

УДК 519.6

## ТОЧНОСТЬ СХЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ ТЕТРАЭДРИЧЕСКИХ И ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СЕТКАХ

О. В. Николаева, А. С. Казанцева  
(ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва)

Представлены результаты анализа и тестирования сеточных схем метода конечных элементов для решения уравнения переноса на неструктурированных сетках с двумя типами ячеек: тетраэдрами и треугольными призмами. Получено первое дифференциальное приближение для рассматриваемых схем. Численно исследована сходимость сеточных решений при сгущении пространственной сетки в задаче о глубоком проникновении излучения и в моделях теплового и быстрого реакторов. Представлены относительные времена счета в зависимости от точности результата.

*Ключевые слова:* уравнение переноса, неструктурированные сетки, тетраэдрические сетки, призматические сетки, метод конечных элементов.

### Введение

При решении многогруппового уравнения переноса излучения в областях, расположенных в защитных слоях ядерных реакторов, часто используются неструктурированные сетки. Такие сетки позволяют экономично аппроксимировать внутренние границы в области расчета (границы между материалами). Также неструктурированные сетки могут быть локально сгущены в выбранной пространственной подобласти без дополнительного сгущения в других подобластях.

Обычно используются неструктурированные сетки из ячеек-тетраэдров. Однако существует необходимость использовать и ячейки — треугольные призмы. Такие ячейки естественны при задании топливных элементов и стержней в активных зонах реакторов. Кроме того, ячейки-призмы позволяют легко моделировать движение стержней.

При расчете на неструктурированных сетках обычно используются схемы либо метода характеристик [1–4], либо метода конечных элементов [5–8]. В многомерных геометриях порядок аппроксимации схем метода характеристик обычно определяется оценкой точности интерполяционного соотношения [4]. Точность схем метода конечных элементов обычно оценивается в интегральных нормах [9]. Сравнение точности схем различных типов выполняется для задач с известным аналитическим [10] или реперным [11] решением. Изучается влияние формы ячейки на точность расчета [8]. Исследуются также временные затраты, требуемые при расчете на разных сеточных схемах [11].

В настоящей работе рассматриваются схемы метода конечных элементов на тетраэдрических и призматических сетках. Постановка задачи для уравнения переноса нейтронов приведена в разд. 1. Сеточные уравнения получены в разд. 2. В разд. 3 выполнена оценка порядка аппроксимации схем, построено первое дифференциальное приближение для сеточных уравнений. Численные результаты о зависимости точности и времени расчета от формы ячейки помещены в разд. 4.

## 1. Задача для уравнения переноса нейтронов

При построении сеточной схемы для решения многогруппового уравнения переноса нейтронов рассматривается следующее уравнение:

$$\mathbf{\Omega} \nabla \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) + \sigma \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = Q(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}). \quad (1)$$

Здесь искомая функция  $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$  [1/(см<sup>2</sup> · с · ср)] — плотность потока нейтронов, определяет число нейтронов в точке  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  трехмерной выпуклой области  $G$ , движущихся в направлении единичного вектора  $\mathbf{\Omega} \in \Omega$ , где  $\Omega$  — единичная сфера. Вектор  $\mathbf{\Omega}$  задается в сферической системе координат углами  $\theta$  и  $\varphi$  или декартовыми координатами  $\xi, \eta, \gamma$ . Связь между декартовыми и сферическими координатами определяется равенствами  $\xi = \cos \varphi \sin \theta$ ;  $\eta = \sin \varphi \sin \theta$ ;  $\gamma = \cos \theta$ . Производная по направлению имеет вид

$$\mathbf{\Omega} \nabla = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2)$$

Величина  $\sigma$  [1/см] есть полное сечение взаимодействия нейтрона со средой. Правая часть (1)  $Q(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$  [1/(см<sup>3</sup> · с · ср)] включает в себя внутренний источник, источник рассеяния, источники перехода из других энергетических групп и источник деления.

Рассмотрим следующие краевые условия для уравнения (1):

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = a(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}^*) + \phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) \quad \text{при} \quad \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) < 0, \quad \mathbf{r} \in \partial G. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  — внешняя нормаль к границе  $\partial G$  области  $G$  в точке  $\mathbf{r}$ ; функция  $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$  [1/(см<sup>2</sup> · с · ср)] — плотность потока граничного источника нейтронов. Альбеда  $a(\mathbf{r})$  определяет зеркальное отражение от внешней границы. При зеркальном отражении направление  $\mathbf{\Omega}^*$  движения нейтрона к границе зависит от направления  $\mathbf{\Omega}$  его движения от границы следующим образом:

$$\mathbf{\Omega}^* = \mathbf{\Omega} - 2(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}. \quad (4)$$

Отметим, что задача (1)–(4) возникает при решении многогруппового уравнения переноса итерационным методом, когда правая часть  $Q(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$  считается известной с предыдущей итерации. Подробная постановка задачи (1)–(4) приведена в [11].

## 2. Сеточная задача для уравнения переноса нейтронов

Для решения уравнения переноса в ячейках-тетраэдрах и ячейках-призмах будем использовать схемы метода конечных элементов. Рассмотрим схемы, в которых сеточные решения задаются своими значениями в вершинах ячейки и вершинах каждой грани.

Рассмотрим отдельно одну ячейку. Фиксируем вектор  $\mathbf{\Omega}$ , определяющий направление переноса нейтронов. Введем локальные нумерации вершин в ячейке, граней в ячейке, вершин на каждой грани. Установим соответствие между номером вершины на каждой грани и номером той же вершины в ячейке. Введем следующие функции:  $\mu(j, k)$  — номер вершины в ячейке, имеющей номер  $k$  на  $j$ -й грани;  $\nu(j, i)$  — номер вершины на  $j$ -й грани, имеющей в ячейке номер  $i$ . Если  $i$ -я вершина ячейки не лежит на  $j$ -й грани, значение  $\nu(j, i)$  будем считать равным нулю.

Обозначим внешнюю нормаль к  $j$ -й грани  $f_j$  как  $\mathbf{n}_j$ . Входными назовем грани ячейки, для которых вектор переноса  $\mathbf{\Omega}$  и внешняя нормаль  $\mathbf{n}_j$  образуют тупой угол, т. е. скалярное произведение  $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j < 0$ . Выходными назовем грани, для которых  $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j > 0$ .

Рассмотрим задачу для уравнения переноса в ячейке (1). Краевые условия задают значения решения на входных гранях:

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}), \quad \text{если} \quad \mathbf{r} \in f_j, \quad \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j < 0.$$

Рассмотрим значения решения  $\psi_i$  и правой части  $q_i$  в вершинах ячейки ( $i = 1, \dots, N_v$ ), а также значения решения  $\psi_{j,k}$  в вершинах с номерами  $k = 1, \dots, I_v(j)$  на гранях  $j = 1, \dots, N_f$ . Здесь  $N_v$  — число вершин в ячейке;  $N_f$  — число граней в ячейке;  $I_v(j)$  — число вершин на  $j$ -й грани.

Перед расчетом ячейки значения решения  $\psi_{j,k}$  на входных гранях при  $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j < 0$  известны либо из граничных условий, либо из расчета соседних ячеек. Также известны значения правой части  $q_i$ . При расчете ячейки необходимо найти значения решения  $\psi_i$  в ячейке и  $\psi_{j,k}$  на выходных гранях при  $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j > 0$ . Значения решения в вершинах выходных граней используются как значения решения в вершинах входных граней при расчете следующих ячеек.

В схеме метода конечных элементов для каждой вершины ячейки вводится относящаяся к ней базисная функция, принимающая значение 1 в этой вершине и значение 0 в остальных вершинах:

$$u_i(x_k, y_k, z_k) = 0, \quad \text{если } i \neq k; \quad u_i(x_i, y_i, z_i) = 1. \quad (5)$$

Здесь  $x_i, y_i, z_i$  — координаты  $i$ -й вершины ячейки.

Для построения базисной функции  $u_i(x, y, z)$ , относящейся к  $i$ -й вершине, в тетраэдре сначала находится уравнение плоскости, проведенной через те три вершины, где базисная функция принимает значения 0:  $U_i(x, y, z) = 0$ . Тогда функция  $u_i(x, y, z)$  определяется по формуле

$$u_i(x, y, z) = \frac{U_i(x, y, z)}{U_i(x_i, y_i, z_i)}. \quad (6)$$

В треугольной призме используются билинейные базисные функции  $u_i(x, y, z)$  вида

$$u_i(x, y, z) = \frac{(z - z_{0i}) V_i(x, y)}{(z_i - z_{0i}) V_i(x_i, y_i)}. \quad (7)$$

Здесь  $z_{0i}$  —  $z$ -координата треугольной грани, не содержащей  $i$ -й вершины;  $V_i(x, y) = 0$  — уравнение плоскости, проведенной через ту четырехугольную грань, на которой не лежит  $i$ -я вершина. Здесь предполагается, что обе треугольные грани призмы параллельны плоскости  $Oxy$ , а четырехугольные — перпендикулярны этой плоскости. Если это не так, то тремя поворотами на углы Эйлера призме может быть придано нужное положение.

