

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПРОТОННОГО ПУЧКА В УСКОРЯЮЩИХ СТРУКТУРАХ С ПРОСТРАНСТВЕННО-ОДНОРОДНОЙ КВАДРУПОЛЬНОЙ ФОКУСИРОВКОЙ

*А. С. Борисков, Л. Е. Поляков, А. А. Брехова*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров Нижегородской обл.

В РФЯЦ-ВНИИЭФ ведутся работы по созданию синхротронного комплекса, который состоит из основного синхротрон, бустера и линейных ускорителей, которые используются в качестве инжекторов для бустера. В начальной части линейного ускорителя основной задачей является захват как можно большего числа частиц в режим ускорения. Как известно, для обеспечения высокого коэффициента захвата в режим ускорения необходимо применение систем, эффективных при малой начальной скорости частиц. Именно этим требованиям отвечают ускоряющие структуры с пространственно-однородной квадрупольной фокусировкой (ПОКФ, международное название Radio Frequency Quadrupole, RFQ), где частицы группируются и ускоряются от нескольких десятков кэВ до нескольких МэВ и затем инжектируются в основную часть ускорителя.

В работе приведены результаты расчетов динамических параметров протонного пучка резонансно-го ускорителя протонов в структуре с ПОКФ [1].

Предложенная физико-математическая модель описывает поведение пучка на этапах формирования, транспортировки и ускорения. Ускорительный тракт разделен на 3 части: согласователь, группирователь и ускоряющий участок. Предложенная физико-математическая модель позволяет описывать процесс ускорения протонов в канале ускоряющей структуры с ПОКФ начиная с момента эмиссии и до вывода заряженных частиц в следующую стадию ускорения. В рассмотренной модели рассчитана динамика протонов в электромагнитных полях ускоряющего резонатора. Так же были определены следующие параметры протонного пучка: фазовый портрет, разброс по энергиям, максимальный ток в сгустке и т. д.

## Введение

Одна из основных областей применения линейных резонансных ускорителей ионов – это использование их в качестве инжекторов ионных синхротронов, которые играют значимую роль в проведении фундаментальных исследований, ядерной медицине, испытании на радиационную стойкость электронно-компонентной базы и т. д.

В начальной части ускорения линейных ускорителей ионов на сегодняшний день чаще всего применяется ускоряющая структура с ПОКФ. Этот тип

ускоряющей структуры стал известен и начал широко использоваться с 1970 г., когда Капчинский И. М. и Тепляков В. А. опубликовали статью «Линейный ускоритель ионов с пространственно-однородной жесткой фокусировкой» [2]. В дальнейшем ускоряющие структуры этого типа начали широко внедряться в лабораториях, где имелись в наличии или создавались новые линейные ускорители протонов и тяжелых ионов. Такой успех был вызван неординарными особенностями структуры ПОКФ [3]:

1. Радиальная устойчивость пучка в процессе ускорения поддерживается высокочастотными полями, создающими пространственно-однородный фокусирующий квадрупольный эффект вдоль канала структуры. Поэтому фокусирующая сила не зависит от скорости ионов. Это дает возможность значительно снизить энергию инжекции и соответственно упростить высоковольтное оборудование инжектора.

2. Модуляция полюсов электродов позволяет создать продольное электрическое поле, обеспечивающее одновременное ускорение, группировку и фокусировку пучка, чего нет ни в одном другом типе ускорителей.

3. Закон изменения синхронной фазы и глубины модуляции электродов вдоль ускоряющей структуры позволяет захватить в процесс ускорения сгустки с первоначальной фазовой протяженностью  $360^\circ$  при начальной синхронной фазе  $-90^\circ$ .

4. По мере ускорения происходит фазовая группировка при сохранении постоянных геометрических размеров. При этом сохраняется средний ток пучка. Пиковый ток сгустка при начальной энергии близок к среднему, так что максимальное значение среднего тока, несмотря на низкую энергию инжекции, оказывается высоким.

