

УДК 519.6

Об аппроксимационной вязкости разностных схем и расчеты течений вязкой жидкости

Ю. В. Янилкин, О. О. Топорова,
А. Л. Стадник, Л. Е. Корзакова

Кратко описаны исходные уравнения и разностная схема для моделирования вязких и невязких газодинамических течений многокомпонентной среды в эйлеровых переменных в коде ЭГАК. Приведена теоретическая оценка схемной вязкости разностной схемы методики. Проведены тестовые расчеты, которые показали корректность использования теоретической оценки схемной вязкости в расчетах конкретных задач.

Введение

При учете молекулярной (физической) вязкости в расчетах возникает проблема, связанная с аппроксимационной (схемной) вязкостью разностной схемы расчета уравнений Эйлера и Навье – Стокса, описывающих невязкую и вязкую жидкости (газ). В разностных схемах первого порядка аппроксимации эта величина может заметно влиять на получаемое численное решение. Влияние нефизической схемной вязкости на разностное решение во многом аналогично влиянию физической вязкости. Поэтому принципиально важно знать коэффициенты той и другой вязкости, при этом моделировать задачи с учетом физической вязкости имеет смысл только в случае малости по сравнению с ней схемной вязкости.

В данной работе вопросы, связанные с указанной проблемой, рассматриваются на примере 3D методики кода ЭГАК [1]. Ниже показано, что коэффициент схемной вязкости методики при аппроксимации невязких членов уравнений в случае квазистационарных течений прямо пропорционален размеру ячейки. В случае нестационарных течений, в частности ударно-волновых, значение схемной вязкости определяется дополнительными членами, связанными с аппроксимацией по времени. Отсюда следует, что для конкретной задачи всегда можно построить сетку, для которой схемная вязкость будет сравнима с физической или даже превалировать над ней, и тогда для этой задачи использование данной сетки не имеет особого смысла.

В первом разделе работы кратко приводится разностная схема методики. Выбор схемы обусловлен тем, что учет вязкости проводился в рамках кода ЭГАК с уже выбранными подходами к аппроксимации уравнений [2].

Второй раздел работы посвящен теоретической оценке схемной вязкости методики на основе рассмотрения первого дифференциального приближения [3].

В третьем разделе представлены результаты тестовых расчетов. На основе численного решения первой задачи Стокса (стационарной), имеющей аналитическое решение для вязкой несжима-

емой среды, показано, что для рассматриваемых течений получаемые решения ведут себя в соответствии с теоретической оценкой схемной вязкости. Тем самым продемонстрировано, что оценка схемной вязкости, получающаяся из рассмотрения первого дифференциального приближения, является корректной для методики ЭГАК. Кроме этой задачи рассматривается еще одна, подтверждающая важность учета схемной вязкости в расчетах вязких ударно-волновых течений. Таким образом, показано, что теоретическая оценка схемной вязкости вполне может быть использована в расчетах с ударно-волновыми течениями.

1. Конечно-разностные уравнения

Исходная система уравнений. Систему интегродифференциальных уравнений, описывающих трехмерные течения многокомпонентной сплошной среды с учетом вязких свойств, можно записать в виде законов сохранения для неподвижного объема V :

$$\frac{d\vec{K}}{dt} + \int_S \rho \vec{u} (\vec{u} d\vec{S}) = \int_V \text{div} T dV ; \quad (1)$$

$$\frac{dM_i}{dt} + \int_{S_i} \rho_i (\vec{u}_i d\vec{S}) = 0 ; \quad (2)$$

$$\frac{dE_i}{dt} + \int_{S_i} \rho_i e_i (\vec{u}_i d\vec{S}) = \int_{V_i} \text{Sp}(T_i D_i) dV . \quad (3)$$

Здесь $\vec{K}(K_x, K_y, K_z)$ – количество движения; $\vec{u}(u, v, w)$ – скорость; ρ – плотность; M – масса; E – внутренняя энергия; e – удельная (на единицу массы) внутренняя энергия; T – тензор вязких напряжений; D – тензор скоростей деформации; i – номер компонента среды.