Аналогичным образом на каждой  $j$ -й грани  $f_j$  вводятся базисные функции  $u_k^j(x', y')$ , принимающие значение 1 в  $k$ -й вершине грани и 0 в остальных вершинах. Отметим, что след базисной функции  $u_i(x, y, z)$  на  $j$ -й грани совпадает с базисной функцией  $u_{\nu(j,i)}^j(x', y')$  на этой грани. При этом на треугольной грани базисные функции линейные, на четырехугольной — билинейные. Выполнены равенства

$$\iiint_C u_i(x, y, z) dx dy dz = \frac{V}{N_v}; \quad \iint_{f_j} u_k^j(x', y') dx' dy' = \frac{S_j}{I_v(j)}, \quad (8)$$

где  $V$  — объем ячейки  $C$ ;  $S_j$  — площадь  $j$ -й грани.

В методе конечных элементов искомое решение  $\Psi$  и правая часть  $Q$  представляются в виде разложения по базисным функциям отдельно в ячейке и на каждой грани:

$$\Psi(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N_v} \psi_i u_i(x, y, z); \quad \Psi(x', y') = \sum_{k=1}^{I_v(j)} \psi_{j,k} u_k^j(x', y'); \quad Q(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N_v} q_i u_i(x, y, z). \quad (9)$$

Таким образом, в ячейке искомое решение (9) является линейной (в тетраэдре) или билинейной (в призме) функцией, принимающей значения  $\psi_i$  в вершинах ячейки. На грани искомое решение является линейной (в треугольнике) или билинейной (в четырехугольнике) функцией, принимающей значения  $\psi_{j,k}$  в вершинах грани.

Положив  $\psi_i \equiv 1$  в первом и втором выражениях (9), получим соотношения

$$\sum_{\ell=1}^{N_v} u_{\ell}(x, y, z) \equiv 1; \quad \sum_{k=1}^{I_v(j)} u_k^j(x', y') \equiv 1. \quad (10)$$

Интегрируем уравнение переноса (1) по ячейке  $C$  с весовыми функциями  $u_\ell(x, y, z)$ :

$$\iiint_C (\mathbf{\Omega}\nabla + \sigma) \Psi(x, y, z) u_\ell(x, y, z) dx dy dz = \iiint_C Q(x, y, z) u_\ell(x, y, z) dx dy dz, \quad \ell = 1, \dots, N_v. \quad (11)$$

Интеграл в левой части этого равенства преобразуется с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \iiint_C u_\ell(x, y, z) (\mathbf{\Omega}\nabla + \sigma) \Psi(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_C \sigma \Psi(x, y, z) u_\ell(x, y, z) dx dy dz - \\ &- \iiint_C \Psi(x, y, z) \mathbf{\Omega}\nabla u_\ell(x, y, z) dx dy dz + \iiint_C \mathbf{\Omega}\nabla (u_\ell(x, y, z) \Psi(x, y, z)) dx dy dz. \end{aligned}$$

Последний интеграл в этом равенстве преобразуем с помощью формулы Гаусса:

$$\iiint_C \mathbf{\Omega}\nabla (u_\ell(x, y, z) \Psi(x, y, z)) dx dy dz = \sum_{j=1}^{N_f} \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j \iint_{f_j} \Psi(x', y') u_{\nu(j,\ell)}^j(x', y') dx' dy'.$$

Здесь суммирование выполняется по всем граням  $f_j$  ячейки. Тогда вместо (11) имеем

$$\begin{aligned} \iiint_C \Psi(x, y, z) [\sigma u_\ell(x, y, z) - \mathbf{\Omega}\nabla u_\ell(x, y, z)] dx dy dz + \sum_{j=1}^{N_f} \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j \iint_{f_j} \Psi(x', y') u_{\nu(j,\ell)}^j(x', y') dx' dy' = \\ = \iiint_C Q(x, y, z) u_\ell(x, y, z) dx dy dz, \quad \ell = 1, \dots, N_v. \end{aligned}$$

Подставляя в это выражение представления (9), находим соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_v} \psi_i \iiint_C u_i(x, y, z) [\sigma u_\ell(x, y, z) - \mathbf{\Omega}\nabla u_\ell(x, y, z)] dx dy dz + \\ + \sum_{j=1}^{N_f} \sum_{k=1}^{I_v(j)} \psi_{j,k} \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j \iint_{f_j} u_k^j(x', y') u_{\nu(j,\ell)}^j(x', y') dx' dy' = \\ = \sum_{i=1}^{N_v} q_i \iiint_C u_i(x, y, z) u_\ell(x, y, z) dx dy dz, \quad \ell = 1, \dots, N_v. \end{aligned} \quad (12)$$

Для входных граней, когда  $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j < 0$ , значения  $\psi_{j,k}$  известны из расчета соседних ячеек. Для выходных граней, когда  $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j > 0$ , используем равенство

$$\psi_{j,k} = \psi_{\mu(j,k)}. \quad (13)$$

Иначе говоря, значение решения в вершинах выходных граней полагается равным значению решения в соответствующей вершине ячейки. Окончательно выражение (12) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_v} \psi_i (\sigma b_{i,\ell} - c_{i,\ell}) + \sum_{\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j > 0} \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j \sum_{k=1}^{I_v(j)} \psi_{\mu(j,k)} a_{j,k,\nu(j,\ell)} = \\ = \sum_{\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j < 0} |\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j| \sum_{k=1}^{I_v(j)} \psi_{j,k} a_{j,k,\nu(j,\ell)} + \sum_{i=1}^{N_v} q_i b_{i,\ell}, \quad \ell = 1, \dots, N_v. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$a_{j,i,\ell} = \iint_{f_j} u_i^j(x', y') u_\ell^j(x', y') dx' dy'; \quad (15)$$

$$b_{i,\ell} = \iiint_C u_i(x, y, z) u_\ell(x, y, z) dx dy dz; \quad c_{i,\ell} = \iiint_C u_i(x, y, z) \mathbf{\Omega} \nabla u_\ell(x, y, z) dx dy dz. \quad (16)$$

Уравнения (14) могут быть переписаны в виде

$$\sum_{i=1}^{N_v} \psi_i \left( \sigma b_{i,\ell} - c_{i,\ell} + \sum_{\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j > 0} \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j a_{j,\nu(j,i),\nu(j,\ell)} \right) = \sum_{\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j < 0} |\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j| \sum_{k=1}^{I_v(j)} \psi_{j,k} a_{j,k,\nu(j,\ell)} + \sum_{i=1}^{N_v} q_i b_{i,\ell}, \quad (17)$$

$\ell = 1, \dots, N_v.$

Здесь предполагается, что  $a_{j,\nu(j,i),\nu(j,\ell)} = 0$ , если  $\nu(j,i) = 0$  или  $\nu(j,\ell) = 0$ , т. е. если  $i$ -я или  $\ell$ -я вершина не лежит на  $j$ -й грани.

Алгоритм расчета ячейки по схеме метода конечных элементов состоит из следующих шагов:

1. Нахождение базисных функций (6) или (7) и их производных.
2. Нахождение интегралов (15), (16) (используются аналитические формулы).
3. Формирование системы уравнений (17) и решение ее методом Гаусса.
4. Определение значений решения в вершинах выходных граней по формуле (13).

### 3. Свойства сеточных схем метода конечных элементов

Рассмотрим свойства построенных сеточных схем. Прежде всего отметим, что обе схемы являются консервативными, т. е. удовлетворяют соотношению баланса

$$\sum_{j=1}^{N_f} \bar{\Psi}_j S_j (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j) + \sigma V \bar{\Psi} = V \bar{Q}. \quad (18)$$

Здесь  $\bar{\Psi} = \sum_{i=1}^{N_v} \psi_i / N_v$  — среднее значение решения внутри ячейки;  $\bar{Q} = \sum_{i=1}^{N_v} q_i / N_v$  — среднее значение

правой части в ячейке;  $\bar{\Psi}_j = \sum_{k=1}^{I_v(j)} \psi_{j,k} / I_v(j)$  — среднее значение решения на  $j$ -й грани ячейки. В

соотношении (18) первое слагаемое в левой части определяет число нейтронов, покидающих ячейку через ее границу, второе слагаемое — число нейтронов, поглощенных средой в ячейке. Величина в правой части определяет число нейтронов, порожденных источником в ячейке. Соотношение (18) для ячейки-тетраэдра получено в [11]. Его вывод для ячейки-призмы аналогичен.

