}^2}} (u_{j+1} - u_j) =$$

$$= a \sqrt{\frac{v_i^2 - u_{j+1/2}^2}{1 - u_{j+1/2}^2}} \Delta u_{j+1/2} (E_{u_{i, j+1/2, k+1}} - E_{u_{i, j+1/2, k}}) -$$

$$- a \sqrt{(v_i^2 - 1)} \Delta \varphi_{k+1/2} \left(E_{\varphi_{i, j+1, k+1/2}} \sqrt{1 - u_{j+1}^2} - \right.$$

$$\left. - E_{\varphi_{i, j, k+1/2}} \sqrt{1 - u_j^2} \right),$$

где $\Delta \varphi_{k+1/2} = \varphi_{k+1} - \varphi_k$, $\Delta u_{j+1/2} = u_{j+1} - u_j$.

При вычислении $S_{u\varphi}$ также используются квадратурные формулы средних:

$$S_{u\varphi}^{(H)} = \int_{u_j}^{u_{j+1}} du \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} d\varphi h_u h_\varphi = \Delta \varphi_{k+1/2} \int_{u_j}^{u_{j+1}} h_u h_\varphi du =$$

$$= \Delta \varphi_{k+1/2} \Delta u_{j+1/2} a^2 \sqrt{(v_i^2 - u_{j+1/2}^2)} (v_i^2 - 1)$$

Если собрать воедино полученные результаты, можно получить следующую аппроксимацию уравнения (4):

$$\frac{dH_{v_i, j+1/2, k+1/2}}{dt} =$$

$$= \frac{1}{\Delta \varphi_{k+1/2} a \sqrt{(v_i^2 - 1)} (1 - u_{j+1/2}^2)} \times$$

$$\times (E_{u_{i, j+1/2, k+1}} - E_{u_{i, j+1/2, k}}) -$$

$$- \frac{1}{\Delta u_{j+1/2} a \sqrt{(v_i^2 - u_{j+1/2}^2)}} \times$$

$$\times (E_{\varphi_{i, j+1, k+1/2}} \sqrt{1 - u_{j+1}^2} - E_{\varphi_{i, j, k+1/2}} \sqrt{1 - u_j^2})$$

Формулу (4) можно записать в более компактном виде:

$$\frac{dH_{v_i, j+1/2, k+1/2}}{dt} =$$

$$= b_{i, j+1/2}^{(H)} \frac{E_{u_{i, j+1/2, k+1}} - E_{u_{i, j+1/2, k}}}{\Delta \varphi_{k+1/2}} -$$

$$- a_{i, j+1/2}^{(H)} \frac{E_{\varphi_{i, j+1, k+1/2}} \sqrt{1 - u_{j+1}^2} - E_{\varphi_{i, j, k+1/2}} \sqrt{1 - u_j^2}}{\Delta u_{j+1/2}},$$

где

$$a_{i, j+1/2}^{(H)} = \frac{1}{a \sqrt{(v_i^2 - u_{j+1/2}^2)}},$$

$$b_{i, j+1/2}^{(H)} = \frac{1}{a \sqrt{(v_i^2 - 1)} (1 - u_{j+1/2}^2)}.$$

Эти формулы справедливы для всех ячеек сетки Ω , чьи грани не попадают на внутренние границы счетной области, либо ребра не попадают на ось z . Аналогичным образом аппроксимируются остальные уравнения (1)–(3), (5), (6).

Наиболее сложным в данной задаче является вопрос о граничных условиях на оси симметрии эллипсоида. Единственными компонентами, определенными в узлах на оси z и не зависящими от φ являются E_u при $v=1$, $-1 \leq u \leq 1$ (участок оси z при $-F \leq z \leq F$) и E_v при $u=-1$, $v \geq 1$ (участок оси z при $z \leq -F$) и при $u=1$, $v \geq 1$ (участок оси z при $z \geq F$).

