

ПАКЕТ ПРОГРАММ ЛОГОС-ПРОЧНОСТЬ. ВЕРИФИКАЦИЯ МОДУЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МОДАЛЬНОГО АНАЛИЗА

З. Д. Трунова, С. С. Косарим, В. А. Юносова

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров Нижегородской обл.

Введение

Пакет программ (ПП) ЛОГОС-Прочность предназначен для решения двумерных и трехмерных задач анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) и прочности конструкций при динамических, статических и вибрационных нагрузках [1, 2].

ПП ЛОГОС-Прочность находится в постоянном развитии, ежегодно пополняясь новыми возможностями, поэтому необходимо проводить его тестирование на регулярной основе.

Одним из расчетных модулей, входящих в состав ПП ЛОГОС-Прочность, является модуль решения задач модального анализа, который позволяет получать собственные частоты и соответствующие им собственные формы колебаний конструкций.

Вычисление собственных частот и соответствующих им форм колебаний является важной составной частью расчетных исследований динамического отклика конструкций на действие вибрационных нагрузок.

В некоторых случаях расчет собственных частот и форм колебаний конструкций необходимо проводить с учетом действующих на них статических нагрузок, вызывающих начальное напряженно-деформируемое состояние (НДС). Появление значительного уровня напряжений в конструкциях в следствии действия статических нагрузок может приводить к существенному изменению величин собственных частот конструкций.

Система уравнений для получения собственных частот и соответствующих форм колебаний конструкций, полученная с использованием метода конечных элементов, имеет следующий вид:

$$\left([K] + [K_g] - \omega_j^2 [M] \right) \{ \varphi_j \} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

$[K]$ – матрица жесткости системы ($n \times n$);

$[K_g]$ – геометрическая матрица жесткости системы ($n \times n$) (учет предварительного НДС);

$[M]$ – матрица масс системы ($n \times n$);

$[\omega_j]$ – j -я частота собственных колебаний конструкции;

$\{ \varphi_j \}$ – j -й собственный вектор системы (форма колебаний), соответствующий собственной частоте ω_j ;

n – количество степеней свободы конечно-элементной модели.

Для данной системы уравнений решается неполная проблема собственных значений. Как правило, ищутся собственные частоты с наименьшими значениями.

Текущая реализация модуля решения задач модального анализа в ПП ЛОГОС-Прочность имеет следующие особенности:

- обеспечивается поддержка работы как с закрепленными, так и с незакрепленными моделями;
- используются только линейные упругие материалы. Поддерживаются изотропный, ортотропный и анизотропный варианты материалов;
- в 2017–2018 годах появилась поддержка оболочечных и балочных конечных элементов;
- в 2017–2018 годах появилась возможность учета контактного взаимодействия для определения пятна контакта.

Для оценки работоспособности и точности получаемого решения при использовании рассматриваемого модуля проведена работа по решению набора из 18 верификационных задач. Выбранные задачи имеют либо точное аналитическое решение, либо данные экспериментального исследования.

Для исследования сходимости результатов, получаемых при численном решении задач, генерировалось по три последовательно сгущающихся конечно-элементных сетки (КЭС). Также, проводилось исследование влияния типа используемого конечного элемента на точность получаемого решения. Использовались, как объемные, так и балочные и оболочечные конечные элементы.

Теперь перейдем к рассмотрению части решенных задач.

Задача 1. Свободные частоты колебаний прямоугольной пластины, шарнирно опертой по контуру

Геометрия задачи представлена на рис. 1.

Пластина размером $a_x = 1$ [м], $a_y = 0,6$ [м] и толщиной $h = 0,04$ [м] шарнирно оперта по контуру.

Расчет проводился с использованием модели упруго-изотропного материала.

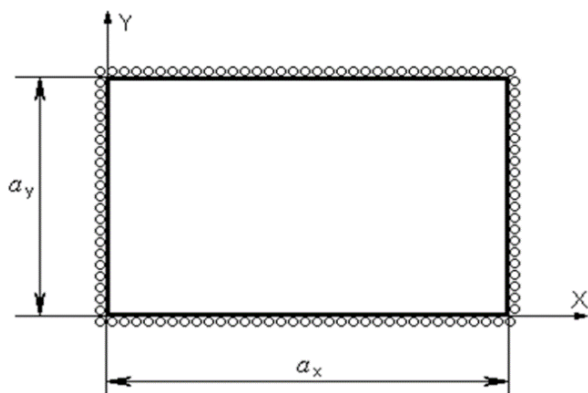


Рис. 1. Геометрия задачи

При проведении расчета использовались следующие типы конечных элементов (КЭ):

- 8-узловые шестигранные объемные КЭ;
- 20-узловые шестигранные объемные КЭ;
- оболочечные КЭ.