Построим дифференциальное приближение для сеточных уравнений. Полагаем, что значение гладкого решения в вершине грани совпадает со значением решения в соответствующей вершине ячейки (см. (13)). Тогда уравнения (17) записываются в виде

$$\sum_{i=1}^{N_v} \psi_i \left( \sigma b_{i,\ell} - c_{i,\ell} + \sum_{j=1}^{N_f} \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j a_{j,\nu(j,i),\nu(j,\ell)} \right) = \sum_{i=1}^{N_v} q_i b_{i,\ell}, \quad \ell = 1, \dots, N_v. \quad (19)$$

Справедливы соотношения

$$c_{i,\ell} = \iiint_C \Omega \nabla (u_i(x, y, z) u_\ell(x, y, z)) dx dy dz - \iiint_C u_\ell(x, y, z) (\Omega \nabla u_i(x, y, z)) dx dy dz =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_f} \Omega \cdot \mathbf{n}_j \iint_{f_j} u_{\nu(j,i)}^j(x', y') u_{\nu(j,\ell)}^j(x', y') dx' dy' - c_{\ell,i} = \sum_{j=1}^{N_f} \Omega \cdot \mathbf{n}_j a_{j,\nu(j,i),\nu(j,\ell)} - c_{\ell,i}.$$

Поэтому уравнения (19) могут быть записаны в форме

$$\sum_{i=1}^{N_v} \psi_i (\sigma b_{i,\ell} + c_{\ell,i}) = \sum_{i=1}^{N_v} q_i b_{i,\ell}, \quad \ell = 1, \dots, N_v. \quad (20)$$

**Лемма.** Пусть базисные функции в ячейке удовлетворяют условиям (5), (8), (10) и являются полиномами не ниже первого порядка. Пусть решение уравнения переноса является трижды непрерывно дифференцируемой функцией. Тогда дифференциальное приближение для сеточных уравнений (20), (15), (16) имеет вид

$$\Omega \nabla \psi + \sigma \psi - q + \varepsilon = O(R^2), \quad (21)$$

где  $R = \max_{i=1, \dots, N_v} \{|x_i|, |y_i|, |z_i|\}$  — размер ячейки;  $x_i, y_i, z_i$  — координаты  $i$ -й вершины ячейки;

$$\varepsilon = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_v} \omega_i \iiint_C \frac{\partial u_i}{\partial \Omega} dx dy dz, \quad \omega_i = \frac{1}{2} (\psi_{xx} x_i^2 + \psi_{yy} y_i^2 + \psi_{zz} z_i^2) + \psi_{xy} x_i y_i + \psi_{xz} x_i z_i + \psi_{yz} y_i z_i. \quad (22)$$

**Доказательство.** Введем локальную систему координат с началом в центре ячейки. В этой системе для координат вершин ячейки выполнены условия

$$\sum_{i=1}^{N_v} x_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{N_v} y_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{N_v} z_i = 0,$$

а также справедливы равенства

$$\iiint_C x dx dy dz = \iiint_C y dx dy dz = \iiint_C z dx dy dz = 0. \quad (23)$$

Разложения Тейлора для значения решения и правой части в вершине ячейки имеют вид

$$\psi_i = \psi + \psi_x x_i + \psi_y y_i + \psi_z z_i + \frac{1}{2} (\psi_{xx} x_i^2 + \psi_{yy} y_i^2 + \psi_{zz} z_i^2) + \psi_{xy} x_i y_i + \psi_{xz} x_i z_i + \psi_{yz} y_i z_i + O(R^3); \quad (24)$$

$$q_i = q + q_x x_i + q_y y_i + q_z z_i + \frac{1}{2} (q_{xx} x_i^2 + q_{yy} y_i^2 + q_{zz} z_i^2) + q_{xy} x_i y_i + q_{xz} x_i z_i + q_{yz} y_i z_i + O(R^3). \quad (25)$$

Из определения (16) и свойств (8), (10) следуют равенства

$$\sum_{i=1}^{N_v} b_{i,\ell} = \sum_{\ell=1}^{N_v} b_{i,\ell} = \iiint_C u_\ell(x, y, z) dx dy dz = \frac{V}{N_v}. \quad (26)$$

Поскольку базисные функции  $u_i(x, y, z)$ , линейные или билинейные, принимают в одной вершине ячейки значение 1, а в остальных — 0, справедливы выражения

$$\sum_{i=1}^{N_v} u_i(x, y, z) x_i = x; \quad \sum_{i=1}^{N_v} u_i(x, y, z) y_i = y; \quad \sum_{i=1}^{N_v} u_i(x, y, z) z_i = z.$$

Отсюда следуют соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_v} x_i b_{i,\ell} &= \iiint_C x u_\ell(x, y, z) dx dy dz; & \sum_{i=1}^{N_v} y_i b_{i,\ell} &= \iiint_C y u_\ell(x, y, z) dx dy dz; \\ \sum_{i=1}^{N_v} z_i b_{i,\ell} &= \iiint_C z u_\ell(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned} \quad (27)$$

Также имеем цепочку равенств

$$\sum_{i=1}^{N_v} c_{\ell,i} x_i = \sum_{i=1}^{N_v} \iiint_C u_\ell(x, y, z) \mathbf{\Omega} \nabla x dx dy dz = \xi \iiint_C u_\ell(x, y, z) dx dy dz = \xi \frac{V}{N_v}. \quad (28)$$

Аналогичным образом получаем выражения

$$\sum_{i=1}^{N_v} c_{\ell,i} y_i = \eta \frac{V}{N_v}; \quad \sum_{i=1}^{N_v} c_{\ell,i} z_i = \gamma \frac{V}{N_v}. \quad (29)$$

Из определения (16) и свойства (10) находим соотношения

$$\sum_{i=1}^{N_v} c_{\ell,i} = 0; \quad \sum_{\ell=1}^{N_v} c_{\ell,i} = \iiint_C \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{\Omega}} dx dy dz. \quad (30)$$

Подставляя разложения Тейлора (24), (25) в уравнение (20), учитывая равенства (26)–(30) и умножая полученное соотношение на величину  $N_v/V$ , приходим к выражениям

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} \nabla \psi + \sigma \psi - q + \frac{N_v}{V} \left[ (\sigma \psi_x - q_x) \iiint_C x u_\ell(x, y, z) dx dy dz + (\sigma \psi_y - q_y) \iiint_C y u_\ell(x, y, z) dx dy dz + \right. \\ \left. + (\sigma \psi_z - q_z) \iiint_C z u_\ell(x, y, z) dx dy dz \right] + \frac{N_v}{V} \sum_{i=1}^{N_v} \omega_i c_{\ell,i} + \frac{N_v}{V} \sum_{i=1}^{N_v} \zeta_i b_{i,\ell} = O(R^3), \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_i &= \frac{1}{2} [(\sigma \psi_{xx} - q_{xx}) x_i^2 + (\sigma \psi_{yy} - q_{yy}) y_i^2 + (\sigma \psi_{zz} - q_{zz}) z_i^2] + \\ &+ (\sigma \psi_{xy} - q_{xy}) x_i y_i + (\sigma \psi_{xz} - q_{xz}) x_i z_i + (\sigma \psi_{yz} - q_{yz}) y_i z_i. \end{aligned}$$

Усредним соотношения (31) по индексу  $\ell$ . Учитывая свойства (10), (23), (26), (30), находим

$$\mathbf{\Omega} \nabla \psi + \sigma \psi - q + \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_v} \omega_i \iiint_C \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{\Omega}} dx dy dz + \frac{1}{N_v} \sum_{i=1}^{N_v} \zeta_i = O(R^3).$$

Из (1) и (2) следует, что для величины  $\zeta_i$  справедлива оценка  $\zeta_i < (27/2) \Psi^3 R^2$ , где  $\Psi^3$  — константа, ограничивающая третьи производные решения. Отсюда следует искомая оценка (21).

