

УДК 530.12:531.51, 537.874

Рассеяние длинноволнового электромагнитного излучения на центрально- симметричном гравитационном поле

С. Ф. Гаранин, Е. М. Кравец

Рассматривается рассеяние электромагнитного излучения на центрально-симметричном гравитационном поле в случае длинных волн $\lambda \gg a, r_g$ (a – радиус рассеивателя, r_g – его гравитационный радиус). С учетом поправок к галилеевым значениям метрики на больших расстояниях вычислены поправки к электромагнитному полю плоской волны, а затем найдено сечение рассеяния. Такой метод вычислений отличается от описанных в литературе методов расчета с помощью функций Грина и фейнмановских диаграмм. Дифференциальное сечение в длинноволновом пределе сравнивается с сечениями рассеяния на черной дыре ультрарелятивистских классических частиц и электромагнитных волн с промежуточной длиной волны $\lambda \sim r_g$.

Введение

Движение ультрарелятивистских частиц и лучей света в центрально-симметричном гравитационном поле описывается классическими формулами [1]. Отклонение луча света при движении в гравитационном поле является одним из экспериментальных тестов общей теории относительности. При этом считается, что частицы являются классическими и их волновыми свойствами можно пренебречь вплоть до расстояний порядка гравитационного радиуса $r_g \equiv 2GM/c^2$. Законно поставить вопрос о том, в каком предельном случае это справедливо и как описывать движение частиц в противоположном предельном случае?

Отклонение луча, пролетающего мимо центра с прицельным параметром ρ , в классическом приближении оказывается равным [1] $\theta = \frac{2r_g}{\rho}$. Так как неопределенность поперечной составляющей волнового вектора Δk должна определяться неопределенностью в прицельном параметре $\Delta \rho$, т. е. $\Delta k \sim 1/\Delta \rho$, а $\Delta \rho$ должно быть мало по сравнению с ρ , то $\Delta k \gg 1/\rho$. Следовательно, и неопределенность в угле отклонения $\Delta \theta \sim \Delta k/k$ не может быть меньше $\Delta \theta \sim 1/k\rho \sim \lambda/\rho$. Поскольку для применимости классического подхода к задаче должно быть $\theta \gg \Delta \theta$, получаем критерий этого подхода в виде $\lambda \ll r_g$.

Рассмотрим противоположный предельный случай

$$\lambda \gg r_g. \quad (1)$$

Считая, что метрика на больших расстояниях изменяется на $\sim r_g/r$ и рассматривая решение волнового уравнения с помощью теории возмущений, можно получить, что возмущения решения будут малы, если малы $kr r_g/r \sim kr_g$. Таким образом, в случае (1) рассеяние волны можно рассчитывать по теории возмущений с тем большей точностью, чем лучше выполнен этот критерий. Что касается малых расстояний, то детали поведения метрики на расстояния меньше длины волны не должны сказываться на рассеянии, поэтому (например, для черных дыр) интегралы в формулах теории возмущений можно распространять вплоть до нулевого радиуса.

Ситуация с рассеянием излучения в гравитационном поле почти аналогична ситуации с рассеянием на кулоновском потенциале в квантовой механике [2]: если потенциал можно считать достаточно сильным, необходимо использовать классический подход, а если потенциал достаточно слабый, можно применять для описания рассеяния борновское приближение. Имеется, однако, отличие задачи о рассеянии излучения в гравитационном поле от квантово-механической кулоновской задачи, состоящее в том, что в последней классический подход применим для медленных частиц, а рассеяние быстрых энергичных частиц можно описывать с помощью теории возмущений. Для рассеяния излучения в гравитационном поле, наоборот, классика работает для коротковолнового энергичного излучения, а теория возмущений пригодна в длинноволновом пределе.

Рассеяние длинноволнового излучения слабым гравитационным полем изучалось ранее методом функций Грина в искривленном пространстве-времени [3] и методом фейнмановских диаграмм [4]. В настоящей работе проведены расчеты по теории возмущений элементарным способом, что может представлять интерес, например, в качестве задачи для [1]. Рассмотренный длинноволновой предел является универсальным и применим к любым гравитирующим объектам, если выполняется условие $\lambda \gg a$ (a – характерный размер объекта).