Также, использовались три вида последовательно сгущающихся КЭС:

- 50×30 ячеек;
- 75×45 ячеек;
- 100×60 ячеек.

В задаче вычислялось три собственных частоты колебаний пластины.

Рассмотрим аналитическое решение данной задачи. Собственные частоты колебаний прямоугольной пластины вычисляются по формуле [3]:

$$\omega_{n,m} = \pi^2 \cdot \left[\left(\frac{n}{a_x} \right)^2 + \left(\frac{m}{a_y} \right)^2 \right] \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho \cdot h}}, \quad (2)$$

где n, m – количество полуволн соответственно в направлении осей OX и OY ;

$D = \frac{E \cdot h^2}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$ – цилиндрическая жесткость;

ρ – плотность материала пластины;

E – модуль упругости;

μ – коэффициент Пуассона.

На рис. 2 представлены полученные формы колебаний для трех собственных частот: рис. 2а – первая форма колебаний для собственной частоты $\omega = 354,413$, рис. 2б – вторая форма колебаний для собственной частоты $\omega = 628,438$, рис. 2в – третья форма колебаний для собственной частоты $\omega = 1085,152$.

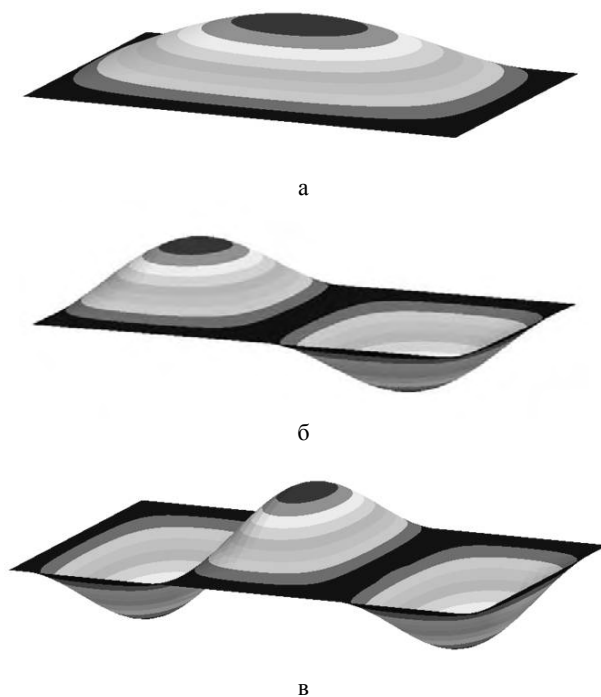


Рис. 2 Формы колебаний пластины: а – 1-ая форма колебаний б – 2-ая форма колебаний, в – 3-я форма колебаний,

На рис. 3 представлены графики зависимости первой собственной частоты от характерного размера ячейки для различных типов КЭ, $\omega_{\text{аналит.1}} = 363,72$.

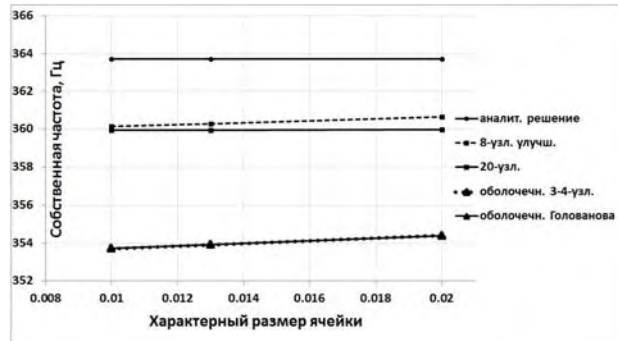


Рис. 3. Графики зависимости 1-ой собственной частоты от характерного размера ячейки для различных типов КЭ

Наилучшую точность показали 8-узловые шестигранные объемные КЭ. Наибольшая погрешность с использованием этих КЭ получена на сетке с размером 100×60 ячеек, и составила 0,98 % по отношению к аналитическому решению.