Теперь оценим величину  $\varepsilon$  в левой части выражения (21). Имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{N_v} x_i^2 \iiint_C \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{\Omega}} dx dy dz \right| &= \left| \sum_{i=1}^{N_v} x_i^2 \sum_{\substack{j=1, \\ \nu(j,i) \neq 0}}^{N_f} \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j \iint_{f_j} u_{\nu(j,i)}^j(x', y') dx' dy' \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^{N_v} x_i^2 \sum_{\substack{j=1, \\ \nu(j,i) \neq 0}}^{N_f} \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}_j \frac{S_j}{I_v(j)} \right| \leq N_v R^2 S, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $S$  — максимальная площадь грани. Здесь учитывается тот факт, что в тетраэдре и призме каждая вершина присутствует в трех гранях, а минимальное число вершин на грани  $I_v(j) = 3$ . Аналогично получаем оценки

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{N_v} y_i^2 \iiint_C \frac{\partial u_i}{\partial \Omega} dx dy dz \right| &\leq N_v R^2 S; & \left| \sum_{i=1}^{N_v} z_i^2 \iiint_C \frac{\partial u_i}{\partial \Omega} dx dy dz \right| &\leq N_v R^2 S; \\ \left| \sum_{i=1}^{N_v} x_i y_i \iiint_C \frac{\partial u_i}{\partial \Omega} dx dy dz \right| &\leq N_v R^2 S. \end{aligned} \quad (33)$$

Аналогичные оценки в тетраэдре  $T$  имеют место и для следующих величин:

$$\left| \sum_{i=1}^{N_v} x_i z_i \iiint_T \frac{\partial u_i}{\partial \Omega} dx dy dz \right| \leq N_v R^2 S; \quad \left| \sum_{i=1}^{N_v} y_i z_i \iiint_T \frac{\partial u_i}{\partial \Omega} dx dy dz \right| \leq N_v R^2 S. \quad (34)$$

В призме  $P$  базисные функции (7) являются билинейными и выполнены условия

$$\sum_{i=1}^{N_v} u_i(x, y, z) x_i z_i = xz; \quad \sum_{i=1}^{N_v} u_i(x, y, z) y_i z_i = yz.$$

Используя эти соотношения и выражения (23), вместо оценок (34) находим равенства

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_v} x_i z_i \iiint_P \frac{\partial u_i}{\partial \Omega} dx dy dz &= \iiint_P \frac{\partial xz}{\partial \Omega} dx dy dz = \iiint_P (x\gamma + z\xi) dx dy dz = 0; \\ \sum_{i=1}^{N_v} y_i z_i \iiint_P \frac{\partial u_i}{\partial \Omega} dx dy dz &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Используя оценки (32)—(35) в выражениях (21), (22), получаем первое дифференциальное приближение для рассматриваемых сеточных схем:

$$\Omega \nabla \psi + \sigma \psi - q + \varepsilon = O(R^2), \quad (36)$$

$$|\varepsilon| \leq \kappa \Psi^2 a R. \quad (37)$$

Здесь  $\kappa = 18$  для тетраэдра,  $\kappa = 15$  для призмы;  $R = \max_{i=1, \dots, N_v} \{|x_i|, |y_i|, |z_i|\}$  — размер ячейки; константа  $\Psi^2$  ограничивает вторые производные решения. Безразмерная величина  $a$  может быть рассмотрена как параметр качества сетки

$$a = R \frac{S}{V}, \quad (38)$$

где  $V$  — объем ячейки;  $S$  — максимальная из площадей ее граней. Отметим, что размер ячейки  $R$  коррелирует с максимальной длиной ребра ячейки  $b_{\max}$ , а отношение  $V/S$  — с минимальной высотой  $h_{\min}$ . Поэтому параметр  $a \sim b_{\max}/h_{\min}$  становится большим для сплюснутых ячеек и уменьшается при приближении формы ячейки к правильной.

Таким образом, рассматриваемые схемы имеют первый порядок локальной аппроксимации. При этом константа  $\Psi^2$  в случае тетраэдрической ячейки ограничивает все вторые производные решения:  $\Psi^2 = \max_T \{|\psi_{xx}|, |\psi_{yy}|, |\psi_{zz}|, |\psi_{xy}|, |\psi_{xz}|, |\psi_{yz}|\}$ , тогда как в случае призматической ячейки — только часть вторых производных:  $\Psi^2 = \max_P \{|\psi_{xx}|, |\psi_{yy}|, |\psi_{zz}|, |\psi_{xy}|\}$ .



Отметим, что второй порядок погрешности аппроксимации может быть достигнут при переходе к ячейке-параллелепипеду  $H$ . Действительно, в локальной системе координат параллелепипед имеет границы  $[-d, d] \times [-d, d] \times [-d, d]$ , а базисные функции имеют вид

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= (x + d)(y + d)(z + d); & u_2(x, y, z) &= (x - d)(y + d)(z + d); \\ u_3(x, y, z) &= (x + d)(y - d)(z + d); & u_4(x, y, z) &= (x + d)(y + d)(z - d); \\ u_5(x, y, z) &= (x - d)(y - d)(z + d); & u_6(x, y, z) &= (x + d)(y - d)(z - d); \\ u_7(x, y, z) &= (x - d)(y + d)(z - d); & u_8(x, y, z) &= (x - d)(y - d)(z - d). \end{aligned}$$

Эти функции удовлетворяют условиям леммы, поэтому выполнено соотношение (21). Поскольку линейная комбинация этих базисных функций является билинейной функцией, содержащей члены  $xy, yz, xz$ , то выполнены равенства (35), а также соотношения

$$\sum_{i=1}^{N_v} x_i y_i \iiint_H \frac{\partial u_i}{\partial \Omega} dx dy dz = \iiint_H \frac{\partial x y}{\partial \Omega} dx dy dz = \iiint_H [x\eta + y\xi] dx dy dz = 0.$$

С другой стороны, в ячейке-параллелепипеде  $x_i^2 = y_i^2 = z_i^2 = d^2$ . Поэтому из (10) следуют выражения

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_v} x_i^2 \iiint_H \frac{\partial u_i}{\partial \Omega} dx dy dz &= \sum_{i=1}^{N_v} y_i^2 \iiint_H \frac{\partial u_i}{\partial \Omega} dx dy dz = \sum_{i=1}^{N_v} z_i^2 \iiint_H \frac{\partial u_i}{\partial \Omega} dx dy dz = \\ &= d^2 \sum_{i=1}^{N_v} \iiint_H \frac{\partial u_i}{\partial \Omega} dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для ячейки-параллелепипеда  $\varepsilon = 0$  и схема (15)–(17) имеет второй порядок локальной аппроксимации.

#### 4. Численные результаты

Рассматриваемые схемы метода конечных элементов реализованы в программе РАДУГА-Т [12]. Поскольку правая часть  $Q$  в уравнении (1) зависит от решения  $\Psi$ , решение системы сеточных уравнений находится с помощью двух вложенных итерационных циклов. Внешний итерационный цикл выполняется по источнику деления, внутренний — по источнику рассеяния. При этом расчет на каждой внутренней итерации выполняется КР1-методом, состоящим из двух этапов. На первом, К-этапе, в каждой ячейке для каждого направления переноса решается система уравнений (17). На втором, Р1-этапе, для решения, найденного на первом этапе, методом подпространств Крылова вычисляется поправка; прибавление поправки ускоряет сходимость внутренних итераций.

Рассмотрим три тестовые задачи. Первой из них является известная задача DogLeg [13] о глубококом проникновении излучения от локализованного источника через неоднородную среду (рис. 1). Здесь область расчета заполнена плотной средой (сечение  $\sigma = 0,1$ ), содержащей прозрачный канал (сечение  $\sigma = 0,0001$ ). Сечение рассеяния в обоих материалах  $\sigma_s = \sigma/2$ . Эта задача часто используется при анализе свойств сеточных схем [7, 8, 11, 14]. В задаче ищутся значения плотности скалярного потока излучения  $\phi(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' [1/(\text{см}^2 \cdot \text{с})]$  в выбранных пространственных точках.

Вторая и третья задачи заключаются в расчете коэффициента размножения нейтронов  $K_{\text{эф}}$  в двухгрупповой модели легководного реактора (light water reactor — LWR-задача, рис. 2) и в четырехгрупповой модели быстрого реактора-размножителя (fast breeder reactor — FBR-задача, рис. 3) [15]. LWR-задача рассматривается в двух вариантах, когда управляющий стержень вытасчен (вариант 1) и вставлен (вариант 2). Также в двух вариантах рассматривается FBR-задача: управляющий стержень вытасчен полностью, канал заполнен натрием (вариант 1) и стержень вытасчен наполовину (вариант 2).