Рассеяние волн черной дырой изучалось также для случая гравитационных волн в работе [5] и для интерференции волн при рассеянии назад («глюрия») [6]. При этом авторы [5] решали задачу с помощью разложения падающих волн по сферическим гармоникам, а задача рассматривалась для случая промежуточных $\lambda \sim r_g$ или коротких длин волн $\lambda \ll r_g$. Авторы [6] использовали обобщенное ВКБ приближение, и их результат справедлив в случае $\lambda \ll r_g$, противоположном исследуемому в данной работе длинноволновому пределу (1). Рассеяние электромагнитных волн черной дырой изучалось недавно в работе [7], авторы которой, как и авторы [5], решали задачу с помощью разложения падающих волн по сферическим гармоникам и не рассматривали длинноволновой предел. Представляет интерес сравнение сечения рассеяния в длинноволновом пределе с сечением рассеяния ультрарелятивистских частиц на черной дыре, а также с сечением рассеяния электромагнитных волн на черной дыре для случая промежуточных длин волн [7].

Постановка задачи

Уравнения электромагнитного поля в случае наличия гравитационного поля имеют вид [1]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} F^{ik}) = 0, \quad (2)$$

где F^{ik} – тензор электромагнитного поля, определяемый через потенциалы,

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \quad (3)$$

g – определитель, составленный из метрического тензора g_{ik} .

Для метрики Шварцшильда на больших расстояниях малые добавки к галилеевым значениям $g_{ik}^{(0)}$ даются величинами [1]

$$h_{00} = -\frac{r_g}{r}, \quad h_{\alpha\beta} = -\frac{r_g}{r} n_\alpha n_\beta, \quad h_{0\alpha} = 0, \quad (4)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор в направлении \mathbf{r} . Из (4) следует, что с точностью до величин первого порядка $g = -1$.

В нулевом приближении считаем, что имеется плоская электромагнитная волна $A_i^{(0)} = A_{0i}^{(0)} \exp(i(\mathbf{kr} - \omega t))$. Задача состоит в том, чтобы учесть поправки к метрике (4), вычислить связанные с ними поправки к электромагнитному полю и затем определить сечение рассеяния.

Неоднородные члены в уравнениях электромагнитного поля

Если поправки к электромагнитному полю плоской волны малы, то тензор F^{ik} можно записать в виде

$$F^{ik} = F^{(0)ik} + F^{(1)ik},$$

где $F^{(0)ik}$ – решение уравнения (2) при отсутствии гравитационного поля, $F^{(1)ik}$ – возмущение.

Поправки к контравариантным компонентам метрического тензора g^{ik} даются формулами [1]

$$g^{ik} = g^{ik(0)} - h^{ik} \quad (5)$$

(подъем и опускание индексов осуществляем с помощью невозмущенной галилеевой метрики).

Вычисляя поправки в уравнении (2), связанные с гравитационным полем (5), с учетом (3) получим уравнение для возмущения векторного потенциала поля $A^{(1)i}$:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A^{(1)i}}{\partial t^2} - \Delta A^{(1)i} = \frac{4\pi}{c} j^i, \quad (6)$$

$$\text{где } \frac{4\pi}{c} j^i = -\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\left(h^{il} g^{(0)km} + g^{(0)il} h^{km} \right) F_{lm}^{(0)} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x^k} \tilde{F}^{ik}.$$

Используя (4), получим для неоднородных членов в тензоре электромагнитного поля

$$\tilde{F}^{0\alpha} = -\tilde{F}^{\alpha 0} = \frac{r_g}{r} (E^\alpha + n^\alpha n_\beta E^\beta), \quad \tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{r_g}{r} (n^\alpha n^\gamma F_{\gamma}^{(0)\beta} + n^\beta n^\gamma F_{\gamma}^{(0)\alpha}) \quad (7)$$

(здесь через E^α и $F_{\alpha\beta}^{(0)}$ обозначены электрическое поле плоской электромагнитной волны и пространственные компоненты ее тензора, т. е. магнитное поле). Подставляя (7) в пространственные компоненты уравнения (2) и учитывая, что для плоской электромагнитной волны

$$E^\alpha = -i \frac{\omega}{c} A^{(0)\alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^{(0)\beta\gamma} = -k_\alpha k^\beta A^{(0)\gamma} + k_\alpha k^\gamma A^{(0)\beta},$$

получим неоднородную часть уравнения (2) в виде

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = ik \frac{r_g}{r} [-\mathbf{E} + \kappa(\kappa\mathbf{n})(\mathbf{nE}) - (\kappa\mathbf{n})^2 \mathbf{E}],$$

где $\kappa^\alpha = k^\alpha/k$.