Наибольшая погрешность по отношению к аналитическому решению получена при проведении расчетов с использованием оболочечных КЭ на сетке с размером 100×60 ячеек. Она составила 2,75 %, что удовлетворяет требованиям при проведении расчетов. Таким образом, получено хорошее качественное и количественное согласование по частотам и формам собственных колебаний с аналитическим решением.

Задача 2. Свободные частоты колебаний балки постоянного прямоугольного поперечного сечения, закрепленной одним торцом

Геометрия задачи представлена на рис. 4.

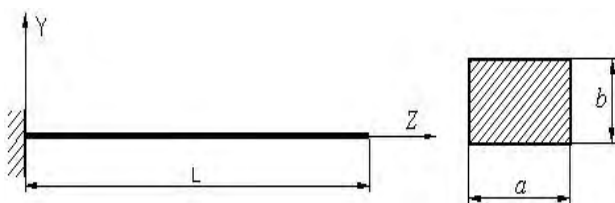


Рис. 4. Геометрия задачи

Балка длиной $L = 1$ [м], с высотой поперечного сечения $a = 0,1$ [мм] и шириной поперечного сечения $b = 0,05$ [м] закреплена одним торцом. Расчет проводился с использованием модели упругого изотропного материала.

При расчете использовались различные типы конечных элементов:

- 8-узловые шестигранные объемные КЭ;
- 20-узловые шестигранные объемные КЭ;
- оболочечные КЭ;
- балочные КЭ.

Также, использовались три вида последовательно сгущающихся КЭС:

- $100 \times 2 \times 2$ ячеек;
- $200 \times 3 \times 3$ ячеек;
- $300 \times 4 \times 4$ ячеек.

В задаче вычислялось три собственных частоты колебаний балки.

Рассмотрим аналитическое решение данной задачи.

Собственные частоты колебаний балки постоянного прямоугольного поперечного сечения, закрепленной одним торцом, вычисляются по формуле [4]:

$$\omega_k = \lambda_k^2 \cdot \sqrt{\frac{EI_{x,y}}{\rho F_x L^4}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

где $\lambda_1 = 1,875$, $\lambda_2 = 4,694$, $\lambda_k = \frac{2k-1}{2} \cdot \pi$;

E – модуль упругости;

$I_{x,y}$ – момент инерции поперечного сечения I_x или I_y ;

ρ – плотность материала балки;

F_x – площадь поперечного сечения балки.

На рис. 5 представлены графики зависимости второй собственной частоты от характерного размера ячейки для различных типов КЭ, $\omega_{\text{аналит.2}} = 81,79$.

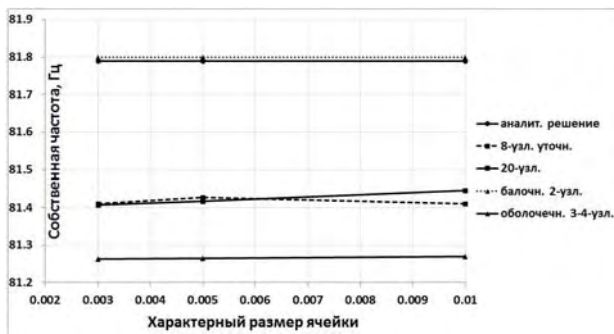


Рис. 5. Графики зависимости 2-ой собственной частоты от характерного размера ячейки для различных типов КЭ

Наилучшую точность показали балочные конечные элементы, практически 100 % совпадение с аналитическим решением. Наибольшая погрешность при расчетах с этими элементами составила 0,01 %.

Наибольшая погрешность по отношению к аналитическому решению получена при проведении расчетов с использованием оболочечных КЭ на сетке с размером $300 \times 4 \times 4$ ячеек. Она составила 0,65 %, что удовлетворяет требованиям при проведении расчетов. Таким образом, получено хорошее качественное и количественное согласование по собственным частотам колебаний с аналитическим решением.

Задача 3. Расчет основных собственных частот колебаний консольно-закрепленной балки постоянного поперечного сечения при действии осевой сжимающей силы

Геометрия задачи представлена на рис. 6.