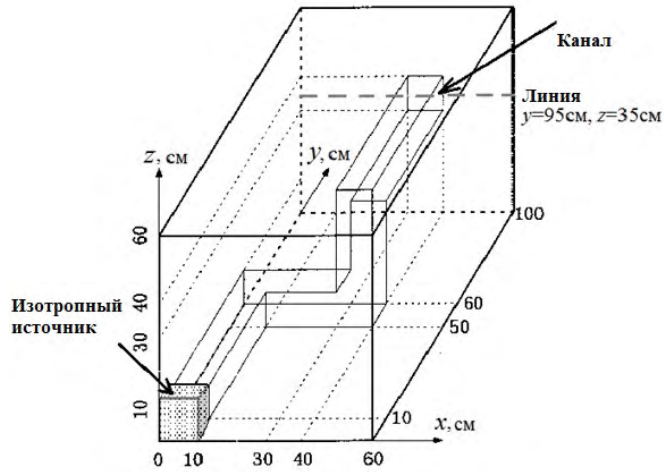


Рис. 1. Область расчета в задаче DogLeg



Рис. 2. Область расчета в LWR-задаче

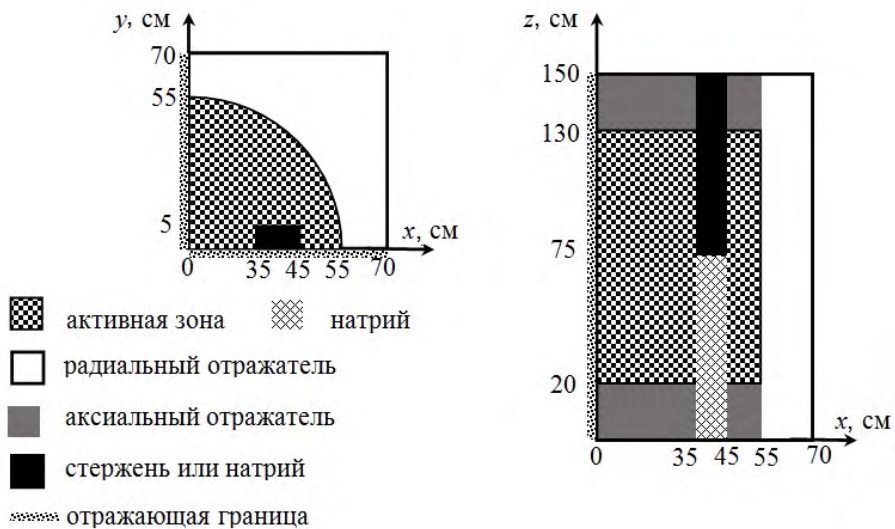


Рис. 3. Область расчета в FBR-задаче с наполовину вытащенным стержнем

Точное решение во всех задачах получено методом Монте-Карло.

Расчет каждой задачи выполняется на двух наборах последовательно сгущающихся пространственных сеток. Один набор содержит сетки с ячейками-тетраэдрами, другой — состоит из сеток с ячейками-призмами. Все сетки построены с использованием пакета Salome [16].

Каждая сетка характеризуется двумя параметрами — средним радиусом ячейки  $r$  (радиусом сферы того же объема) и параметром качества  $a$  (см. выражение (38)). Каждой тетраэдрической сетке соответствует призматическая сетка с таким же значением среднего радиуса  $r$ . На рис. 4 приведены графики зависимости параметра  $a$  от среднего радиуса ячейки для трех задач и всех сеток. Можно видеть, что параметр  $a$  меньше для призматических ячеек, чем для тетраэдрических, особенно для густых сеток.

Отметим, что в первых двух задачах (DogLeg и LWR) все границы между материалами плоские и точно задаются с помощью граней ячеек сетки. В FBR-задаче активная зона и аксиальный отражатель — цилиндрические (см. рис. 3). В первоначальных сеточных расчетах [15] использовались кубические регулярные сетки, при этом цилиндр задавался набором параллелепипедов. Здесь границы цилиндра аппроксимируются гранями тетраэдров или призм. При этом объем активной зоны задается с точностью  $+1\%$ , а аксиальных отражателей — с точностью  $-1\%$ .

Расчет задачи DogLeg глубокого проникновения выполняется на последовательно сгущающихся угловых сетках Карлсона ES<sub>8</sub>, ES<sub>12</sub>, ES<sub>18</sub>, ES<sub>26</sub>, ES<sub>38</sub>. Каждая из этих сеток содержит примерно в два раза больше узлов, чем предыдущая. При расчетах величины  $K_{эф}$  в LWR- и FBR-задачах используется угловая сетка Карлсона ES<sub>8</sub>. Все расчеты выполнены на суперкомпьютере МВС-10П Межведомственного суперкомпьютерного центра [17].

На рис. 5, 6 представлены результаты расчетов задачи DogLeg — скалярные потоки нейтронов на линии  $y = 95$  см,  $z = 35$  см. Эта линия расположена на дальней границе области и проходит через канал (см. рис. 1).

На рис. 5 приведены скалярные потоки, полученные на самой густой угловой сетке ES<sub>38</sub> с различными пространственными сетками. Можно видеть, что сеточные решения сходятся к *точному*, хотя и неравномерно. При этом скорость сходимости для сеток обоих типов приблизительно одинакова.

На рис. 6 представлены скалярные потоки, полученные на самых густых пространственных сетках (средний радиус  $r = 0,667$  см) с последовательно сгущающимися угловыми сетками. Здесь наблюдается монотонная сходимость к точному решению. При этом скорость сходимости не зависит от типа ячеек сетки.

На рис. 7, 8 представлены ошибки (в %) расчета величины  $K_{эф}$  в LWR- и FBR-задачах:  $\Delta = |1 - \kappa_{эф}^{сеточное} / \kappa_{эф}^{точное}| \cdot 100\%$ . Ошибки даны в зависимости от среднего радиуса ячейки  $r$ . Можно видеть, что полученные в сеточном расчете значения  $K_{эф}$  сходятся к точным значениям (полученным методом Монте-Карло) быстрее, если используются призматические сетки. Большая точность схемы

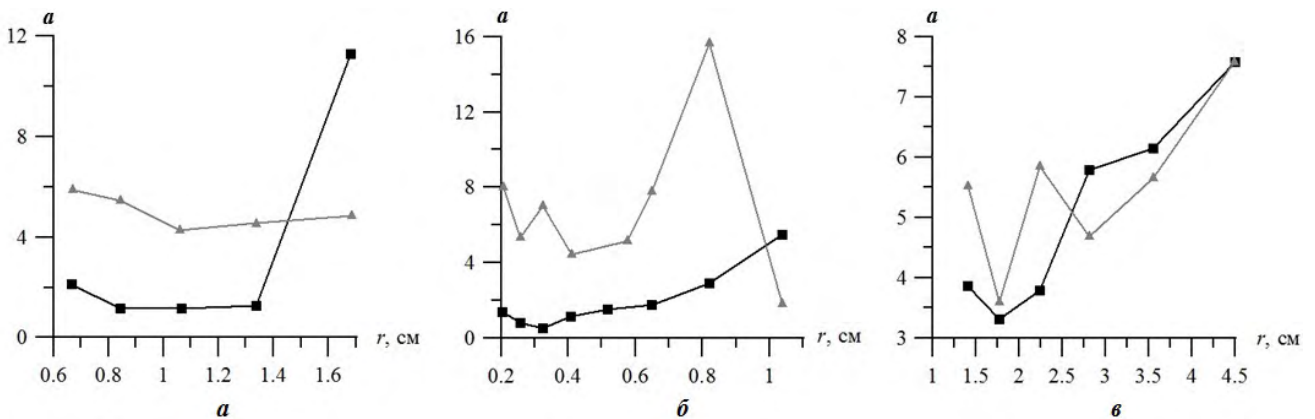


Рис. 4. Параметр качества сетки для задачи DogLeg (а), LWR-задачи (б), FBR-задачи (в): —■— — призматические сетки, —▲— — тетраэдрические сетки

