Еще раз о бесконечности

Б. Е. ГРИНЕВИЧ

Понятию бесконечность отведено важное место как в философии, так и в математике, в частности, в теории множеств. Слово «бесконечное» можно понимать по-разному: или как то, что может превзойти любое конечное, или как то, что актуально превосходит любое конечное. В связи с этим в философии появились понятия потенциальной и актуальной бесконечности. В качестве примера потенциальной бесконечности можно привести ряд натуральных чисел. Примером актуальной бесконечности Г. Кантор называл число точек отрезка числовой оси [0–1]. Потенциальная бесконечность связана с бесконечным процессом, например, деления отрезка на части, а актуальная – с результатом этого процесса.

Античная мысль, в основном, рассматривает бесконечность как нечто неоформленное, «не ставшее» и следовательно несовершенное. Для Аристотеля не существует ни актуально бесконечного тела (конечен сам космос), ни бесконечной последовательности причин (т. к. в противном случае, по Аристотелю, отсутствовала бы первоначальная истинная причина движения). Актуальная бесконечность не дана ни чувствам, ни уму. Понятие актуальной бесконечности введено в математику Г. Кантором в конце XIX века, однако даже такие энтузиасты математических теорий бесконечного, как Д. Гилберт, охотно соглашались с тем, что понятие актуальной бесконечности — это только идея, не имеющая никакого отношения к реальному миру. В статьях, опубликованных ранее в журнале «Атом», автор рассматривал некоторые философские «О времени и о множествах» (№ 73, 2017 г.) и математические «Три кризиса в истории математики» (№ 82, 2019 г.) аспекты понятия «бесконечность». Так, в частности, в статье «Три кризиса в истории математики» содержится критика учения Кантора. Настоящая статья подводит итог исследованиям автора в данной области.

Еще раз повторю: в качестве примера актуальной бесконечности Г. Кантор приводил число точек на отрезке [0–1]. Что такое точка? Когда мы говорим о точках на числовой оси, то сам термин точка не вполне адекватен тому, что под ним подразумевают. На самом деле, мы говорим об одном из концов отрезка с началом, совпадающим с началом координат, и длиной, выраженной в данных условных единицах. Понятие длины к точке отношения не имеет. Точка не имеет размеров, размерности и не является элементом оси. Образно говоря, точка имеет такое же отношение к оси, как километровый столб к дороге. Дорога может состоять из асфальта, бетона и т. п., но не из километровых столбов. Я не понимаю, как те люди, которые требуют наличия дифференциала (бесконечно малой величины, сохраняющей свойства элементов множества) при интеграле, берутся считать число точек на отрезке прямой. Пусть тогда скажут, сколько секунд содержится в килограмме.

Мне могут возразить, что речь идет не о точках, а о действительных числах. Приведем знаменитое доказательство Кантора о неравномощности бесконечностей, которое он сообщил в 1891 г. на съезде естествоиспытателей в Галле. Был выдвинут тезис: множество натуральных чисел N и множество действительных чисел R неравномощны.

Пусть $a_0, a_1, a_2 \ldots$ – произвольный список счетного числа действительных чисел из отрезка [0; 1]. Покажем, что на отрезке [0; 1] найдется число, не попавшее в этот список. Рассмотрим список чисел $a_0, a_1, a_2 \ldots$ вместе с их десятичными представлениями:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,\ \alpha_{00}\alpha_{01}\alpha_{02}\alpha_{03}\ldots\ ; \\ a_1 &= 0,\ \alpha_{10}\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\ ; \\ a_2 &= 0,\ \alpha_{20}\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\ ; \\ a_3 &= 0,\ \alpha_{30}\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\ ; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Положим, $\beta_i = 1$, если $\alpha_{i,j} = 2$, и $\beta_i = 2$, если $\alpha_{i,j} \neq 2$. Число $\beta = 0,\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3\ldots$ лежит на отрезке [0; 1] и отличается, по крайней мере, первой цифрой после запятой от первого числа из списка, второй цифрой – от второго числа, третьей цифрой – от третьего и т. д.

Следовательно, число β не содержится в списке. Таким образом, невозможно составить список, включающий все числа отрезка [0;1], и, значит, множество всех действительных чисел отрезка [0;1] несчетно.

Про себя заметим, что это доказательство очевидно для конечного числа элементов, но для бесконечного нельзя это утверждать с полной определенностью. Действительно, сколько бы мы ни искали диагональный элемент, мы никогда его не найдем в силу бесконечности десятичной дроби. Все остальные доказательства несчетности также основаны на признании существования актуальной бесконечности. А если это не так?

Попробуем доказать, что множество всех действительных чисел счетно.

Приведем каждое действительное число к следующему виду: после запятой поставим одни нули. Первая цифра перед запятой будет соответствовать первой цифре перед запятой в преобразуемом действительном числе. Вторая цифра будет соответствовать первой цифре после запятой в преобразуемом числе. Третья цифра будет соответствовать второй цифре перед запятой в преобразуемом числе. Четвертая цифра будет соответствовать второй цифре после запятой и так далее. Например, число π – 3,1415926… примет вид …60209050104013, 0000… В результате преобразования получится упорядоченный набор целых положительных чисел, каждому из которых поставлено в однозначное соответствие одно действительное число. Все! Числа перенумерованы. Бесконечная величина номеров чисел в наборе не должна смущать. Наивно полагать, что у бесконечного числа элементов будут конечные номера. Когда же мы называем конечный номер, то в неявном виде предполагаем, что перед первой значащей цифрой у него стоят одни нули.

Кроме диагонального способа доказательства несчетности множества действительных чисел существуют и другие. Общим для всех этих доказательств является принятие гипотезы существования актуальной бесконечности, что ничем не подтверждено. Принятие этой гипотезы ведет к появлению ряда парадоксов, хорошо описанных в литературе (парадокс лжеца, парадокс Рассела и т. д.). В философском понимании вопроса принятие гипотезы о существовании актуальной гипотезы означает попытку судить о том, о чем никто понятия не имеет. Можно делать суждения о каждом элементе бесконечного множества, но нельзя судить обо всех элементах. Приведу пример. Возьмем натуральный ряд чисел. Для любого элемента этого ряда можно найти элемент, величина которого больше данного, но этого нельзя сделать для всех элементов.

В математике для логических операций, ограничивающих область истинности какого-либо предиката и создающих высказывание, используют кванторы. Квантор всеобщности $\forall$ обычно читают «для каждого», «для любого», «для всех». В силу сказанного выше, считаю прочтение «для всех» неверным. Семантическую разницу можно уловить из приведенного выше примера.

Коротко суммируя все, сказанное выше, приходим к выводам:

– понятие актуальной бесконечности не заслуживает права на существование;

– нет множеств с мощностью выше мощности счетного множества;

– нет миров более сложных и совершенных, чем тот, в котором мы живем.

И с этим стоит жить.

ГРИНЕВИЧ Борис Евгеньевич –
главный научный сотрудник ИЛФИ РФЯЦ-ВНИИЭФ,
доктор физ.-мат. наук