5. Применяемые модификации ускоряющих структур для ПОКФ позволяют значительно увеличить рабочую длину волны, что, в свою очередь, способствует увеличению предельного тока пучка, величина которого пропорциональна квадрату длины волны. Фактор увеличения рабочей длины волны особенно важен при создании линейных ускорителей тяжелых ионов, учитывая, что скорость ионов с большим отношением массового числа к зарядовому сравнительно невелика.

В данной работе рассматривается динамика пучка заряженных частиц. С использованием кода С++ была реализована физико-математическая мо-

дель движения пучка протонов в ускоряющей структуре с ПОКФ. На первом этапе была рассчитана динамика для одночастичной модели. Далее был выполнен расчет с учетом эффекта пространственного заряда.

### Принцип работы ускорителя с пространственно-однородной квадрупольной фокусировкой

На рис.1 изображена квадрупольная система фокусирующих электродов однородная вдоль оси ускорителя. Величина  $2U_a$  есть амплитудное значение напряжения между смежными электродами. В процессе ускорения частиц к электродам прикладывается высокочастотное напряжение, поэтому частицы последовательно испытывают действие переменных по направлению полей. Это приводит к появлению эффекта квадрупольной фокусировки частиц.

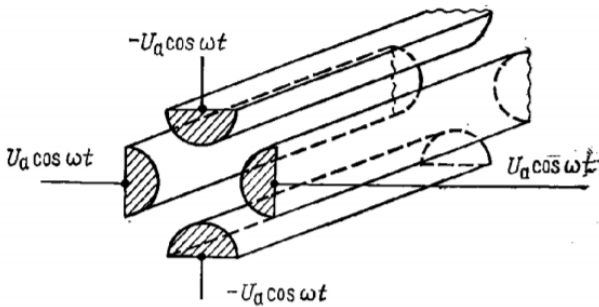


Рис. 1. Четырехпроводная линия с квадрупольной симметрией

Фокусировка пучка ВЧ-линзами тем эффективнее, чем большую часть периода фокусировки занимают электроды с квадрупольной симметрией. В рассматриваемой системе взаимодействие частицы с ВЧ фокусирующим полем происходит непрерывно. Продольная ускоряющая компонента электрического поля создается в том случае, если расстояние между противоположными электродами периодически изменяется. Период изменения расстояния между электродами должен быть равен пути, который частица пролетает за период изменения ВЧ поля  $L = \frac{1}{2}\beta\lambda$  (период ускорения).

На рис.2 приведены возможные варианты резонаторов: двойной Н-резонатор (рис. 2а) и два типа четырехкамерного резонатора (4К-резонатор) (рис. 2б и рис. 2в), а также показаны направления продольного магнитного поля и силовые линии электрического поля в области взаимодействия с пучком; сечения соответствуют точной квадрупольной симметрии [1].

Рассмотрим четырехпроводную квадрупольную линию. В квазистационарном приближении потенциал электрического поля в области взаимодействия с пучком имеет вид [4]:

$$U(r, \psi, z, t) = U_0(r, \psi, z) \cos \omega t. \quad (1)$$

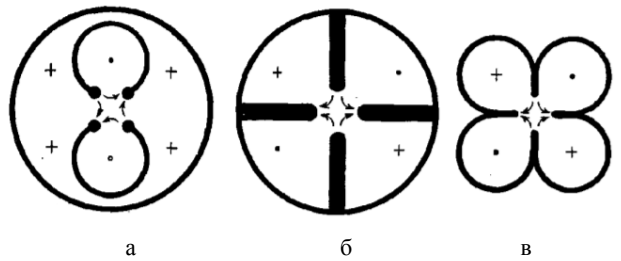


Рис. 2. Поперечные сечения объемных резонаторов для ускоряющих структур с ПОКФ: а – 2Н-резонатор, б – 4К-резонатор, в – 4К-резонатор (клеверный)

В общем виде распределение потенциала внутри квадрупольного канала ускорителя (в цилиндрической системе координат) может быть записано в виде:

$$U(r, \theta, \varphi, t) = \frac{U}{2} \left\{ \sum_l A_{0l} r^{2l} \cos(2l\theta) + \sum_l \sum_n A_{ln} I_{2n}(lkr) \sin(lkz) \right\} \cos \omega t, \quad (2)$$

где  $l + n = p$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$ ,  $U$  – амплитуда разности потенциалов ВЧ поля между соседними электродами,  $k$  – волновое число.