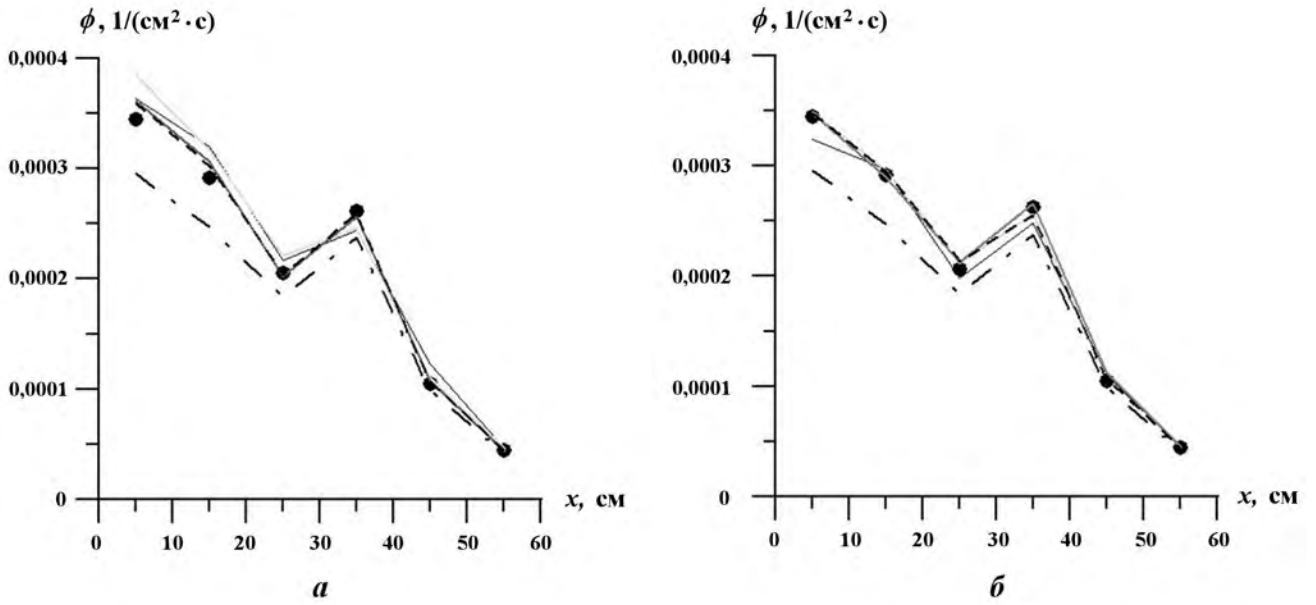


Рис. 5. Задача DogLeg. Скалярные потоки нейтронов на линии  $y = 95$  см,  $z = 35$  см; угловая сетка  $ES_{38}$ :  $a$  — тетраэдрические сетки;  $b$  — призматические сетки;  $\bullet$  — точное решение; — — —  $r = 1,68$  см, — — —  $r = 1,34$  см, - · - · -  $r = 1,06$  см, — · — · —  $r = 0,843$  см, · · · ·  $r = 0,667$  см

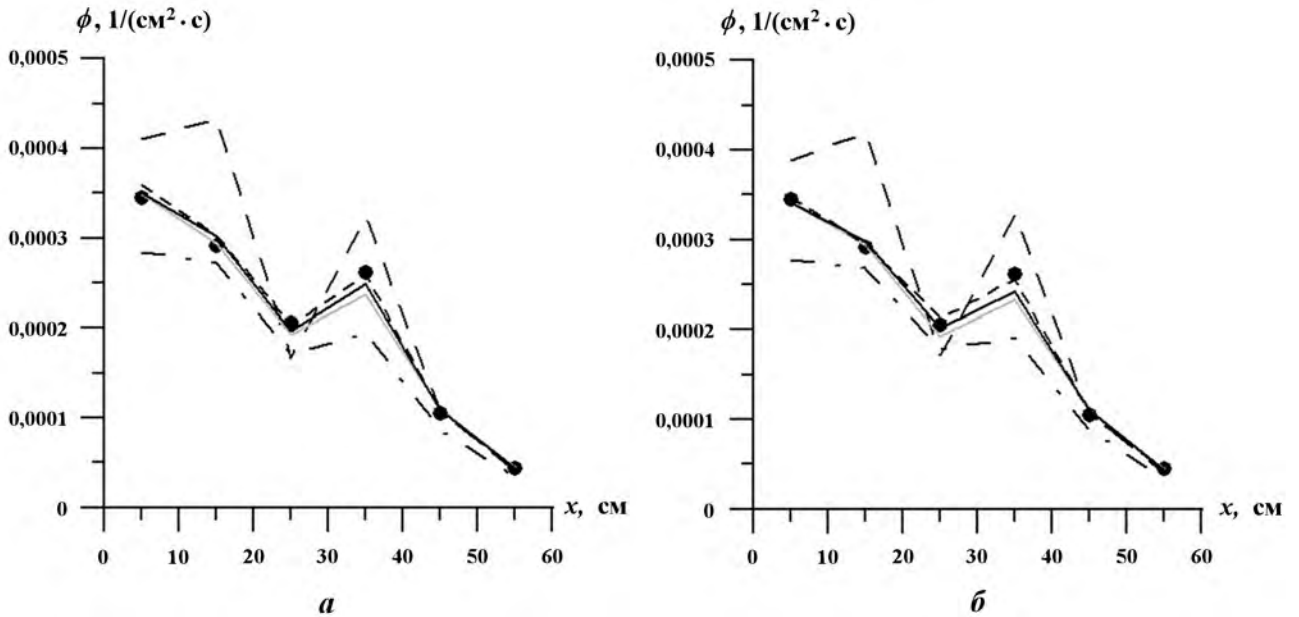


Рис. 6. Задача DogLeg. Скалярные потоки нейтронов на линии  $y = 95$  см,  $z = 35$  см:  $a$  — тетраэдрические сетки;  $b$  — призматические сетки;  $\bullet$  — точное решение; · · · · —  $ES_8$ ; — — —  $ES_{12}$ ; — · — · —  $ES_{18}$ ; — — —  $ES_{26}$ ; — — —  $ES_{38}$

метода конечных элементов на призматических сетках объясняется меньшей ошибкой локальной аппроксимации (см. формулы (36)–(38) и рис. 4).

Отметим, что в FBR-задаче отклонение полученного при сгущении сетки значения  $K_{эф}$  от результата метода Монте-Карло составляет около 0,2% (см. рис. 8). Это связано с 1%-ным различием в объеме делящегося материала, возникающим при аппроксимации цилиндрических поверхностей плоскими гранями ячеек сетки.

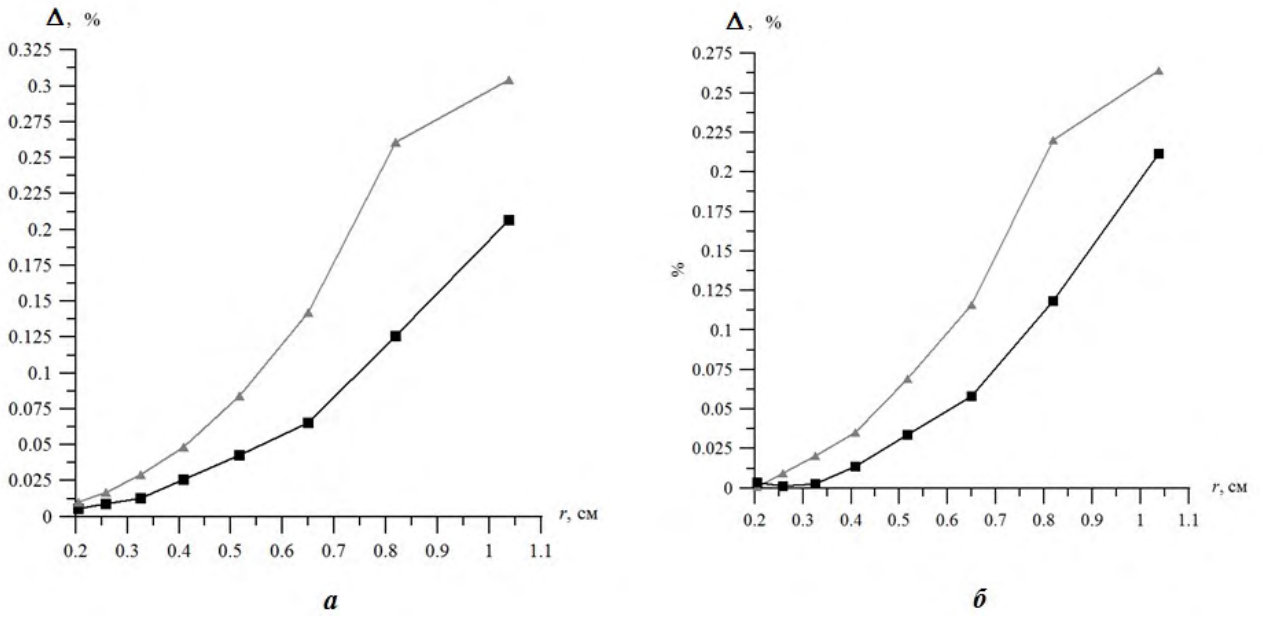


Рис. 7. Ошибки расчета  $K_{эф}$  в вариантах 1 (а) и 2 (б) LWR-задачи на сетках: —■— — призматической; —▲— — тетраэдрической