Система уравнений (1)–(3) замыкается уравнениями состояния (УРСами) компонентов среды

$$P_i = P_i(\rho_i, e_i), \quad (4)$$

где P_i – давление i -го компонента.

Дифференциальные соотношения для определения девиатора тензора вязких напряжений имеют обычный вид:

$$T_{ijk}^d = \eta_i \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right), \quad (5)$$

где η – коэффициент физической вязкости; индекс i характеризует компонент среды.

При аппроксимации уравнений (1)–(3) векторные величины \vec{u}, \vec{K} определяются в узлах счетной сетки, скалярные величины $\rho_i, e_i, P_i, B_i = V_i/V$ (объемная доля), T – в центрах ячеек. Счетными ячейками являются шестигранники, в простейшем случае – кубики.

Система уравнений (1)–(5) решается численно методом расщепления на этапы. На первом этапе в предположении, что отсутствует движение среды, определяются ускорения за счет девиатора тензора вязких напряжений. На втором этапе решаются уравнения лагранжевой газодинамики,

в которых к газодинамическим ускорениям добавляются ускорения, полученные на первом этапе вычислений. Эти два этапа можно объединить в один *лагранжев этап*, так как аппроксимация уравнений производится в лагранжевых переменных. На третьем этапе строится новая счетная сетка и рассчитываются изменения газодинамических величин за счет потоков через грани ячеек, при вычислении которых используются скорости, плотности и энергии, полученные после лагранжева этапа. Отметим, что второй и третий этапы вычислений описаны в работе [1] и здесь приводятся лишь некоторые сведения, необходимые для связного изложения текста.

Аппроксимация уравнений

Исходная система уравнений и порядок их аппроксимации. Система уравнений для многокомпонентной вязкой среды на лагранжевом этапе имеет следующий вид:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \int_V \operatorname{div} T dV, \quad (6)$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \operatorname{div} \vec{u}_i, \quad (7)$$

$$\frac{dE_i}{dt} = \int_{V_i} \operatorname{Sp}(T_i^d D_i) dV_i - \int_{V_i} P_i \operatorname{div} \vec{u}_i dV_i. \quad (8)$$

Уравнения (6)–(8) замыкаются УРСами (4) и соотношениями (5).

Отметим, что при разностной аппроксимации в уравнениях к давлению добавляется искусственная вязкость, т. е. вместо P_i используется величина $P_i + q_i$.

В смешанных ячейках должны быть определены также значения компонент девиатора вязких напряжений и тензора скоростей деформации для каждого имеющегося в ячейке компонента. Правила их определения зависят от принятых предположений для замыкания уравнений газодинамики. Например, для равенства дивергенций компонентов предполагается равенство как девиатора тензора вязких напряжений, так и тензора скоростей деформации, т. е.

$$T_i^d = T^d, \quad D_i = D. \quad (9)$$

Остановимся подробнее на аппроксимации уравнений движения. Аппроксимация остальных уравнений приведена в [4].

Аппроксимация уравнений движения на лагранжевом этапе. Перепишем уравнение движения лагранжева этапа в виде

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} T^d.$$

Покомпонентно оно будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{du_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial T_{xx}^d}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}^d}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}^d}{\partial z} \right), \\
 \frac{du_y}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial T_{yx}^d}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}^d}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}^d}{\partial z} \right), \\
 \frac{du_z}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial T_{zx}^d}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}^d}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}^d}{\partial z} \right).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Приведем разностное уравнение, аппроксимирующее первое уравнение системы (10) (два остальных аппроксимируются аналогично):

$$u_x^{n+1} = u_x^n - \frac{\tau}{\rho^n} \left(\frac{\partial(\tilde{P} + q^n)}{\partial x} \right) + \frac{\tau}{\rho^n} \left[\left(\frac{\partial T_{xx}^{dn}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial T_{xy}^{dn}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial T_{xz}^{dn}}{\partial z} \right) \right]. \tag{11}$$

Здесь надчеркивание означает разностный аналог соответствующего дифференциального оператора; верхний индекс обозначает принадлежность временному слою; τ – шаг по времени; \tilde{P} отвечает спрогнозированному, «предвычисленному» значению давления и вычисляется по формуле

$$\tilde{P} = P^n - \tau \sigma (c^n)^2 \rho^n (\nabla u^n), \tag{12}$$

где $\sigma = 0,6$ – параметр, обеспечивающий устойчивость разностной схемы [5].