С учетом только низших гармоник ( $p = 0$ ,  $l = 1$ ) выражение упрощается:

$$U(r, \theta, \varphi, t) = \frac{U}{2} \left\{ A_{01} r^2 \cos(2\theta) + A_{10} I_0(kr) \sin(kz) \right\} \cos \omega t. \quad (3)$$

Здесь величины

$$A_{01} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{I_0(k\alpha) + I_0(Mk\alpha)}{M^2 I_0(k\alpha) + I_0(Mk\alpha)},$$

$$A_{10} = \frac{M^2 - 1}{M^2 I_0(k\alpha) + I_0(Mk\alpha)}. \quad (4)$$

называются параметрами фокусировки и ускорения соответственно,  $\alpha$  – апертура канала,  $M$  – параметр модуляции канала ускорителя (отношение максимальной амплитуды канала к минимальной, (рис. 3). В декартовой системе координат выражение для потенциала имеет вид:

$$U(x, y, z, t) = \frac{U}{2} \left\{ A_{01} (x^2 - y^2) + A_{10} I_0 \left( k \sqrt{x^2 + y^2} \right) \sin(kz) \right\} \cos \omega t. \quad (5)$$

Ускорительный тракт разделен на 3 части: согласователь, группирователь и ускоряющий участок. Эффективная фокусировка, группировка и дальнейшее ускорение заряженного пучка выполняется при условии, что соблюдается оптимальная процедура изменения глубины модуляции электродов ( $m$ ), а также величины синхронной фазы сгустков ( $\phi_s$ ) и апертурного канала ( $a$ ).

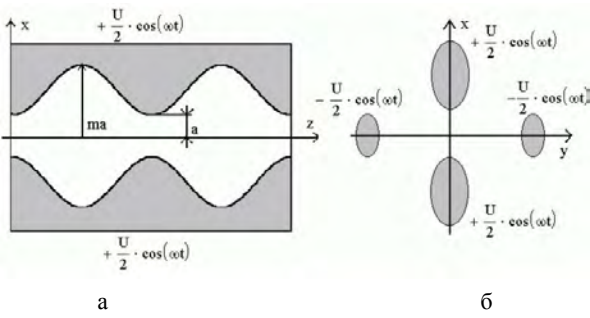


Рис. 3. Сечения канала ускорителя с ПОКФ: а – продольное сечения электродов, б – поперечное сечение электродов

### Численное моделирование динамики ионных пучков

С ростом скорости частиц эффективность системы с ПОКФ уменьшается. Поэтому при ускорении протонов или легких ионов системы с ПОКФ используют при энергии не выше 1–3 МэВ, т. е. пучок можно считать нерелятивистским. В этом случае в уравнении движения достаточно учитывать только электрическую компоненту ВЧ поля:

$$\frac{dp}{dt} = e \cdot E(r, t), \quad (6)$$

где  $e$  и  $m$  – заряд и масса электрона, функция  $E(r, t)$  описывает зависимость напряженности ВЧ поля от координат  $r$  и времени  $t$ ,  $p$  – импульс частицы. Уравнение, описывающее изменение фазы произвольной частицы в процессе ускорения:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega \left( \frac{v_z}{v_s} - 1 \right), \quad (7)$$

где  $v_s$  – скорость синхронной частицы. Исследование динамики пучка заряженных частиц в ускорителях состоит в нахождении значений скоростей и координат всех частиц пучка на любом участке траектории. В линейных ускорителях при моделировании динамики ионного пучка в качестве независимой переменной

удобно использовать продольную координату  $z$ . Таким образом, для продольного и поперечного движений имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dz} &= \frac{e_x}{m} \frac{E_x}{2v_z} \sin \phi, \\ \frac{dv_y}{dz} &= \frac{e_y}{m} \frac{E_y}{2v_z} \sin \phi, \\ \frac{dv_z}{dz} &= \frac{e_z}{m} \frac{E_z}{2v_z} \cos \phi, \\ \frac{dv_s}{dz} &= \frac{e_s}{m} \frac{E_z}{2v_s} \cos \phi_s, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{v_x}{v_z}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{v_y}{v_z}, \quad \frac{dt}{dz} = \frac{1}{v_z}, \quad \frac{d\phi}{dt} = \omega \left( \frac{v_z}{v_s} - 1 \right).$$