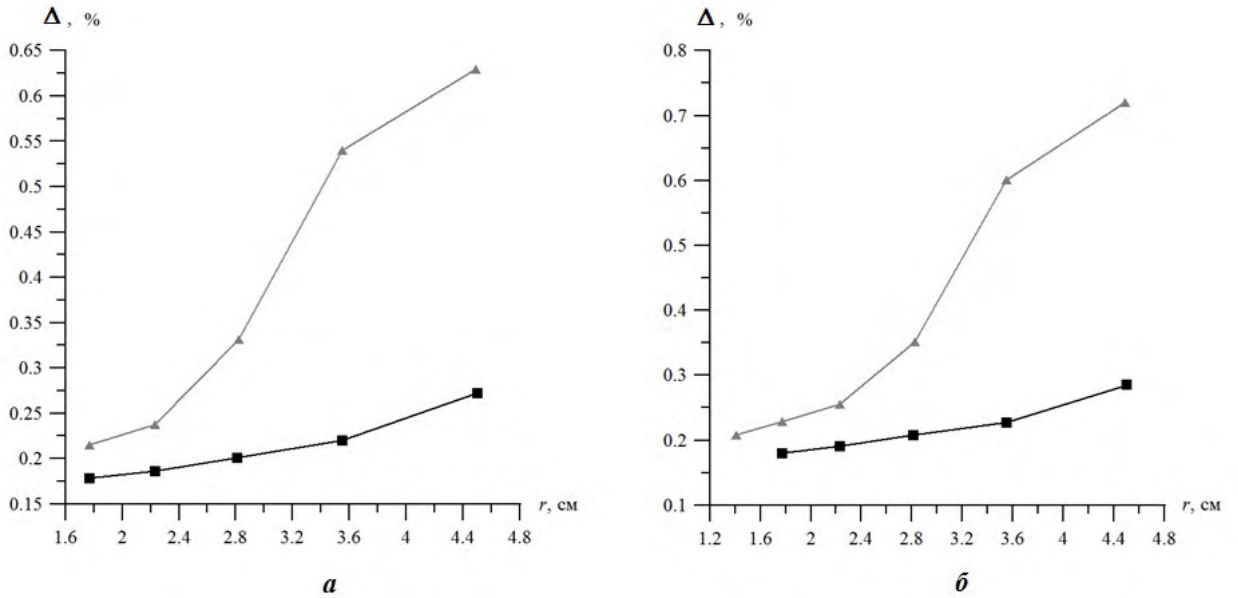


Рис. 8. Ошибки расчета  $K_{эф}$  в вариантах 1 (а) и 2 (б) FBR-задачи на сетках: —■— — призматической; —▲— — тетраэдрической

Остановимся на временах расчета. В табл. 1 приведены отношения времен расчета этапов на тетраэдрической ( $t_T$ ) и призматической ( $t_P$ ) сетках.

Первый, К-этап, — расчет по схеме метода конечных элементов в каждой ячейке — включает в себя вычисление коэффициентов сеточных уравнений и решение этих уравнений методом Гаусса. Число операций на этом этапе — порядка  $N^3$ . Здесь  $N$  — число расчетных величин:  $N = 4N_c$  для тетраэдрической сетки и  $N = 6N_c$  — для призматической, где  $N_c$  — число ячеек сетки. Таким образом, отношение времен  $t_P$  и  $t_T$  на одной внутренней итерации должно составлять  $t_P/t_T \sim 6^3/4^3 = 3,375$ .

Второй, P1-этап, — решение системы уравнений для поправки. Основной частью алгоритма этого этапа является умножение матрицы на вектор при построении системы векторов в подпространстве Крылова; такое умножение требует порядка  $N^2$  операций. Таким образом, отношение времен при построении одного вектора должно составлять  $t_P/t_T \sim 6^2/4^2 = 2,25$ . Согласно табл. 1 отношения времен в расчете близки к теоретическим оценкам.

Соотношение полных времен расчета на одной внешней итерации на сетках двух типов ( $T_P$  и  $T_T$ ) определяется равенством

$$\frac{T_P}{T_T} = \frac{6^3 N_c^3 I_P + 6^2 N_c^2 K_P}{4^3 N_c^3 I_T + 4^2 N_c^2 K_T} = \frac{54 N_c I_P + 9 K_P}{16 N_c I_T + 4 K_T}.$$

Здесь  $I_P, I_T$  — число внутренних итераций на призматической и тетраэдрической сетках соответственно;  $K_P, K_T$  — полное число векторов в подпространстве Крылова, используемых при решении системы уравнений для поправки.

Поскольку  $N_c \gg K_T, N_c \gg K_P$ , имеем соотношение

$$\frac{T_P}{T_T} = \frac{27 I_P}{8 I_T}. \quad (39)$$

Так как число итераций при решении уравнения переноса сеточным методом зависит, главным образом, от сечений взаимодействия нейтронов с заполняющими область расчета материалами, а также краевых условий, то можно заключить, что время счета на призматической сетке должно быть примерно в 3 раза больше, чем время счета на тетраэдрической сетке с таким же числом ячеек. В табл. 2 приведены значения отношений полных времен расчета на двух сетках варианта 1 FBR-задачи. Можно заключить, что выражение (39) удовлетворительно определяет это отношение.

На рис. 9 приведены графики, показывающие зависимости относительного времени счета от ошибки решения, т. е. его отклонения от значений, полученных на самой подробной сетке. За единицу принято время счета на самой грубой тетраэдрической сетке. Можно видеть, что допустимое отклонение (0,1 %) может быть достигнуто за меньшее время на призматической сетке. Однако при дальнейшем уменьшении отклонения времена сближаются. На очень подробных сетках расчет на тетраэдрах выполняется за меньшее время, чем на призмах.

Таблица 1

**Отношения времен расчета различных этапов на призматической и тетраэдрической сетках (FBR-задача, вариант 1, радиус ячейки  $r = 1,7$  см)**

Этап	$t_P/t_T$	
	расчетное	теоретическое
Расчет по схеме метода конечных элементов на одной внутренней итерации	3,39	3,375
Построение одного вектора в подпространстве Крылова	2,17	2,25

Таблица 2

**Отношения полных времен расчета на призматической и тетраэдрической сетках (FBR-задача, вариант 1)**

$r$	$T_P/T_T$	
	теоретическое	расчетное
4,5	2,53	3,0
3,6	2,56	2,77
2,8	2,1	2,83
2,2	2,11	2,96

## Заключение

Рассмотрены сеточные схемы метода конечных элементов для неструктурированных сеток из тетраэдрических или призматических ячеек. Рассмотренные схемы имеют шаблон, состоящий из вершин ячейки и вершин ее граней. Получены уравнения схем. Построено первое дифференциальное приближение к сеточным уравнениям и показано, что схемы обладают первым порядком локальной аппроксимации. Получены оценки для отношения времен счета на призматических и тетраэдрических сетках с примерно одинаковым числом ячеек.

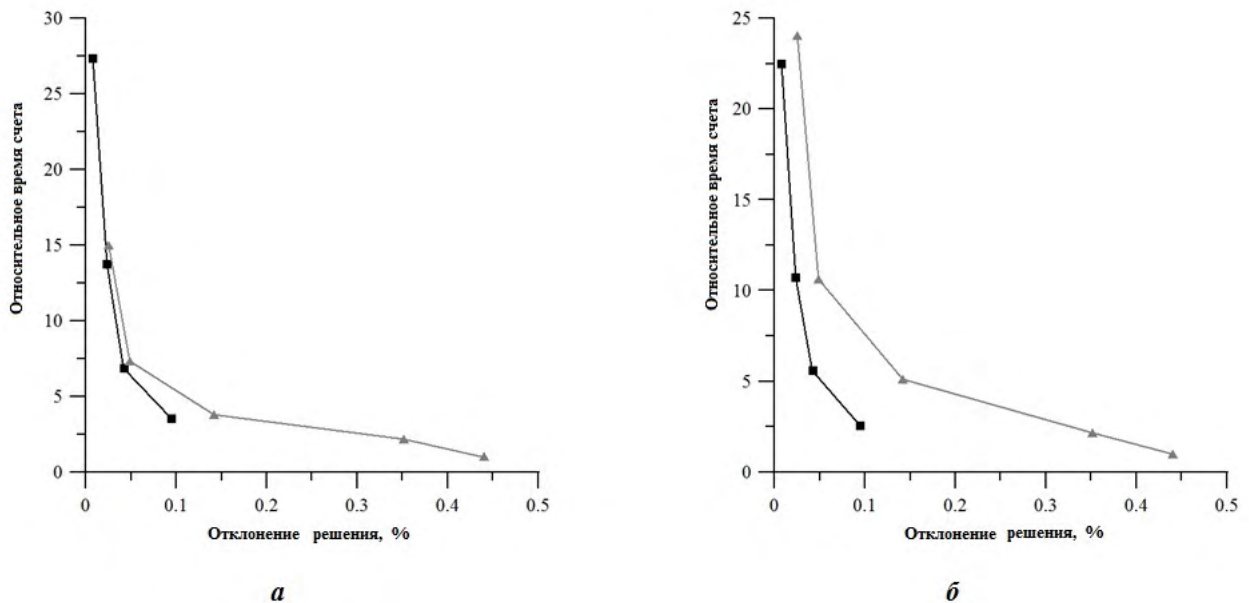


Рис. 9. Относительное время счета в зависимости от ошибки решения LWR-задачи (а) и FBR-задачи (б), варианты 1 (стержень вытасчен): —■— — призматические сетки; —▲— — тетраэдрические сетки

Приведены результаты решения с помощью рассматриваемых схем тестовых задач на определение коэффициента размножения нейтронов  $K_{эф}$  в моделях легководного реактора и реактора-размножителя. Показано, что расчетный результат с достаточной точностью (0,2 %) за меньшее время достигается на призматической сетке. При увеличении требований к точности меньшее время занимает расчет на тетраэдрической сетке.