В уравнении (11) к давлению аддитивно добавляется искусственная вязкость, которая имеет вид

$$q^n = C_1 \rho^n \left(h^n (\nabla \bar{u}^n) \right)^2 + C_0 \rho^n c^n h^n (\nabla \bar{u}^n) \text{ при } \nabla \bar{u} < 0, \tag{13}$$

где c – скорость звука, h^n – размер ячейки. Таким образом, искусственная вязкость состоит из суммы квадратичной вязкости типа Неймана – Рихтмайера с множителем $C_1 = 1$ и линейной вязкости с множителем $C_0 = 0,2$.

Аппроксимация уравнений движения на эйлеровом этапе. Как указано выше, после лагранжева этапа производится построение новой счетной сетки и пересчет величин на эту сетку, т. е. аппроксимация конвективных членов уравнений (1)–(3). Рассмотрим случай неподвижной сетки ($\bar{u}_i^* = 0$), тогда на втором этапе решается следующая система уравнений:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} + \int_S \rho \bar{u} (\bar{u} d\bar{S}) = 0, \tag{14}$$

$$\frac{dM_i}{dt} + \int_{S_i} \rho_i (\bar{u}_i d\bar{S}) = 0, \tag{15}$$

$$\frac{dE_i}{dt} + \int_{S_i} \rho_i e_i (\bar{u}_i d\bar{S}) = 0. \tag{16}$$

Разностные уравнения, аппроксимирующие уравнения (15), (16), приведены в [4].

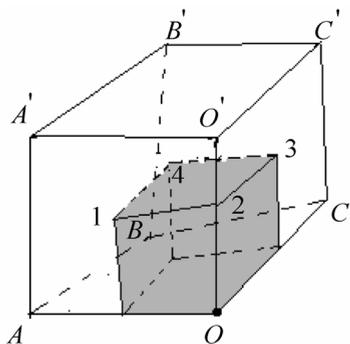


Рис. 1. Пример построения одной восьмой части вспомогательной ячейки

При аппроксимации уравнения движения (14) используется согласованная с потоками массы аппроксимация потоков количества движения. Для этого строятся вспомогательные ячейки, вершины которых лежат в восьми счетных ячейках, прилегающих к данному узлу, при этом от каждой ячейки отсекается 1/8 ее массы. На рис. 1 приведен пример построения одной восьмой части вспомогательной ячейки, прилегающей к узлу O .

Разностные уравнения движения имеют вид

$$K^{n+1} = \tilde{K} + \sum_{j=1}^6 \Delta \tilde{K}_j, \quad (17)$$

где $\tilde{K} = 0,125(M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6 + M_7 + M_8)\tilde{u}$; $\Delta \tilde{K}_j$ – потоки количества движения через грани вспомогательной ячейки.

В общем виде формула для вычисления потоков импульса имеет вид

$$\Delta \tilde{K} = \Delta M \left[\alpha \tilde{u}^d + (1 - \alpha) \tilde{u}^a \right], \quad (18)$$

где \tilde{u}^d – скорость в *донорном* узле сетки, лежащем в направлении вверх по потоку; \tilde{u}^a – скорость в *акцепторном* узле, расположенном вниз по потоку; ΔM – поток массы. Например, для потока $\Delta \tilde{K}_j$ через грань 1234 вспомогательной ячейки (см. рис. 1) в случае, когда поток направлен снизу вверх, поток массы определяется формулой

$$\Delta M_{1234} = \frac{1}{8} (\Delta M_{ABCO} + \Delta M_{A'B'C'O'}),$$

где ΔM_{ABCO} , $\Delta M_{A'B'C'O'}$ – потоки массы через соответствующие грани; $\tilde{u}^d = u_O$, $\tilde{u}^a = u_{O'}$.
Значение параметра α выбирается следующим образом:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta V_{ABCO} + \Delta V_{A'B'C'O'}}{V_{ABCOA'B'C'O'}} \right), \quad (19)$$

где $\Delta V_{A'B'C'O'}$, ΔV_{ABCO} – потоки объема через соответствующие грани.