В дальнейшем при численном моделировании динамики пучков заряженных частиц удобно ввести безразмерные величины продольных и поперечных координат и скоростей и безразмерное время:

$$\rho = \frac{2\pi}{\lambda} x, \quad \eta = \frac{2\pi}{\lambda} y, \quad \xi = \frac{2\pi}{\lambda} z, \quad \beta_{x,y,z} = \frac{v_{x,y,z}}{c}, \quad \tau = \omega t, \quad (9)$$

где  $e_{x,y,z,s} = \frac{e\lambda E_{x,y,z,s}}{4\pi mc^2}$  – безразмерные амплитуды поля

Система уравнений (5.14) может быть решена, если известны начальные условия:

$$\begin{aligned} \beta_{x,i}(z=0), \beta_{y,i}(z=0), \beta_{z,i}(z=0), \beta_s(z=0), \\ x(z=0), y(z=0), \phi_i(z=0). \end{aligned} \quad (10)$$

### Расчет динамики пучка частиц

#### Одночастотная модель

Для пучка, ускоряемого в ПОКФ, система уравнений в безразмерном виде будет выглядеть так [4]:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_x}{d\xi} &= -\frac{\bar{U}}{2\beta_z} \left\{ 2\overline{A_{01}\rho} + \frac{A_{10}}{\beta_s} I_1 \left( \frac{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}}{\beta_s} \right) \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}} \sin(\phi + \tau) \right\} \cos(\tau), \\ \frac{d\beta_y}{d\xi} &= -\frac{\bar{U}}{2\beta_z} \left\{ -2\overline{A_{01}\eta} + \frac{A_{10}}{\beta_s} I_1 \left( \frac{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}}{\beta_s} \right) \frac{\eta}{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}} \sin(\phi + \tau) \right\} \cos(\tau), \\ \frac{d\beta_z}{d\xi} &= -\frac{\bar{U}A_{10}}{2\beta_z\beta_s} I_0 \left( \frac{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}}{\beta_s} \right) \cos(\phi + \tau) \cos(\tau), \\ d\rho/d\xi &= \beta_x/\beta_z, \quad d\eta/d\xi = \beta_y/\beta_z, \quad d\tau/d\xi = 1/\beta_z, \\ \frac{d\beta_s}{d\xi} &= -\frac{\bar{U}A_{10}}{2\beta_s^2} I_0 \left( \frac{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}}{\beta_s} \right) \cos \phi_s, \quad \frac{d\phi}{d\xi} = \frac{1}{\beta_s} - \frac{1}{\beta_z}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{где } \bar{U} = \frac{eU}{W_0}, \quad \overline{A_{01}} = A_{01} \frac{4\pi^2}{\lambda^2}.$$

Для расчета динамики пучка протонов была написана программа на языке C++ для численного решения системы уравнений (11) методом Рунге–Кутты 4-го порядка. На первом этапе, для упрощения расчетов, был рассмотрен одночастичный случай. Для верификации расчетов было проведено сравнение с данными статьи [6]. В качестве исходных параметров были взяты законы изменения параметра модуляции, синхронной фазы и радиуса апертуры (рис. 4, 5, 6). Длина ускорителя 2,4 метра, начальная энергия протона 47 кэВ, частота ВЧ поля 162 МГц.

