

# РЕАЛИЗАЦИЯ ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТИ ТЕНЗОРНОГО ВИДА В МЕТОДИКЕ МИМОЗА

*А. В. Воеводин, М. Н. Мицура*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров Нижегородской обл.

Методология использования искусственной вязкости была разработана Нейманом и Рихтмайером [1] при расчетах одномерных ударных волн более полвека назад и до сих пор остается удобным и широко применяющимся численным средством. В общем виде вязкость Неймана – Рихтмайера можно записать в следующем виде:

$$q = c_L \rho c_s |\Delta v| + c_Q \rho (\Delta v)^2. \quad (1)$$

Здесь, как обычно,  $c_s$  – скорость звука перед фронтом ударной волны,  $\Delta v$  – скачок скорости на разрыве,  $c_L$ ,  $c_Q$  – соответственно коэффициенты линейной и квадратичной вязкости. Ширина фронта ударной волны при этом всегда зависит от характерного размера ячеек расчетной сетки, что приводит к неизбежным трудностям и ограничениям, особенно при использовании неравномерных счетных сеток. С той поры постоянно продолжаются работы по поиску новых, более совершенных форм искусственной вязкости.

В работе М. Ю. Шашкова [2] приведен алгоритм реализации искусственной вязкости тензорного вида. Преимущество изложенной в этих работах тензорной вязкости состоит в уменьшении зависимости численного решения от структуры сеток. Данный алгоритм был реализован в рамках программы расчета двумерной лагранжевой газодинамики методики МИМОЗА [3]. Ранее данный алгоритм тензорной вязкости был реализован в методике Д [4] и комплексе ЛЭГАК [5]. За основу выражения тензорной вязкости была взята форма В. Ф. Куропатенко [6], которая имеет следующий вид:

$$q_{Kur} = \rho \left\{ c_2 \frac{\gamma+1}{4} |\Delta v| + \sqrt{c_2^2 \left( \frac{\gamma+1}{4} \right)^2 (\Delta v)^2 + c_1^2 c_s^2} \right\} |\Delta v| \quad (2)$$

где  $\Delta v$  – скачок скорости на разрыве,  $c_1 = c_2 = 1$  – безразмерные константы (соответственно, линейные и нелинейные члены искусственной вязкости),  $\gamma$  – отношение удельных теплоемкостей,  $\rho$  и  $c_s$  – плотность и скорость звука в ячейке.

Данное выражение (2) не стремится к нулю при всестороннем сжатии. Первое решение этой проблемы заключается в использовании тензорной формы, которая имеет сходство с физической вязкостью

жидкости; второе решение заключается в формулировке TVD-ограничителя простой адвекции Кристиансена [7].

## Реализация алгоритма тензорной вязкости

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, которая используется в методике МИМОЗА для описания движения сплошной среды:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} &= \text{div} \vec{U} \\ \rho \frac{d\vec{U}}{dt} &= -\text{grad} P + \text{div} S \\ \frac{dE}{dt} &= -P \frac{\rho}{dt} + \frac{1}{\rho} \text{Sp}(S \cdot D) \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{U} \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\rho$  – плотность вещества,  $\vec{U}$  – вектор скорости,  $P$  – давление,  $S$  – девиатор тензора напряжений,  $E$  – внутренняя энергия,  $D$  – тензор скоростей деформаций,  $\text{Sp}(S \cdot D)$  – первый инвариант,  $\vec{r}$  – радиус-вектор.

Система дифференциальных уравнений (3) замыкается уравнением состояния (4).

$$P = P(\rho, E) \quad (4)$$

В работе [2] вводится искусственная вязкость на основе дискретного приближения непрерывной функции  $Q$  тензорного вида, которая есть произведение скалярного коэффициента на тензор скоростей деформаций

$$Q = \mu D \quad (5)$$

В скалярный множитель входит вязкий член в форме Куропатенко [6] и функция-ограничитель, которая используется для отключения действия вязкости при безударном сжатии и вращении как твердого тела.

Тензорная искусственная вязкость входит в уравнения газовой динамики следующим образом



Такой набор весовых множителей дает первый порядок аппроксимации дискретного скалярного произведения тензоров в ячейке.

Далее в формулы для вязких сил вместо произвольного тензора  $T$  будем подставлять проекцию вязкого тензора  $\mu G$ .