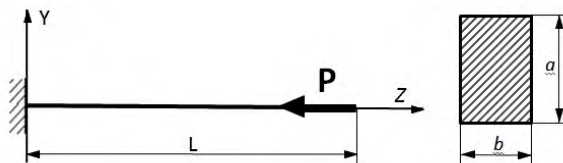


Рис. 6. Геометрия задачи

Балка длиной $L = 0,508$ [м], с высотой поперечного сечения $a = 0,0508$ [м] и шириной поперечного сечения $b = 0,0254$ [м] закреплена одним торцом. Расчет проводился с использованием модели упругого изотропного материала.

При расчете использовались различные типы конечных элементов:

- 8-узловые шестигранные объемные КЭ;
- 20-узловые шестигранные объемные КЭ;
- оболочечные КЭ;
- балочные КЭ.

Также, использовались три вида последовательно сгущающихся КЭС:

- $40 \times 4 \times 2$ ячеек;

- $80 \times 8 \times 4$ ячеек;
- $160 \times 16 \times 4$ ячеек.

В задаче вычислялось три собственных частоты колебаний балки.

Рассмотрим аналитическое решение данной задачи.

Собственные частоты колебаний консольно-закрепленной балки постоянного поперечного сечения при действии осевой сжимающей силы вычисляются по формуле [5, 6]:

$$f_i = f_i^0 \sqrt{1 - \frac{5PL^2}{14EI_{X,Y}}} \quad (4)$$

где f_0 – i -ая собственная частота колебаний без учета нагружения;

P – осевая сжимающая сила; E – модуль упругости;

$I_{X,Y}$ – момент инерции поперечного сечения I_X или I_Y .

На рис. 7 представлены графики зависимости третьей собственной частоты от характерного размера для различных типов КЭ, $\omega_{\text{аналит.3}} = 474,26$.

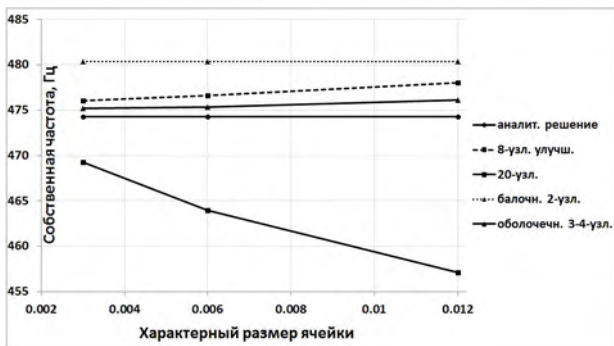


Рис. 7. Графики зависимости 3-ей собственной частоты от характерного размера ячейки для различных типов КЭ

Хорошую точность показали оболочечные КЭ и 8-узловые шестигранные объемные КЭ. Наибольшая погрешность по отношению к аналитическому решению при расчетах с этими элементами составила соответственно 0,39 % и 0,8 %.

Наибольшая погрешность по отношению к аналитическому решению получена при проведении расчетов с использованием 20-узловых шестигранных объемных КЭ на сетке с размером $40 \times 4 \times 2$ ячеек. Она составила 3,62 %, что удовлетворяет требованиям при проведении расчетов. Таким образом, получено хорошее качественное и количественное согласование по собственным частотам колебаний с аналитическим решением.

Задача 4. Расчет основных собственных частот колебаний прямоугольной пластины, жестко закрепленной на вращающемся цилиндре, для различных скоростей вращения

Геометрия задачи представлена на рис. 8.

Прямоугольная пластина длиной $L = 0,508$ [м], с высотой поперечного сечения $a = 0,0508$ [мм] и

шириной поперечного сечения закреплена одним торцом на абсолютно жестком цилиндре радиусом $R = 0,15$ [м]. Цилиндр вращается вокруг своей оси. Расчет проводился при следующих значениях скорости вращения системы: 0 рад/с; 157 рад/с; 314 рад/с; 471 рад/с. При расчете использовалась модель упругого изотропного материала.

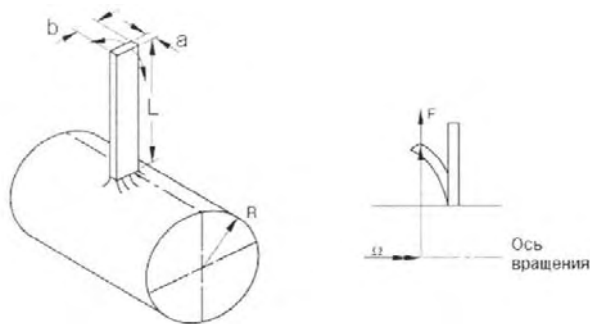


Рис. 8. Геометрия задачи

При расчете использовались различные типы конечных элементов:

- 8-узловые шестигранные объемные КЭ;
- 20-узловые шестигранные объемные КЭ;
- оболочечные КЭ;
- балочные КЭ.