Поле рассеянной волны

Для получения решения волнового уравнения в первом порядке (6) используем формулу для запаздывающих потенциалов [1]. Выражение для возмущения векторного потенциала поля на больших расстояниях R запишется в виде:

$$\mathbf{A}^{(1)} = \frac{1}{cR} \int \mathbf{j} \left(t - \frac{R}{c} + \frac{\mathbf{Rr}}{Rc} \right) dV = -ik \frac{e^{i(kR-\omega t)}}{4\pi R} \int \frac{r_g}{r} \exp(-i\mathbf{qr}) \left[\mathbf{E}_0 - \kappa(\kappa\mathbf{n})(\mathbf{nE}_0) + (\kappa\mathbf{n})^2 \mathbf{E}_0 \right] dV, \quad (8)$$

где \mathbf{E}_0 – амплитуда электрического поля электромагнитной волны, $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$, а \mathbf{k}' – волновой вектор рассеянной волны.

Вычисление интеграла в выражении (8) дает

$$\mathbf{A}^{(1)} = -ik \frac{e^{i(kR-\omega t)}}{R} \frac{2r_g}{q^2} \left[\mathbf{E}_0 + \frac{1}{q^2} \kappa(\kappa\mathbf{q})(\mathbf{qE}_0) - \frac{1}{q^2} (\kappa\mathbf{q})^2 \mathbf{E}_0 \right]. \quad (9)$$

Сечение рассеяния

Дифференциальное сечение рассеяния задается формулой $d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\overline{S}}$ (черта над буквой означает усреднение по времени). Средняя (по времени) интенсивность излучения, рассеянного в телесный угол do , равна $\overline{dI} = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} |H|^2 R_0^2 do$. Плотность потока энергии в падающей волне

$\overline{S} = \frac{c}{8\pi} |H|^2$. Так как в плоской монохроматической волне $\mathbf{H} = i[\mathbf{kA}]$, то с учетом (9) получим

$$d\sigma = \frac{r_g^2}{(1 - \cos\theta)^2} \left[\mathbf{k}', \mathbf{e} + (\kappa\mathbf{q})(\mathbf{ek}')\kappa/q^2 - (\kappa\mathbf{q})^2 \mathbf{e}/q^2 \right]^2 do, \quad (10)$$

где θ – угол рассеяния, \mathbf{e} – вектор поляризации падающей волны, $\mathbf{k}' = \mathbf{k}'/k$ – единичный вектор в направлении рассеянной волны. Раскрыв в (10) квадрат векторного произведения, в соответствии с [3, 4] получим

$$\frac{d\sigma}{do} = \frac{r_g^2}{4} \text{ctg}^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (11)$$

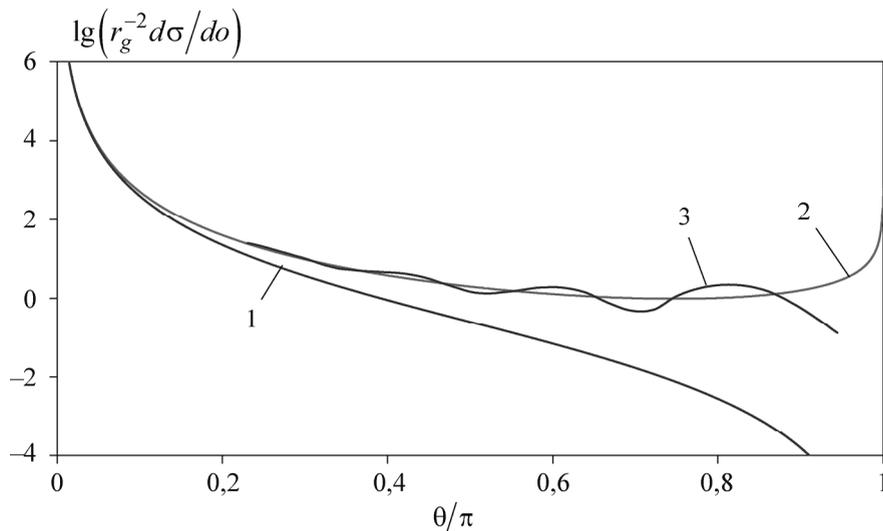
– дифференциальное сечение, не зависящее от поляризации.

При малых углах рассеяния $\theta \ll 1$ сечение (11) имеет особенность, связанную с дальнедействием ньютоновского потенциала,

$$d\sigma/d\theta \sim 4r_g^2/\theta^4. \quad (12)$$

Коэффициент в (12) совпадает с коэффициентом для дифференциального сечения рассеяния классических частиц на малые углы аналогично тому, что в задаче рассеяния на кулоновском потенциале [2] борновское приближение и классическая формула дают одинаковый результат.