### Вычисление функций-ограничителей

Вычисление функций-ограничителей производится для каждого ребра счетной сетки. На рис. 2 приведен шаблон для вычисления ограничителя на ребре  $\left(k + \frac{1}{2}, i\right)$ .

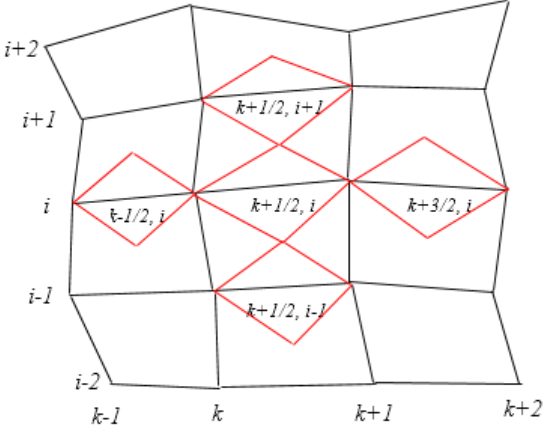


Рис. 2. Шаблон для вычисления функции-ограничителя

Закрашенные области назовем «реберными» ячейками. Во всех закрашенных «реберных» ячейках вычисляется дивергенция скорости по стандартной формуле. Например, для «реберной» ячейки  $\left(k + \frac{1}{2}, i\right)$  дивергенция скорости имеет вид:

$$\begin{aligned} & (\operatorname{div} \bar{u})_{k+\frac{1}{2}, i} = \\ & = \frac{1}{2V_{k+\frac{1}{2}, i}} \left\{ \left( u_{x_{k+1, i}} - u_{x_{k, i}} \right) \times \left[ y_{k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - y_{k+\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}} \right] - \right. \\ & - \left[ u_{x_{k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}}} - u_{x_{k+\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}}} \right] \left( y_{k+1, i} - y_{k, i} \right) - \left( u_{y_{k+1, i}} - u_{y_{k, i}} \right) \times \\ & \times \left[ x_{k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}} - x_{k+\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}} \right] + \left[ u_{y_{k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}}} - u_{y_{k+\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}}} \right] \times \\ & \left. \times \left( x_{k+1, i} - x_{k, i} \right) \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

Когда все дивергенции скорости во всех указанных «реберных» ячейках посчитаны, вычисляются следующие отношения:

$$r_{k-\frac{1}{2}, i} = \frac{(\operatorname{div} \bar{u})_{k-\frac{1}{2}, i}}{(\operatorname{div} \bar{u})_{k+\frac{1}{2}, i}}, \quad r_{k+\frac{1}{2}, i+1} = \frac{(\operatorname{div} \bar{u})_{k+\frac{1}{2}, i+1}}{(\operatorname{div} \bar{u})_{k+\frac{1}{2}, i}} \quad (14)$$

$$r_{k+\frac{3}{2}, i} = \frac{(\operatorname{div} \bar{u})_{k+\frac{3}{2}, i}}{(\operatorname{div} \bar{u})_{k+\frac{1}{2}, i}}, \quad r_{k+\frac{1}{2}, i-1} = \frac{(\operatorname{div} \bar{u})_{k+\frac{1}{2}, i-1}}{(\operatorname{div} \bar{u})_{k+\frac{1}{2}, i}} \quad (15)$$

Затем определяются величины  $\psi_1$  и  $\psi_2$ :

$$\begin{aligned} & \psi_1 = \max \times \\ & \times \left[ 0, \min \left\{ 0,5 \left( r_{k-\frac{1}{2}, i} + r_{k+\frac{3}{2}, i} \right), 2r_{k-\frac{1}{2}, i}, 2r_{k+\frac{3}{2}, i}, 1 \right\} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \psi_2 = \max \times \\ & \times \left[ 0, \min \left\{ 0,5 \left( r_{k+\frac{1}{2}, i+1} + r_{k+\frac{1}{2}, i-1} \right), 2r_{k+\frac{1}{2}, i+1}, 2r_{k+\frac{1}{2}, i-1}, 1 \right\} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

И только теперь определяется функция-ограничитель на ребре:

$$\Psi_{k-\frac{1}{2}, i} = \min(\psi_1, \psi_2) \quad (18)$$

На граничных ребрах коэффициенты  $r$  определяются так: для границ типа «жесткая» стенка дивергенция скорости вне области приравнивается дивергенции скорости с противоположного ребра. Для других типов граничных условий дивергенция за пределами границы полагается равной нулю.