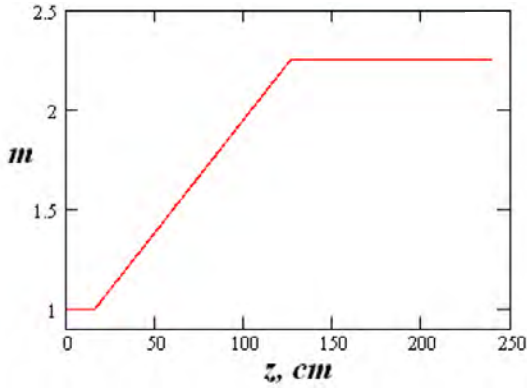


Рис. 4. Изменение параметра модуляции ( $m$ ) вдоль канала ускорителя

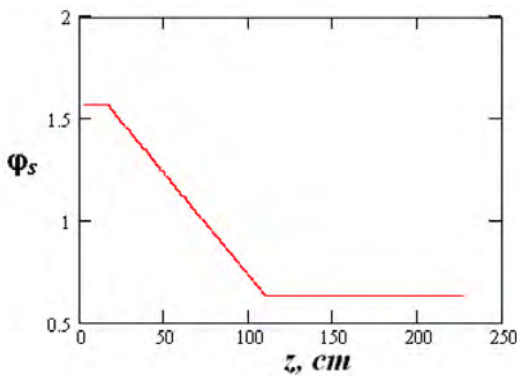


Рис. 5. Изменение равновесной фазы ( $\phi_s$ ) вдоль канала ускорителя

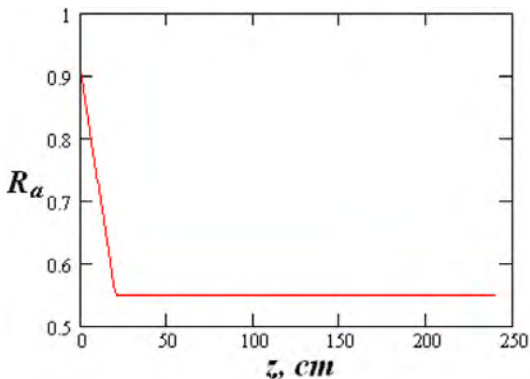


Рис. 6. Изменение радиуса апертуры ( $\alpha$ ) вдоль канала ускорителя

В результате проведения расчетов была рассчитана относительная скорость протона в процессе ус-

корения, а также проведено сравнение с исходными данными, приведенными в [6], путем наложения двух графиков. Результат сравнения представлен на рис. 7.

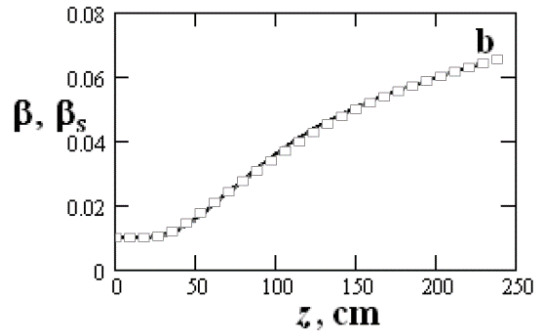


Рис. 7. Сравнение зависимости  $\beta_z$  и  $\beta_s$  от  $z$ : данные из [6] – черная линия, рассчитанные значения – белые квадраты

### Расчет фазового портрета пучка

Для нахождения коэффициента захвата частиц и проверки условия группировки пучка в процессе ускорения был проведен расчет фазового портрета пучка. Для этого последовательно рассчитывалась динамика частиц со сдвигом начальной фазы инжекции на каждом шагу. Всего была рассчитана динамика 200 частиц с фазами инжекции начиная от  $\frac{3}{2}\pi$  до  $-\frac{7}{2}\pi$ . Далее на каждой из четвертей длины ускорителя строится зависимость относительной скорости частицы от ее фазы на данном этапе ускорения. Результаты расчетов представлены на рис. 8.

По результатам расчетов в процесс ускорения захватываются 97 % частиц, что согласуется с данными, приведенными в источнике [6]. Также из рисунка видно, что фазовая протяженность пучка сжимается по мере ускорения, из чего можно сделать вывод о наличии эффекта группировки.