Однако необходимо отметить, что донорно-акцепторный способ определения α (18) применяется не во всех узлах сетки, а только в тех, в которых масса или количество движения не меняется сильно за один счетный шаг. В противном случае используется донорный способ, т. е. полагается $\alpha = 1$. Обычно переключение происходит в смешанных ячейках или в ячейках, которые меняют свой тип, т. е. при переходах *смешанная* – *чистая* или *чистая* – *смешанная*.

2. Теоретическая оценка аппроксимационной вязкости разностных схем

Аппроксимационная вязкость разностных схем (схемная вязкость) определяется из рассмотрения первого дифференциального приближения разностных уравнений [3]. Разложим каждый член в разностных уравнениях движения невязкого газа (см. [6]) в ряд Тейлора (при этом нужно иметь в виду, что одни величины определены в узлах счетной сетки, другие – в центрах ячеек). При разложении в ряд будем полагать, что остаточные члены от «вязких» членов уравнений малы по сравнению с самими вязкими членами. Разложение проведем отдельно для эйлерова и лагранжева этапов вычислений для кубической сетки. Соответствующая система уравнений на эйлеровом этапе для квазистационарных течений (в пренебрежении производными по времени) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u_x}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_x \bar{u}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(A h \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A h \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A h \rho u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + \theta(h^2, \tau^2), \\ \frac{\partial \rho u_y}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_y \bar{u}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(A h \rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A h \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A h \rho u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \theta(h^2, \tau^2), \\ \frac{\partial \rho u_z}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_z \bar{u}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(A h \rho u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A h \rho u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A h \rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \theta(h^2, \tau^2), \end{aligned}$$

где A – константа, зависящая от метода вычисления потоков импульса.

В случае квазистационарных течений правые части этой системы будут представлять основные остаточные члены полной системы уравнений газодинамики, которые имеют первый порядок малости по пространственным переменным. Их можно трактовать как производные от компонентов тензора напряжений схемной вязкости, записав в виде (выполнив суммирование по повторяющимся индексам)

$$\sigma_{ik} = A h \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_i \quad \rightarrow \quad \sigma_{ik} = A h \rho \langle u \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} u_i, \quad (20)$$

где $\langle u \rangle$ – характерная скорость потока, которая, однако, является вектором (это обстоятельство отличает схемную вязкость от физической).

Если в уравнении движения применяется донорный метод (что происходит в ячейках с большими отношениями значений потоков масс через две противоположные стороны ячеек, т. е. на ударной волне (УВ) или в окрестности контактных границ (КГ)), то $A = 1/2$. При использовании донорно-акцепторного метода (на гладких участках течений) $A = 1/4$.

Формула (20) аналогична выражению для компонент тензора вязких напряжений, входящих в уравнения Навье – Стокса. При этом роль коэффициента физической вязкости здесь играет коэффициент схемной вязкости

$$\eta_c = A h \rho \langle u \rangle, \quad (21)$$

зависящий от локальной скорости потока и размера счетной ячейки.

Заметим, что уравнение энергии также приводится к виду уравнения энергии для вязкой жидкости, но при этом будет содержать дополнительные члены. Однако все остаточные члены в уравнении энергии малы по сравнению с остаточными членами в уравнении движения, так как имеют третий порядок аппроксимации вследствие использования метода РРМ. Это позволяет при оценке остаточных членов ограничиться рассмотрением уравнения движения.