Аналогичным образом вычисляются функции – ограничители на столбцах.

### Вычисление скалярного множителя

Скалярный множитель определяется в «угловом» объеме, вершинами которого являются узлы вспомогательной сетки. Пример такого объема приведен на рис. 3. На его примере и проведем вычисление скалярного множителя.

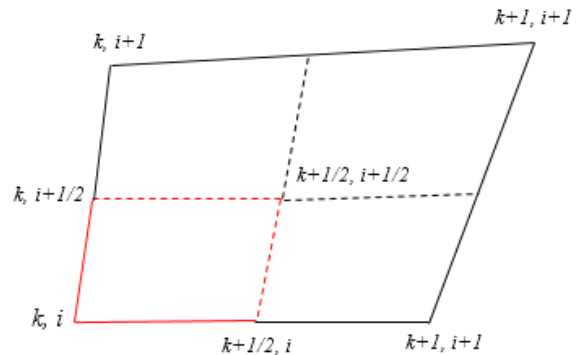


Рис. 3. Ячейка основной сетки с нанесенной вспомогательной сеткой

В основе скалярного множителя лежит вязкость Куропатенко [6]. Для закрашенного углового объема множитель будет иметь вид:

$$\mu_{k,i} = (1 - \Psi_{k,i}) \rho_{k,i} \left\{ c_2 \frac{\gamma + 1}{4} |\Delta u_{k,i}| + \sqrt{c_2^2 \left( \frac{\gamma + 1}{4} \right)^2 (\Delta u_{k,i})^2 + c_1^2 (c_{зв})_{k,i}^2} \right\} l_{k,i} \quad (19)$$

Плотность  $\rho_{k,i}$  будем определять из условия лагранжести углового объема, скорость звука  $(c_{зв})_{k,i}$  равна скорости звука во всей ячейке, а характерный размер будем определять как минимальное значение длины двух смежных ребер, образующих угол  $(k,i)$ :

$$l_{k,i} = \min \left( l_{k+\frac{1}{2},i}, l_{k,i+\frac{1}{2}} \right) \quad (20)$$

Скачок скорости:

$$\Delta u_{k,i} = l_{k,i} |\operatorname{div} \vec{u}_{k,i}| \quad (21)$$

здесь дивергенция скорости в угловом объеме вычисляется стандартным образом по ранее приведенной формуле (13).

Дивергенцию скорости в угловом объеме также будет использоваться как выключатель действия вязкости.

В частности, если

$$(\operatorname{div} \vec{u})_{k,i} > 0, \text{ то } \mu_{k,i} = 0.$$

Теперь осталось определить вид функции-ограничителя. Будем вычислять  $\Psi_{k,i}$  как минималь-

ное значение функций-ограничителей на двух смежных ребрах

$$\Psi_{k,i} = \min \left( \Psi_{k+\frac{1}{2},i}, \Psi_{k,i+\frac{1}{2}} \right) \quad (22)$$

Аналогичным образом вычисляются множители в остальных угловых объемах ячейки.

### Тестовые расчеты

В текущей главе приведены расчеты тестовых задач. Все расчеты с тензорной вязкостью проводились с коэффициентами  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 1$ , включенным режимом действия функций-ограничителей и без какого-либо сглаживания. Также для сравнения приводятся результаты расчетов с вязкостью Неймана – Рихтмайера. Все расчеты с вязкостью Неймана – Рихтмайера проводились со стандартными коэффициентами  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = 0,25$ .

#### Задача о плоской волне напряжения

Целью данного теста являлось проверить работу алгоритма тензорной вязкости на упругопластической задаче с одномерным течением.

Область представляет собой прямоугольный брусок, содержащий идеальный газ с показателем адиабаты  $\gamma = 3$  и уравнением состояния  $P = (\gamma - 1)\rho e$ .

Начальные условия:

На левой границе задается постоянное по времени давление  $P_{\text{тр}} = 5$  ГПа, все другие границы – жесткие стенки.