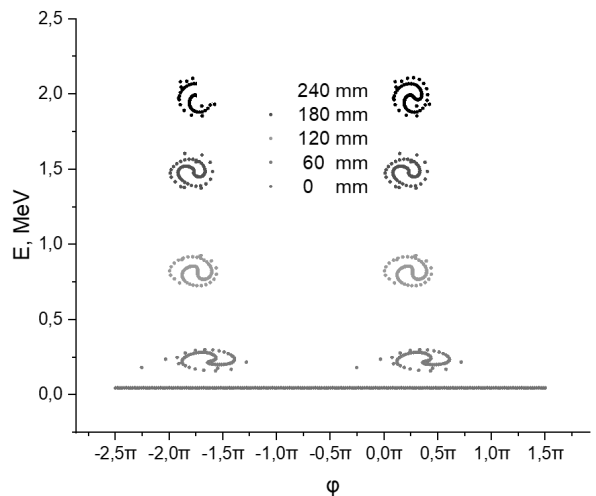


Рис. 8. Фазовый портрет пучка в процессе ускорения

## Метод крупных частиц и моделирование объемного заряда

Следующим этапом было моделирование динамики пучка протонов с учетом сил объемного заряда в нем. Пучок представляется в виде набора сгустков, расположенных на оси структуры. Каждый сгусток представляется  $N$  равномерно заряженными шарами радиуса  $R$  (крупные частицы). Сила, действующая на  $i$ -ую частицу со стороны  $j$ -ой, рассчитывается по формуле [5]:

$$F_{ij} = \begin{cases} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2R)^2} \left( \frac{2R}{r_{ij}} \right)^3 \frac{r_{ij}}{2R} & r_{ij} \geq 2R \\ \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2R)^2} \left[ 2 \left( \frac{2R}{r_{ij}} \right)^3 - 9 \left( \frac{2R}{r_{ij}} \right) + 8 \right] \frac{r_{ij}}{2R} & 0 \leq r_{ij} < 2R \end{cases} \quad (12)$$

Таким образом, суммируя силы для каждой частицы, получаем влияние на нее остальных частиц сгустка

$$F_i = \sum_{ij} F_{ij}. \quad (13)$$

На начальном этапе был смоделирован цилиндр в начале ускорительного тракта, который равномерно был разбит на фиксированное количество ячеек. Внутри каждой ячейки были случайно выбраны координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , которые являлись узлами трехмерной сетки, в которой располагались рассматриваемые крупные частицы. Для модели было задано 2000 крупных частиц. Трехмерная модель исходного пучка представлена на рис. 9.

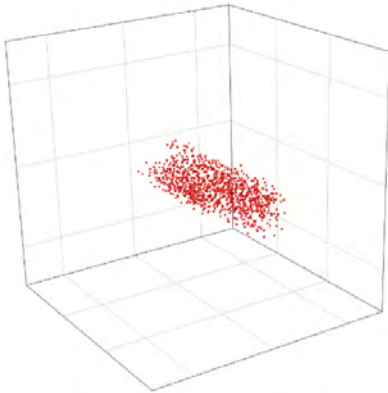


Рис. 9. Трехмерная модель пучка

После заполнения цилиндра для каждой частицы были созданы массивы начальных условий. Для всех частиц была установлена начальная энергия 47 кэВ.

Моделирование динамики пучка подразумевает на каждом шаге интегрирования расчет воздействия на каждую частицу сил со стороны ВЧ поля, а также остальных частиц. Суммируя данные силы по каждой из осей получаем действие результирующей силы.

Таким образом, была рассчитана динамика вдоль всего ускорительного тракта. На рис. 10 при-

ведено сравнение поперечных сечений пучка в начале и конце ускорения. Визуально можно заметить результат действия фокусирующих сил – очевидно, что плотность черных точек в центре превышает плотность белых квадратов.