Рассмотрим вывод граничных условий на мере компоненты E_u [6]. Для этого нужно умножить уравнение (2) на $dS_{v\varphi}$ и проинтегрировать результирующее соотношение по v, φ в пределах $1 \leq v \leq v_m$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, где v_m – некоторое заданное значение, $v_m \leq v_{3/2}$:

$$\int_1^{v_m} \int_0^{2\pi} a^2 \sqrt{v^2 - u^2} \sqrt{1 - u^2} \frac{\partial E_u}{\partial t} dv d\varphi =$$

$$= - \int_1^{v_m} dv \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial v} a \sqrt{v^2 - 1} \sqrt{1 - u^2} H_\varphi d\varphi.$$

Отсюда можно получить (при малых v_m) следующее соотношение:

$$a \cdot 2\pi \frac{\partial}{\partial t} E_u(v=1, u, t) \int_1^{v_m} \sqrt{v^2 - u^2} dv \approx$$

$$\approx - \sqrt{v_m^2 - 1} \int_0^{2\pi} H_\varphi(v=v_m, u, \varphi, t) d\varphi.$$

Таким образом, производная по t от E_u в узлах на оси z зависит от интеграла по φ от значений H_φ на некотором контуре, охватывающем ось z . При использовании полученной формулы в разностных уравнениях интегралы по φ заменяются на квадратурные формулы.

При построении разностной аппроксимации по времени t для полученных уравнений используется метод покоординатного расщепления [7]. Согласно этому методу, решение осуществляется в три этапа: на первом этапе учитываются изменения функций по переменной φ , на втором – по u , на третьем – по v .

Для решения уравнений используются безусловно устойчивые разностные схемы с весами α, β ($1/2 \leq \alpha \leq 1, \beta = 1 - \alpha$). Например, уравнения для E_u, H_v при учете изменения этих функций по переменной φ в разностном виде будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{E_{u i, j+1/2, k}^{n+1/3} - E_{u i, j+1/2, k}^n}{\tau} =$$

$$= b_{i, j+1/2}^{(E)} \frac{H_{v i, j+1/2, k+1/2}^n - H_{v i, j+1/2, k-1/2}^n}{\Delta\varphi_k},$$

$$\frac{H_{v i, j+1/2, k+1/2}^{n+1/3} - H_{v i, j+1/2, k+1/2}^n}{\tau} =$$

$$= b_{i, j+1/2}^{(H)} \frac{E_{u i, j+1/2, k+1}^n - E_{u i, j+1/2, k}^n}{\Delta\varphi_{k+1/2}},$$

где

$$b_{i, j+1/2}^{(E)} = \frac{1}{a \sqrt{(v_i^2 - 1)(1 - u_{j+1/2}^2)}},$$

$$b_{i, j+1/2}^{(H)} = \frac{1}{a \sqrt{(v_i^2 - 1)(1 - u_{j+1/2}^2)}},$$

$\Delta\varphi_k = \varphi_{k+1/2} - \varphi_{k-1/2}$, $\Delta\varphi_{k+1/2} = \varphi_{k+1} - \varphi_k$, $\Delta\varphi_1 = 2(\varphi_{3/2} - \varphi_1)$, $1 \leq k \leq N_\varphi - 1$, $2 \leq i \leq N_v$, $1 \leq j \leq N_u - 1$, величины в правых частях определяются по формулам

$$H_v = \alpha H_v^{n+1/3} + \beta H_v^n, \quad E_u = \alpha E_u^{n+1/3} + \beta E_u^n.$$

Для решения уравнений на каждом этапе строятся одномерные прогонки (на этапе переноса по φ – циклические прогонки). Вычисленные значения компонент на предыдущих этапах становятся начальными данными для решения уравнений на последующем этапе. При численной реализации граничных условий используются разностные налоги уравнений, записанных для проинтегрированных по углу φ компонент E_u, E_v и E_φ .