Размеры области:  $|AD| = 0,25$  см,  $|AB| = 1,5$  см. Число точек по осям:  $OX \rightarrow M = 31$ ,  $OY \rightarrow N = 6$ .

На рис. 4–6 приведены результаты расчета и аналитическое решение на момент времени  $t = 2,4 \mu\text{с}$ .

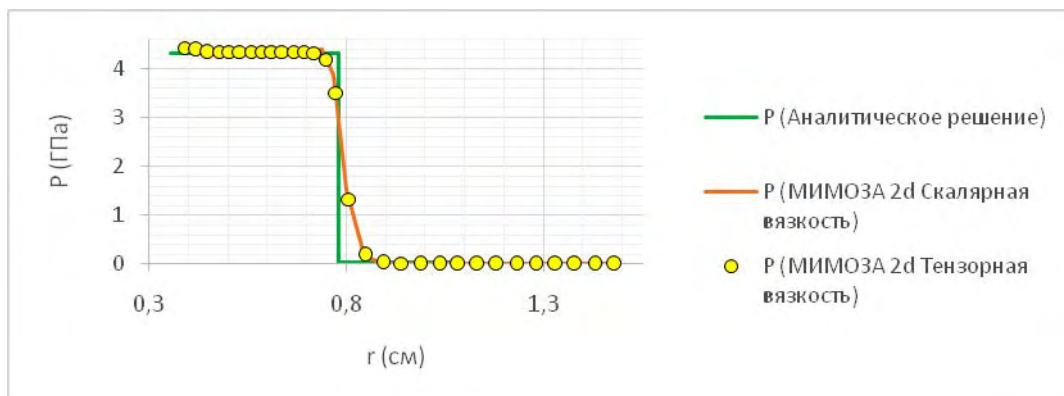


Рис. 4. График зависимости давления от радиуса на момент времени  $t = 2,4 \mu\text{с}$

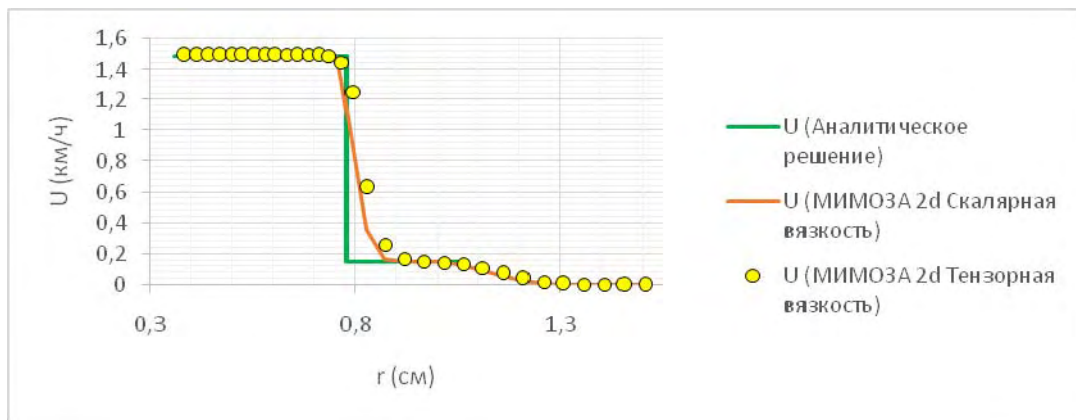


Рис. 5. График зависимости скорости от радиуса на момент времени  $t = 2,4\mu\text{с}$