На решении известной задачи DogLeg о глубоком проникновении излучения от локализованного источника показано, что при расчете локальных значений (потоков нейтронов в выбранных точках) схема на призматических и тетраэдрических сетках порождает близкие результаты.

### Список литературы

1. Ferrer R. M, Azmy Y. Y. A robust arbitrarily high-order transport method of the characteristic type for unstructured grids // Nucl. Sci. and Eng. 2012. Vol. 172, No 1. P. 33–51. DOI:10.13182/NSE10-106.
2. Скалько Ю. И., Карасев Р. Н., Акопян А. В., Цыбулин И. В., Мендель М. А. Маршевый алгоритм решения задачи переноса излучения методом коротких характеристик // Компьютерные исследования и моделирование. 2014. Т. 6, № 2. С. 203–215.  
Skalko Yu. I., Karasev R. N., Akopyan A. V., Tsybulin I. V., Mendel M. A. Marshevy algoritm resheniya zadachi perenosa izlucheniya metodom korotkikh kharakteristik // Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie. 2014. T. 6, № 2. S. 203–215.
3. Николаева О. В. Нодальная сеточная схема для уравнения переноса излучения на неструктурированной тетраэдральной сетке // Математическое моделирование. 2015. Т. 27, № 5. С. 80–96. DOI: 10.1134/S2070048215060071.  
Nikolaeva O. V. Nodalnaya setochnaya skhema dlya uravneniya perenosa izlucheniya na nestrukturnirovannoy tetraedralnoy setke // Matematicheskoe modelirovanie. 2015. T. 27, № 5. S. 80–96. DOI: 10.1134/S2070048215060071.
4. Аристова Е. Н., Астафуров Г. О. Метод коротких характеристик второго порядка для решения уравнения переноса на сетке из тетраэдров // Там же. 2016. Т. 28, № 7. С. 20–30. DOI:10.1134/S2070048217010045.



- Aristova E. N., Astafurov G. O.* Metod korotkikh kharakteristik vtorogo poryadka dlya resheniya uravneniya perenosa na setke iz tetraedrov // Tam zhe. 2016. T. 28, № 7. S. 20—30. DOI:10.1134/S2070048217010045.
5. *Wareing T. A., McGhee J. M., Morel J. E., Pautz S. D.* Discontinuous finite element  $S_n$  methods on three-dimensional unstructured grids // Nucl. Sci. Eng. 2001. Vol. 138, No 3. P. 256—268. DOI:10.13182/NSE138-256.
  6. *Цыбулин И. В.* Разработка численных методов для решения уравнения переноса излучения и их реализация с использованием графических ускорителей: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. М.: МФТИ, 2015.  
*Tsybulin I. V.* Razrabotka chislennykh metodov dlya resheniya uravneniya perenosa izlucheniya i ikh realizatsiya s ispolzovaniem graficheskikh uskoriteley: Avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk. M.: MFTI, 2015.
  7. *Сычугова Е. П., Селезнев Е. Ф.* Метод конечных элементов для решения уравнения переноса нейтронов на неструктурированных тетраэдральных сетках: Препринт № ИБРАЕ-2014-03. М.: ИБРАЭ РАН, 2014.  
*Sychugova E. P., Seleznev E. F.* Metod konechnykh elementov dlya resheniya uravneniya perenosa neytronov na nestrukturovannykh tetraedralnykh setkakh: Preprint № ИБРАЕ-2014-03. М.: ИБРАЭ РАН, 2014.
  8. *Николаев А. А.* Совершенствование геометрических опций SN-кода PMSNSYS-II // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика ядерных реакторов. 2017. № 1. С. 143—147.  
*Nikolaev A. A.* Sovershenstvovanie geometricheskikh optsiy SN-koda PMSNSYS-II // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Fizika yadernykh reaktorov. 2017. № 1. S. 143—147.
  9. *Han W., Huang J., Eichholz J.* Discrete-ordinate discontinuous galerkin methods for solving the radiative transfer equation // SIAM J. Sci. Comput. 2010. Vol. 32, No 2. P. 477—497. DOI: 10.1137/090767340.
  10. *Schunert S., Azmy Y.* Comparison of Spatial Discretization Methods for solving the SN equations using a three-dimensional method of manufactured solutions benchmark suite with escalating order of nonsmoothness // Nucl. Sci. Eng. 2015. Vol. 180. P. 1—29. DOI: 10.13182/NSE14-77.
  11. *Николаева О. В., Казанцева А. С.* Сравнение свойств сеточных схем для решения уравнения переноса на неструктурированных тетраэдрических сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2019. Вып. 1. С. 3—18.  
*Nikolaeva O. V., Kazantseva A. S.* Sravnenie svoystv setochnykh skhem dlya resheniya uravneniya perenosa na nestrukturovannykh tetraedricheskikh setkakh // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2019. Вып. 1. S. 3—18.
  12. *Николаева О. В., Басс Л. П., Гайфулин С. А.* Параллельные алгоритмы решения уравнения переноса нейтронов в защитах ядерных реакторов на неструктурированных тетраэдрических сетках в программе РадугаТ // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2018): труды межд. науч. конф. (2—6 апреля 2018 г., г. Ростов-на-Дону). Челябинск: ЮУрГУ, 2018. С. 319—331.  
*Nikolaeva O. V., Bass L. P., Gayfulin S. A.* Parallelnye algoritmy resheniya uravneniya perenosa neytronov v zashchitakh yadernykh reaktorov na nestrukturovannykh tetraedricheskikh setkakh v programme RadugaT // Parallelnye vychislitelnye tekhnologii (PaVT'2018): trudy mezhd. nach. konf. (2—6 aprelya 2018g., g. Rostov-na-Donu). Chelyabinsk: YuUrGU, 2018. S. 319—331.
  13. *Kobayashi K., Sugimura N., Nagaya Y.* 3D radiation transport benchmark problems and results for simple geometries with void region // Progress in Nuclear Energy. 2001. Vol. 39, No 2. P. 119—144. DOI:10.1016/S0149-1970(01)00007-5.
  14. *Suslov I.* Improvements in the Long Characteristics Method and their efficiency for deep penetration calculations // Ibid. P. 223—242. DOI:10.1016/S0149-1970(01)00014-2.
  15. *Takeda T., Ikeda H.* 3-D neutron transport benchmarks // J. Nucl. Sci. Tech. 1991. Vol. 28, No 7. P. 656—669. DOI: 10.1080/18811248.1991.9731408.



16. The Open Source Integration Platform for Numerical Simulation. <http://www.salome-platform.org/>
17. Межведомственный суперкомпьютерный центр. <http://www.jscc.ru/resources/hpc/#item1459>.  
Mezhvedomstvenny superkompyuterny tsentr. <http://www.jscc.ru/resources/hpc/#item1459>.

Статья поступила в редакцию 17.06.19.

ACCURACY OF FEM SCHEMES FOR SOLVING THE TRANSPORT EQUATION ON UNSTRUCTURED TETRAHEDRAL AND PRISMATIC GRIDS / O. V. Nikolaeva, A. S. Kazantseva (M. V. Keldysh IAM of RAS, Moscow).

The paper presents testing and analysis results for the grid schemes of the finite element method (FEM) used to solve the transport equation on unstructured grids with two types of cells: tetrahedrons and triangular prisms. The first-order differential approximation has been obtained for these schemes. The grid solution convergence has been numerically studied using a condensing spatial grid in the problem of interpenetrating radiation and in models of a thermal reactor and a fast reactor. Relative runtimes depending on the result accuracy degree are given.

*Keywords:* transport equation, unstructured grids, tetrahedral grids, prismatic grids, the finite element method.

---