Результаты расчетов тестовой задачи

По изложенной в предыдущем разделе численной методике были проведены расчеты по исследованию зависимости погрешности численного решения от значений весовых параметров α, β и размеров шагов $\Delta t, \Delta u, \Delta v$ пространственно-временной сетки.

Для тестирования разработанной численной методики используем задачу, имеющую аналитическое решение. Поскольку СШП ЭМИ имеет вид сходящейся к F' волны со сферическим фронтом, используем решение для дипольного излучения, но в виде сходящейся волны. Источники электромагнитного поля задаются в виде условия на поверхности эллипсоида

$$E_u(v=v_s) = \frac{\sqrt{1-u^2}}{F^3 \sqrt{v_s^2 - u^2}} \left\{ \frac{2v_s}{r} \left(-\frac{g}{r} + F\dot{g} \right) + \frac{v_s^2 - 1}{r^2} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{3g}{r^2} - \frac{3F\dot{g}}{r} + F^2\ddot{g} \right) \right\},$$

где $r = v_s - u$, $g(\tau) = \begin{cases} \tau^3 e^{-\alpha\tau}, & \tau > 0 \\ 0, & \tau \leq 0 \end{cases}$, $\tau = t - F(1+u)$.

В таблице приведены значения основных параметров задачи.

Значения основных параметров задачи

Область решения по u	$-1 \leq u \leq 1$
Область решения по v	$1 \leq v \leq 1,7$
Область решения по φ	$0 \leq \varphi \leq 2\pi$
Границы эллипсоида	$u_s = 0,7; v_s = 1,34$
Параметры эллипсоида	$D = 20, F = 15,8$

На рис. 5 представлены результаты расчетов, проведенных с целью выбора наиболее подходящего шага по времени. Были выполнены 3 расчета при фиксированном шаге по пространству $\Delta z = 0,05$ ($\Delta u = \Delta v = \frac{\Delta z}{F}$): $\Delta t = 0,1$; $\Delta t = 0,05$; $\Delta t = 0,02$.

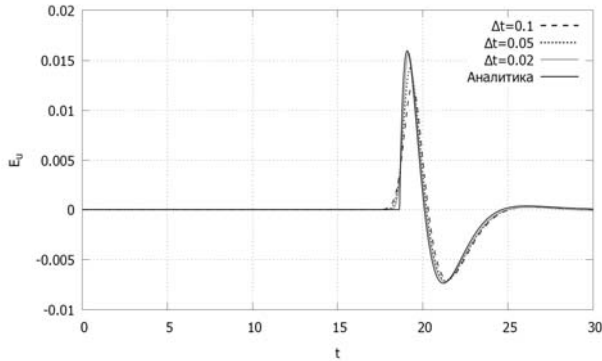


Рис. 5. Зависимость E_u от t в точке $v = 1,17$, $u = 0$

Из рис. 5 видно, что с уменьшением шага по времени численное решение сходится к аналитическому, и при расчете с шагом $\Delta t = 0,02$ получается наилучшее согласие результатов. Во второй серии расчетов (рис. 6) при $\Delta t = 0,02$ варьировались шаги по пространству ($\Delta z = 0,1$; $\Delta z = 0,05$; $\Delta z = 0,02$). Было проведено 3 расчета, результаты которых сравнивались с аналитическим решением для компоненты E_u .

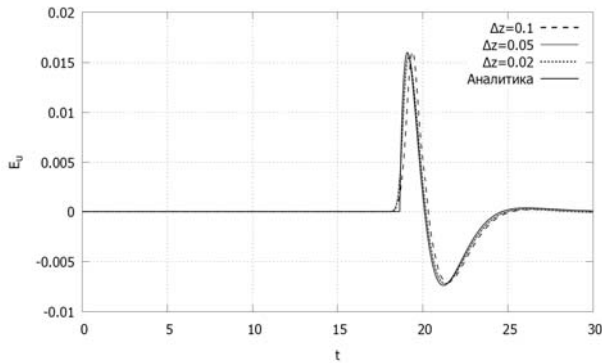


Рис. 6. Зависимость E_u от t в точке $v = 1,17$, $u = 0$

Видно, что во всех трех вариантах получено хорошее согласие результатов расчетов как между собой, так с аналитическим решением, поэтому для дальнейших расчетов можно рекомендовать шаги по пространству $\Delta u = \Delta v = \frac{\Delta z}{F} = \frac{0,05}{F}$.