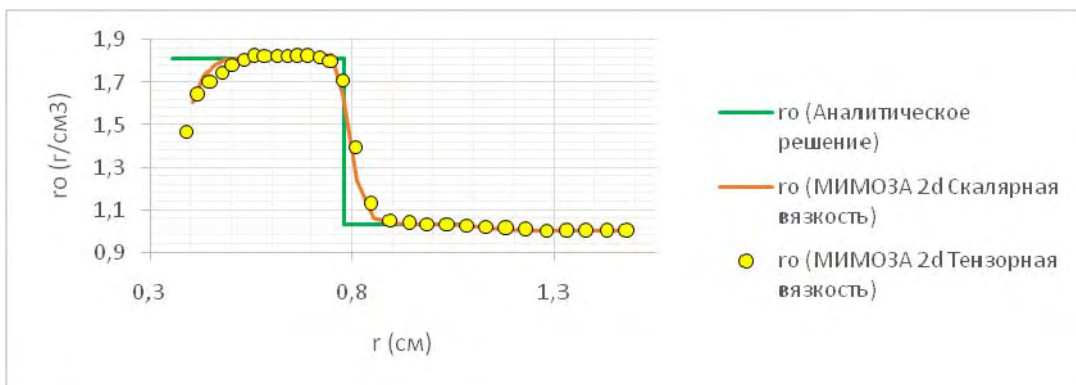


Рис. 6. График зависимости плотности от радиуса на момент времени  $t = 2,4\mu\text{с}$

Как и в аналитическом решении, в результате расчета получено расщепление ударной волны на две: впереди распространяется ударная волна  $D_{\text{упр}} = 4,47$  км/с, а за ней – пластическая волна  $D_{\text{пл}} = 3,25$  км/с. В таблице приведены значения скорости, плотности и давления в упругой и пластической областях.

Скорость, плотность и давление в упругой и пластической областях

	Область	Точное решение	МИМОЗА 3д. Скалярная вязкость	МИМОЗА 2д. Скалярная вязкость	МИМОЗА 2д. Тензорная вязкость	Отличие тензорной вязкости от точного решения
$U$	пластич.	1,489	1,495	1,496	1,491	0,13 %
	упругая	0,15	0,146	0,149	0,149	-0,66 %
$\rho_0$	пластич.	1,814	1,821	1,824	1,816	0,11 %
	упругая	1,034	1,034	1,034	1,032	-0,19 %
$P$	пластич.	4,333	4,325	4,337	4,34	0,16 %
	упругая	0,023	0,025	0,023	0,022	-4,3 4%

Как видно из графиков и таблицы, результаты расчетов удовлетворительно согласуются с точным решением и с результатами, полученными в ходе решения по МИМОЗА 3Д (Скалярная вязкость), МИМОЗА 2Д (Скалярная вязкость). Можно отметить незначительное отклонение графиков скорости и плотности в расчете с использованием тензорной вязкости от результатов расчета с вязкостью Неймана – Рихтмайера.

### Цилиндрический тест Ноха

В области, представляющей в момент времени  $t=0$  квадрат со стороной, равной единице ( $0 < x < 1, 0 < y < 1$ ), находится идеальный газ с урав-

нением состояния  $p = (\gamma - 1)\rho e$ , где показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ . Плотность газа равна единице, удельная внутренняя энергия равна нулю, скорость газа в каждой точке области по модулю равна единице и направлена к началу координат. Счетная область равномерно разбивается на 50 интервалов в каждом направлении  $\Delta x = \Delta y = 0,02$ . На границах  $x=0, y=0$  задано условие зеркального отражения «жесткая стенка». Все расчеты проводились до момента времени  $t = 0,6$ .

На рис. 7–10 приведены вид счетной сетки и поле плотности на конечный момент времени в расчетах с использованием вязкости Неймана – Рихтмайера и тензорной вязкости.

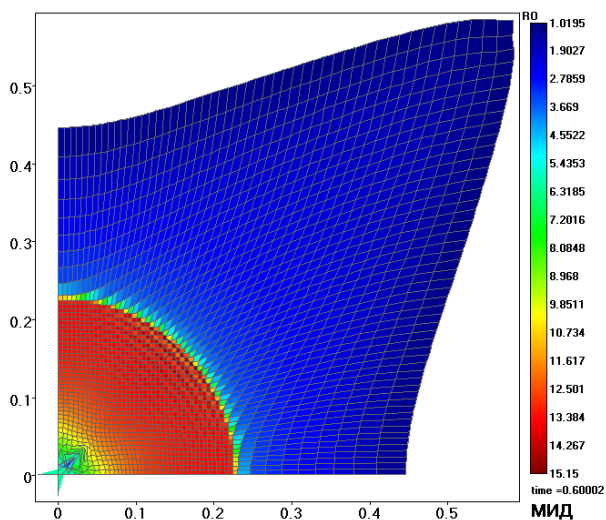


Рис. 7. Вид счетной сетки и поле плотности на конечный момент времени в расчете с использованием вязкости Неймана – Рихтмайера