Следует отметить, что сечение (11) стремится к нулю при $\theta \rightarrow \pi$ (рассеяние назад), причем очень быстро (как $(\pi - \theta)^4$). На рисунке показана зависимость дифференциального сечения (11) от θ . Там же для сравнения приведены классическое сечение рассеяния ультррелятивистских частиц на черной дыре, а также сечение рассеяния электромагнитных волн на черной дыре для промежуточного случая $\lambda = \pi r_g$ из работы [7]. Во всем диапазоне углов классическое сечение превышает волновое, асимптотически приближаясь к нему при малых углах. Характерной особенностью классического сечения является также обращение его в бесконечность при $\theta = \pi$, что связано с рассеянием частиц назад при конечных прицельных параметрах [6] и характерно для задач с падением частиц на центр (поглощением). Что касается случая $\lambda = \pi r_g$, то во всем диапазоне углов сечение рассеяния для него оказывается гораздо ближе к классическому, чем к длинноволновому. Подчеркнем, что сечение в длинноволновом пределе, приведенное на рисунке, применимо к любым объектам при выполнении условия $\lambda \gg a$, где a – размер объекта, в то время как две другие кривые являются сечениями рассеяния именно на шварцшильдской черной дыре.



Дифференциальное сечение рассеяния излучения: 1 – сечение длинноволнового рассеяния, 2 – классическое сечение рассеяния черной дырой, 3 – сечение рассеяния черной дырой для $\lambda = \pi r_g$

Заключение

При условии (1) вычислено сечение рассеяния электромагнитной волны на центрально-симметричном гравитационном поле во всем диапазоне углов рассеяния. В соответствии с [3, 4] дифференциальное сечение рассеяния длинноволнового излучения оказалось не зависящим от поляризации излучения и для малых углов совпадающим с сечением рассеяния классических частиц. При приближении углов рассеяния к π сечение рассеяния длинноволнового излучения стремится к нулю.

При условии (1) формула (11) должна быть применима для рассеяния излучения незаряженными черными дырами (эффектами вращения как эффектами второго порядка, пропорциональными $1/r^2$, при условии (1) можно пренебречь). Что касается рассеяния на других космических объектах, таких как звезды, то для применения формулы (11) во всем диапазоне углов необходимо иметь $\lambda \gg a$ (a – радиус звезды). Но даже этого условия может оказаться недостаточно, если $a \gg r_g$, тогда для расчета сечения рассеяния необходимо будет учитывать также поглощение и рассеяние волн на самом объекте. Однако гравитационное рассеяние из-за особенности (12) при условии (1) может оказаться доминирующим для достаточно малых углов.

Авторы благодарят М. В. Горбатенко и В. Б. Якубова за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. – М.: Физматлит, 2012.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. – М.: Наука, 1974.
3. Peters P. C. Differential cross sections for weak-field gravitational scattering // Phys. Rev. D. 1976. Vol. 13, N 4. P. 775–777.
4. De Logi W. K., Kovacs S. J. Gravitational scattering of zero-rest-mass plane waves // Phys. Rev. D. 1977. Vol. 16, N 2. P. 237–244.
5. Handler F. A., Matzner R. A. Gravitational wave scattering // Phys. Rev. D. 1980. Vol. 22. P. 2331–2348.
6. Matzner R. A., DeWitt-Morette C., Nelson B., Zhang T-R. Glory scattering by black holes // Phys. Rev. D. 1985. Vol. 31. P. 1869–1878.
7. Crispino L. C. B., Dolan S. R., Oliveira E. S. Electromagnetic wave scattering by Schwarzschild black holes // Phys. Rev. Lett. 2009. Vol. 102. P. 231103(4).

Long-Wavelength Electromagnetic Radiation Scattering in a Centrally Symmetric Gravitational Field

S. F. Garanin, E. M. Kravets

The paper considers the scattering of electromagnetic radiation with long wavelengths $\lambda \gg a, r_g$ (a is radius of scatterer, r_g is its gravitational radius) in a centrally symmetric gravitational field. With regard to corrections to the Galilean values of the metrics at long distances, corrections to the electromagnetic field of a plane wave have been calculated and then the scattering cross-section has been found. Such approach to calculations differs from the approaches presented in publications, i.e. calculations using Green functions and Feynman diagrams. The differential cross-section in the long-wavelength limit is compared with the black hole scattering cross-sections of ultra-relativistic classic particles and electromagnetic waves with an intermediate wavelength, $\lambda \sim r_g$.