Помимо пространственно-временных шагов в разностной схеме присутствует параметр неясности α , который также может оказать влияние на результаты. Было также проведено 3 расчета: 1-ый по

центрированной схеме $\alpha = 1/2$, 2-ой – α определяется по формуле $\alpha = \frac{1}{2} \left(e^{-\gamma \left(\frac{v^2}{\Delta v^2} + \frac{u^2}{\Delta u^2} \right)} + 1 \right)$ с $\gamma = 0,01$,

$\Delta v = \Delta u = 0,1$ и 3-ий по полностью неявной схеме с $\alpha = 1$. На рис. 7 представлены временные зависимости компоненты электрического поля E_u для вариантов расчетов с разными способами задания параметра α . Как можно видеть из этого рисунка, численное решение, получаемое по центрированной и чисто неявной схемам, обладает слишком низкой точностью, поэтому для дальнейших расчетов рекомендуется использовать вариант задания коэффициента α в виде зависящей от координат функции, значения которой меняются в пределах $\{0,5;1\}$.

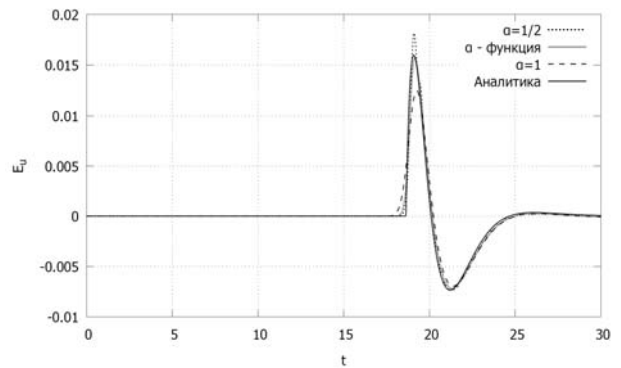


Рис. 7. Зависимость E_u от t в точке $v = 1,17$, $u = 0$

Для иллюстрации процесса распространения излучения в эллипсоиде на рис. 8 представлено пространственно-временное распределение плотности энергии на разные моменты времени.

Заключение

Сформулирована постановка задачи для численного моделирования генерации и распространения СШП ЭМИ в эллиптическом излучателе. Изложен метод и алгоритм решения поставленной задачи, основанный на интегрировании однородных уравнений Максвелла в эллиптических координатах с использованием метода покоординатного расщепления. Источники электромагнитного поля задавались в виде эффективных граничных условий на внутренней поверхности излучателя. Для определения граничных условий на оси симметрии эллипсоида решалась система уравнений Максвелла для проинтегрированных по углу компонент полей.

Представлено сравнение результатов расчетов тестовой задачи с аналитическим решением; определены счетные параметры, гарантирующие хорошую точность в расчетах.