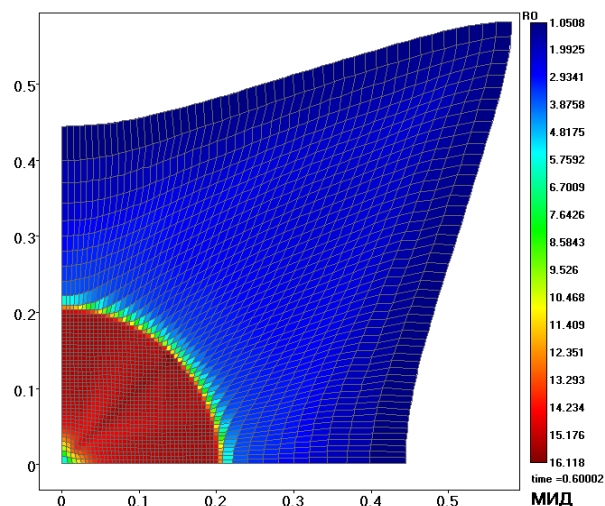


Рис. 8. Вид счетной сетки и поле плотности на конечный момент времени в расчете с использованием тензорной вязкости

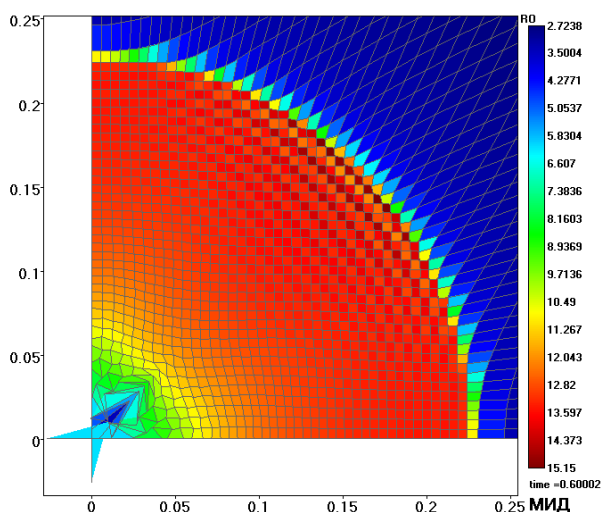


Рис. 9. Вид счетной сетки и поле плотности на конечный момент времени в расчете с использованием вязкости Неймана – Рихтмайера

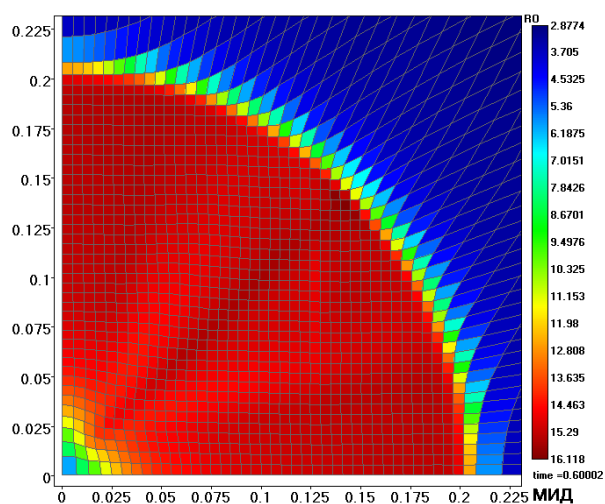


Рис. 8. Вид счетной сетки и поле плотности на конечный момент времени в расчете с использованием тензорной вязкости



Видно, что в расчете с использованием вязкости Неймана – Рихтмайера решение получилось немонотонным, а счетная сетка сильно искажена в районе центра. Также наблюдается отклонение от одномерности в поле плотностей в районе фронта ударной волны под углом  $45^\circ$  к осям координат.

В расчете с использованием тензорной вязкости качество сетки значительно лучше. Но также наблюдается отклонение от одномерности в поле плотностей.

На рис. 11 приведен график зависимости плотности от координат центров ячеек.