В. Ф. Спиридоновым (в частном сообщении) показано, что при $\sigma \geq \sigma_{\text{крит}}$ приращение давления при нахождении его предвычисленного значения играет роль линейной вязкости. Значение $\sigma_{\text{крит}}$ зависит от УРСа; для идеального газа (УРС $P = (\gamma - 1)\rho e$) $\sigma_{\text{крит}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\gamma}$. В методике ЭГАК используется значение $\sigma = 0,6$. Таким образом, для оценки коэффициента нестационарной схемной вязкости за счет предвычисленного давления можно воспользоваться выражением

$$\eta_{\text{УВ}} = 0,6\rho c^2\tau, \quad (22)$$

или, что то же самое, выражением

$$\eta_{\text{УВ}} = 0,3\rho ch, \quad (23)$$

получающимся в предположении, что при выборе временного шага для невязкой газодинамики ($\tau = Kh/c$) значение числа Куранта равно $K = 0,5$. Из формулы (23) видно, что коэффициент нестационарной схемной вязкости линейно зависит от размера ячейки, как и коэффициент стационарной схемной вязкости. В случае вязкой жидкости ниже используется непосредственно формула (22). При этом значение счетного шага берется из соответствующего расчета, так как в расчетах с учетом физической вязкости временной шаг выбирается по-другому.

Таким образом, имеются две составляющие аппроксимационной вязкости разностной схемы. В случае квазистационарных течений может быть использована формула (21) с $A = 1/4$ (стационарная схемная вязкость). Для нестационарных (ударно-волновых) течений может быть использована та же формула (21) с $A = 1/2$, но с аддитивной добавкой (22) или (23) (нестационарная схемная вязкость). Ниже на основе расчетов двух задач, имеющих аналитическое решение для вязкой жидкости, показана обоснованность применения формул (21)–(23) для оценок схемной вязкости методики в конкретных расчетах.

Формулы (21)–(23), кроме всего прочего, позволяют оценить, насколько схемная вязкость больше или меньше физической вязкости для среды при конкретных значениях размеров ячейки. Отсюда можно понять, какой должна быть сетка для моделирования течений с учетом физической вязкости. Имеется в виду, что при достаточно грубых сетках схемная вязкость может быть того же порядка или даже превалировать над физической и не имеет смысла использовать такие сетки в расчетах с учетом вязкости.

Отметим, что аналогичные формулы для оценки схемной вязкости получаются и для 2D-осесимметричных течений.

3. Тестовые расчеты

Задача Стокса.

2D-расчеты с нулевой схемной вязкостью. Для несжимаемой вязкой жидкости в случае тангенциального разрыва двух плоскопараллельных потоков (первая задача Стокса) имеется аналитическое решение для зависимости ширины зоны размазывания скачка скорости от времени, которая выражается формулой Шлихтинга [7]¹

$$\Delta \approx 8\sqrt{\eta t}. \quad (24)$$

¹ Отметим, что в работе [7] используется коэффициент кинематической вязкости, однако в данной задаче плотность равна единице.

При численном решении геометрия системы плоская и имеет вид, представленный на рис. 2. На границах BC и AD задано условие периодичности. Параметры веществ: $\rho_1 = \rho_2 = 1$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 5/3$; $P_1 = P_2 = 0,6$; $u_x = 0$; $u_y = \pm w$, $w = 0,5$; $\eta = 0,005$.² В расчетах использовалась квадратная счетная сетка с $h = 0,01; 0,02; 0,04$.

Расчеты проведены как с указанной ($\eta = 0,005$), так и с нулевой физической вязкостью. Данная задача является стационарной, поэтому для оценки схемной вязкости можно использовать формулу (21). Легко проверить, что в этой задаче при заданных скоростях теоретически схемная вязкость в расчетах равна нулю.

В расчете с $\eta = 0$ размазывания скачка скорости не происходит, т. е. полученное решение соответствует аналитическому решению для невязкой жидкости. В расчетах с $\eta = 0,005$ происходит размазывание скачка скорости. Ширина зоны размазывания определялась по узлам счетной сетки, в которых скорости отличались от скорости основного потока на 1%. На рис. 3 (см. также цв. вкл.) приводятся расчетные зависимости ширины зоны Δ от времени, а также аналитическая зависимость $\Delta \approx 8\sqrt{\eta t}$ при $\eta = 0,005$. Видно, что расчетные зависимости хорошо согласуются с аналитической зависимостью для всех выбранных сеток с разными размерами ячеек.