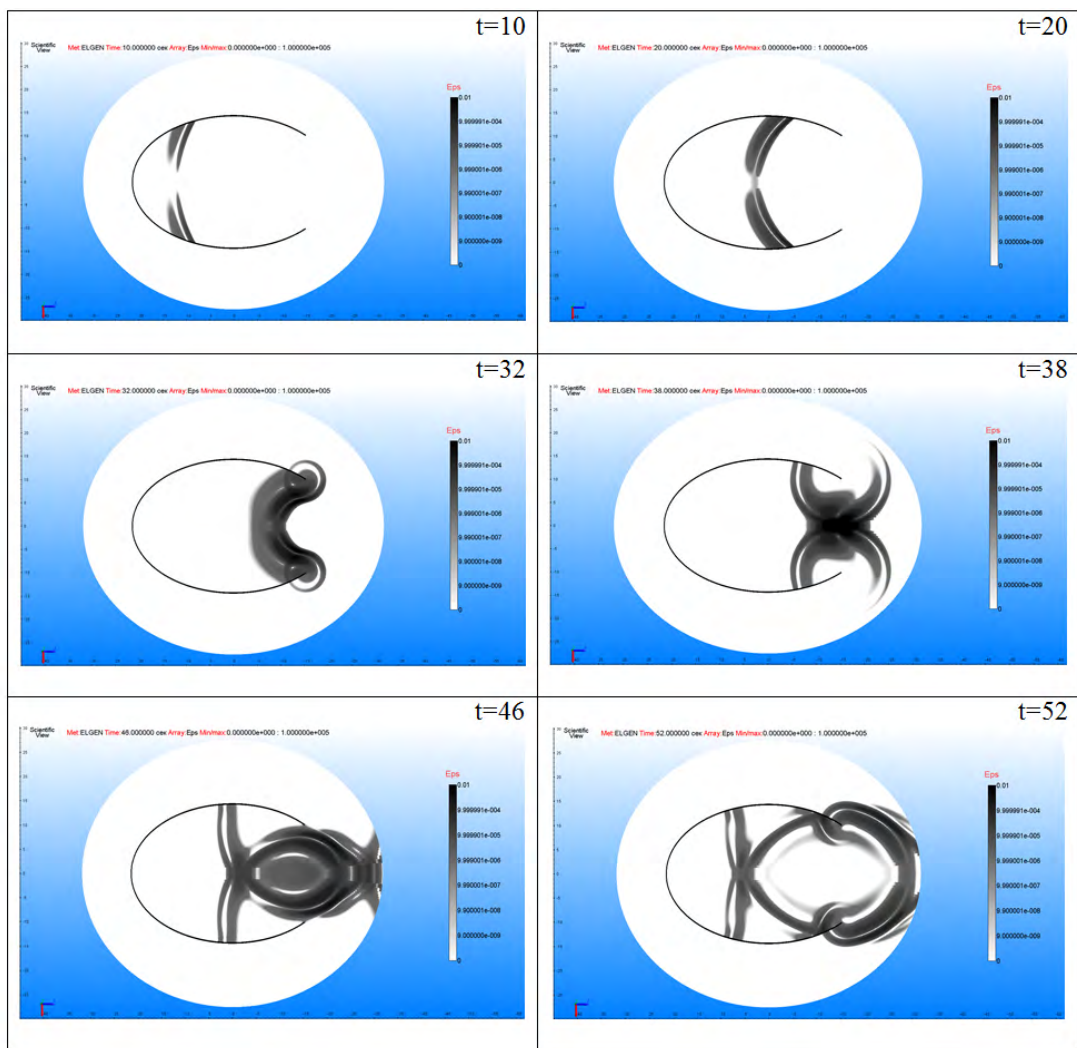


Рис. 8. Пространственно-временное распределение плотности энергии на разные моменты времени

Литература

1. Месяц Г. А., Яландин М. И. Пикосекундная электроника больших мощностей // Успехи физических наук. 2005. Т. 175, № 3. С. 225.
2. Giri D. V. High-Power Electromagnetic Radiators. Harvard University Press, Cambridge-London, 2004.
3. Голубев А. И., Долженков И. В., Солдатов А. В. Разностный метод вычисления распределения электромагнитного поля в полости параболического излучателя // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. 2008. Вып. 3. С. 3–18.

4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970.
5. Солдатов А. В. Эффективные граничные условия для задач электродинамики с приповерхностными источниками // Доклады академии наук. 2007. Т. 413, № 5. С. 1–4.
6. Holland R. THREDS: A Finite-Difference Time-Domain EMP Code in 3D-Spherical Coordinates // IEEE Trans. Nucl. Sci., 1983. Vol. NS-30, N. 6. P. 4592–4595.
7. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.