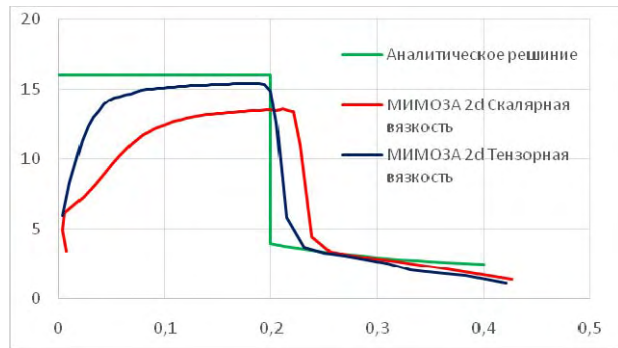


Рис. 9. Зависимость плотности от координат центров ячеек первой строки (вдоль оси X)

Как видно из графика результаты с использованием тензорной вязкости ближе к точному решению, чем результаты с использованием вязкости Неймана – Рихтмайера.

### Задача Зальцмана

Целью данного теста являлось проверить работу алгоритма тензорной вязкости на неравномерных неортогональных сетках.

Рассмотрим задачу типа Зальцмана – движение плоской ударной волны по сетке, неравномерной в направлении движения фронта, с переменной неравномерностью.

В прямоугольной области со сторонами 0,1 и 1 содержится идеальный газ с параметрами  $\gamma = \frac{5}{3}$ ,  $\rho_0 = 1$ ,  $e_0 = 0,0001$ .

На левой границе задано давление, равное 1. Остальные границы – «жесткие» стенки.

Сетка была построена так: боковые и верхняя границы разбиты равномерно, нижняя граница разбита с постоянным вдоль столбцов знаменателем 0,992.

Результаты расчетов этой задачи представлены на момент времени  $t = 0,925$ , когда волна уже дважды отразилась от вертикальных границ счетной области. В качестве результатов приведены вид счетной сетки и распределение плотности – рис. 12 и рис. 13.

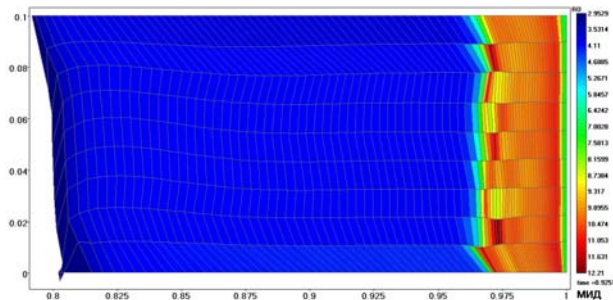


Рис. 10. Вид счетной сетки и поле плотности на конечный момент времени в расчете с использованием вязкости Неймана – Рихтмайера

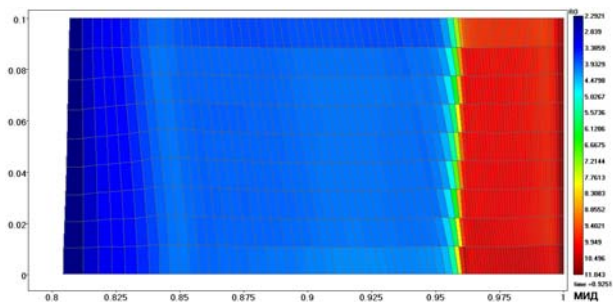


Рис. 11. Вид счетной сетки и поле плотности на конечный момент времени в расчете с использованием тензорной вязкости

В расчете с использованием вязкости Неймана – Рихтмайера произошло сильное искажение сетки. Использование тензорной вязкости позволило получить заметно лучшее решение, чем при использовании вязкости Неймана – Рихтмайера. Здесь состояние сетки значительно лучше, плотность вдоль столбца имеет меньший разброс и распределение плотностей на фронте волны более одномерно.

На рис. 14 и рис. 15 представлена зависимость плотности от координат центров ячеек на моменты времени 0,7 (когда ударная волна еще не дошла до правой границы) и 0,925 (когда ударная волна отразилась от правой, а затем и от левой границы).