Также, использовались три вида последовательных сгущающихся КЭС:

- $109 \times 9 \times 1$ ячеек;
- $218 \times 18 \times 2$ ячеек;
- $328 \times 28 \times 3$ ячеек.

Аналитическое решение данной задачи представлено в [7].

На рис. 9 представлены графики зависимости первой собственной частоты от характерного размера ячейки для различных типов КЭ при нулевой скорости вращения системы, $\omega_{\text{аналит.1}} = 23,68$.

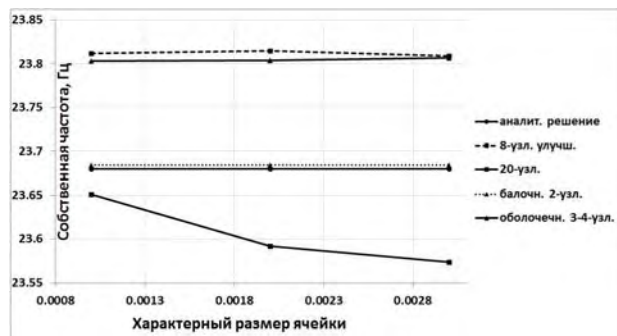


Рис. 9. Графики зависимости 1-ой собственной частоты от характерного размера ячейки для различных типов КЭ

Наилучшую точность показали балочные конечные элементы, практически 100 % совпадение с аналитическим решением. Наибольшая погрешность при расчетах с этими элементами составила 0,02 % по отношению к аналитическому решению.

Наибольшая погрешность по отношению к аналитическому решению получена при проведении расчетов с использованием 8-узловых шестигранных объемных КЭ на сетке с размером $218 \times 18 \times 2$ ячеек. Она составила 0,57 %, что удовлетворяет требованиям при проведении расчетов. Таким образом, получено хорошее качественное и количественное согласование по собственным частотам колебаний с аналитическим решением.

Заключение

Проведена работа по верификации текущего состояния модуля решения задач модального анализа ПП ЛОГОС-Прочность на наборе задач, имеющих или точное аналитическое решение, или данные экспериментального исследования. Для расчетов использовались конечно-элементные сетки различной размерности с различными типами конечных элементов.

Сравнение результатов, полученных при расчетах в ПП ЛОГОС-Прочность показало, что отклонение от аналитического решения и от экспериментальных данных не превысило 5 %, что удовлетворяет требованиям расчетчиков.

Таким образом, можно сделать вывод о возможности применимости ПП ЛОГОС-Прочность к решению задач модального анализа.

Литература

1. Циберев К. В., Авдеев П. А., Александрова О. Л., Артемова Е. О. и др. Обзор возможностей

моделирования задач прочности с использованием пакета программ ЛОГОС / XV международный семинар «Супервычисления и математическое моделирование» // Материалы семинара. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2014.

2. Александрова О. Л., Барабанов Р. А., Дьянов Д. Ю., Косарим С. С., Наумов А. О., Спиридонов В. Ф., Филимонкин Е. А., Циберев К. В. Пакет программ ЛОГОС. Конечно-элементная методика расчета задач статической прочности конструкций с учетом эффектов физической и геометрической нелинейности // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. 2014. Т. 3. С. 3–17.

3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник. Под ред. Биргера И. А. и Пановко Я. Г. М.: Машиностроение, 1968. Т. 3.

4. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999.

5. Воробьев Ю. С., Шепель А. И., Романенко Л. Г., Водченко В. Н., Сапелькина В. Конечно-элементный анализ собственных колебаний статически напряженных лопаток турбомашин // Проблемы прочности. 1990. № 7. С. 88–94.

6. Timoshenko S. Vibration Problems in Engineering // D. Van Nostrand Company. Inc. New York, 2nd. 1937.

7. Lindberg B. Berechnung der ersten Eigenfrequenzen eines Balkens in Fliehkraftfeld mit Rayleigh Quotient // Internal report HTGE-ST-0051, Brown Boveri & Cie. Baden, Switzerland, 1986.