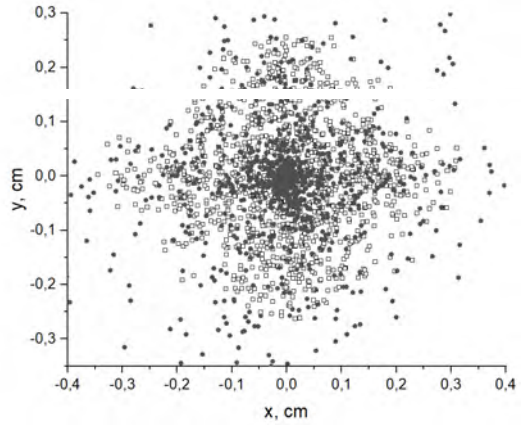


Рис. 10. Поперечное сечение пучка протонов: в начале ускорения – белые квадраты, в конце ускорения – черные точки

На рис. 11 изображено продольное сечение пучка в канале ускорителя. Форма канала была построена по формуле (13) [1]:

$$x = R_0 \left[ 1 + \frac{m-1}{m+1} \sin kz \right], \quad y = R_0 \left[ 1 - \frac{m-1}{m+1} \sin kz \right]. \quad (14)$$

Из рис. 11 видно, пучок разбился на два сгустка, следующих друг за другом на расстоянии, равном периоду структуры, из чего можно сделать предположение о корректном расчете динамики пучка на этапе его группировки.

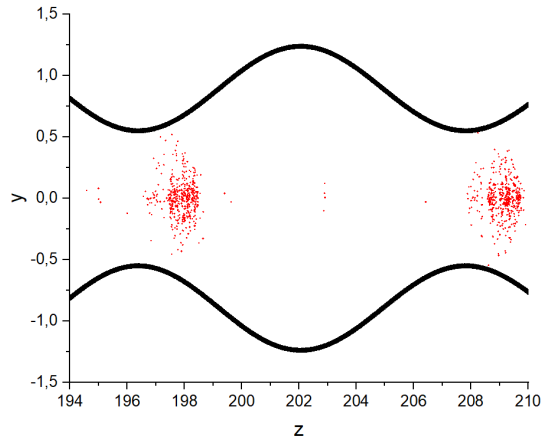


Рис. 11. Продольное сечение пучка в канале ускорителя

## Заключение

В работе представлены результаты численных расчетов динамика пучка протонов в канале ускорителя с ПОКФ. На первом этапе был проведен расчет для одночастичной модели. Полученные значения  $\beta_z$  и  $\beta_s$  были сравнены со значениями, представленными

в материале статьи [6]. В результате сравнения между ними установлено удовлетворительное соответствие, что говорит о корректности выбранной расчетной модели.

Также был рассчитан фазовый портрет пучка на разных этапах ускорения. По результатам расчетов видно, что происходит уменьшение фазовой протяженности протонного пучка с ростом энергии, что свидетельствует о его группировке в процессе ускорения.

Далее был смоделирован пучок протонов, состоящий из 2000 крупных частиц, рассчитана динамика для такого пучка с учетом действия сил объемного заряда. Из проведенных расчетов по предложенной модели можно сделать вывод о том, что при данном количестве крупных частиц учетом вклада сил объемного заряда можно пренебречь.

### Литература

1. Капчинский И. М. Теория линейных резонансных ускорителей: Динамика частиц. М.: Энергоиздат, 1982. С. 130–144.

2. Тепляков В. А., Мальцев А. П. Степанов В. Б. Высокочастотная квадрупольная фокусировка (к истории ее возникновения и развития): Препринт ИФВЭ 2006-5. Протвино, 2006. С. 34.

3. Bomko V. A., Zaitsev B. V, Ivachno E. V. et al. Accelerating Structure with Radio-Frequency Quadrupole, RFQ, for the heavy-ions accelerating // Problems of atomic science and technology. Series: Nuclear Physics Investigations. 2010. № 3. P. 26–30.

4. Масунов Э. С., Полозов С. М. Практикум по курсу «Электрофизические установки и технологии» Ч. 1. Линейные ускорители. Учебное пособие. М.: МИФИ, 2004. С. 42–53.

5. Овсянников Д. А., Свистунов Ю. А. Моделирование и оптимизация пучков заряженных частиц в ускорителях. СПб.: Науч.-исслед. ин-т прикл. химии, 2003. С. 104.

6. Aksentyev A. Y., Polozov S. M. et al. Beam dynamics and accelerating cavity electrostatics' simulation of CW 2 MeV proton RFQ // Proceeding of 5th International Particle Accelerator Conference «IPAC-2014». 2014. P. 3286–3288.