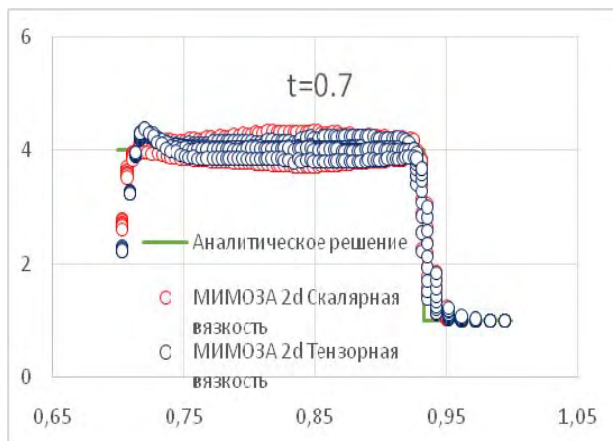


Рис. 12. Зависимость плотности от координат центров ячеек на момент времени  $t = 0,7$

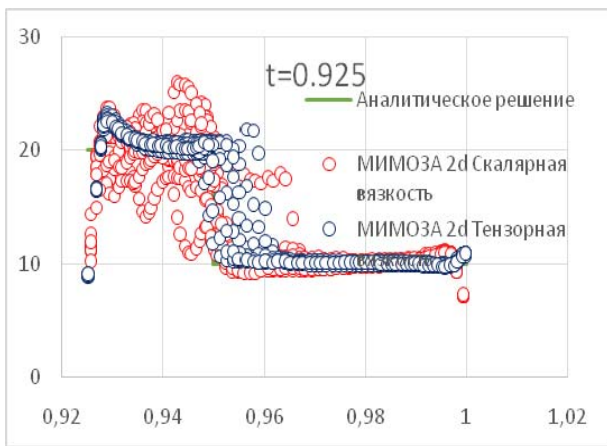


Рис. 13. Зависимость плотности от координат центров ячеек на момент времени  $t = 0,925$

Как видно из графиков результаты с использованием тензорной вязкости ближе к точному решению, чем результаты с использованием вязкости Неймана – Рихтмайера.

### Заключение

В докладе представлена реализация искусственной вязкости тензорного вида для моделирования разрывных течений в переменных Лагранжа в методике МИМОЗА.

Дискретные дифференциальные операторы *DIV* и *GRAD*, аппроксимирующие уравнения движения и энергии с учетом тензорной вязкости, строятся на основе непрерывных операторов.

С использованием тензорной вязкости посчитан ряд тестовых задач, на которых демонстрируется работоспособность реализованного алгоритма. Результаты численных расчетов сравниваются с точным решением, а также с результатами, полученными при использовании вязкости Неймана – Рихтмайера. Исходя из результатов тестов, можно сказать, что применение тензорной вязкости в лагранжевых расчетах позволяет разностной сетке при своей эво-

люции значительно дольше оставаться квазиравномерной и квазиортогональной (без перехлестов и изломов ячеек), чем в тех же расчетах с использованием вязкости Неймана – Рихтмайера.

### Литература

1. Von Neuman J., Rychtmyer R., A method for The Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks // J. App. Phys. 1950. Vol. 21. P. 232.
2. Campbell J. C., Shashkov M. J. A tensor artificial viscosity using a mimetic finite difference algorithm // J Comput. Phys. 2001. P. 172.
3. Софронов И. Д., Афанасова Е. А., Винокуров О. А. и др. Комплекс программ МИМОЗА для решения многомерных задач механики сплошной среды на ЭВМ «Эльбрус» // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Мат. моделир. физ. процессов. 1990. Вып. 2. С. 3–9.
4. Дмитриева Н. А., Дмитриева Л. В., Малиновская Е. В., Софронов И. Д. Методика расчета двумерных задач газовой динамики в переменных Лагранжа. //Препринт ИПМ АН СССР. Москва. 1976. № 59.
5. Авдеев П. А., Артамонов М. В., Бахрах С. М., Володина Н. А., Проневич С. Н., Шувалова Е. В. и др. Комплекс программ ЛЭГАК для расчета нестационарных течений многокомпонентной сплошной среды и принципы реализации комплекса на многопроцессорных ЭВМ с распределенной памятью // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Мат. моделир. физ. процессов. 2001. Вып. 3. С. 14–18.
6. Куропатенко В. Ф. Об одной форме псевдовязкости // Известия Сибирского отделения АН СССР. Серия технических наук. 1967. № 13. Вып. 3. С. 81–82.
7. Christensen R. B. High resolution hydrodynamics using artificial viscosity // Вопросы атомной науки и техники. Сер. мат. моделир. физ. процессов. 1996. № 4. С. 89–93.