Расчетная оценка схемной вязкости. Если решать задачу Стокса для невязкого газа с помощью численных методов, использующих схемную вязкость, то в расчетах должен происходить рост зоны размазывания скачка скорости из-за наличия схемной вязкости. Сопоставляя результаты численного решения с аналитическими решениями для разных значений физической вязкости, можно оценить, какой физической вязкости соответствует полученное численное решение.

Геометрия системы и постановка расчета представлены выше. В данном расчете физическая вязкость равнялась нулю, однако в отличие от вышеприведенного расчета счетная область двигалась как целое вдоль оси Ox со скоростью $u_x = 1$. В этом случае оценка схемной вязкости по формулам (20), (21) дает $\eta_c = 0,0025$ (размер счетной ячейки $h = 0,01$). В отличие от предыдущего расчета с $u_x = 0$ в данном расчете происходило размазывание скачка скорости даже при нулевой физической вязкости.

Зависимость ширины зоны размазывания скачка скорости выражается формулой (24). В соответствии с этой формулой коэффициент схемной вязкости, присутствующий в расчете, должен выражаться формулой

$$\eta_c \approx \left(\frac{\Delta_c}{8\sqrt{t}} \right)^2. \quad (25)$$

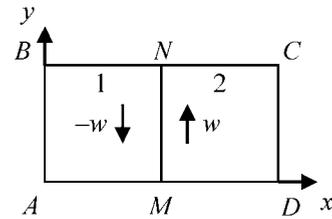


Рис. 2. Начальная геометрия для задачи Стокса в 2D-постановке

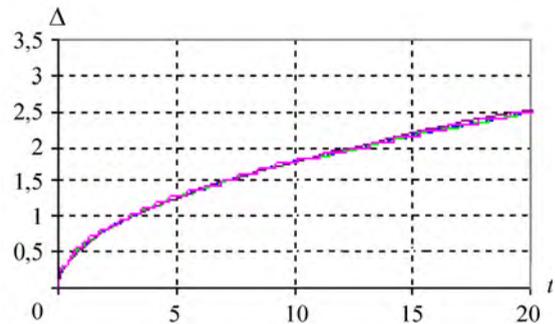


Рис. 3. Задача Стокса: зависимости ширины зоны Δ от времени в 2D расчетах с нулевой схемной вязкостью, $\eta = 0,005$:

— расчет, $h = 0,01$; — расчет, $h = 0,02$;
— расчет, $h = 0,04$; — аналитическое решение

² В данной задаче используются безразмерные величины.

В табл. 1 приводятся значения η_c , определенные на разные моменты времени. Видно, что с течением времени η_c практически не меняется и рост ширины зоны размазывания скачка скорости происходит согласно формуле (25) с $\eta = \eta_c \approx 0,0035$.

Таблица 1

Коэффициент схемной вязкости на разные моменты времени

t	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
η_c	0,0035	0,0035	0,0036	0,0037	0,0035	0,0035

На рис. 4 приводится расчетная зависимость ширины зоны Δ от времени, там же приведена аналитическая зависимость (24) при $\eta = 0,0035$. Эти зависимости хорошо согласуются между собой, что свидетельствует о близости полученного численного решения к аналитическому решению для вязкой жидкости с $\eta = 0,0035$.

Оценка влияния схемной вязкости. Для оценки влияния схемной вязкости на результаты расчетов были проведены расчеты задачи Стокса для вязкого газа с коэффициентом физической вязкости $\eta = 0,005$ в предыдущей постановке, когда счетная область двигалась как целое вдоль оси Ox со скоростью $u_x = 1$. В расчетах варьировалась счетная сетка ($h = 0,005; 0,01; 0,02; 0,04$), коэффициент схемной вязкости вычислялся по формуле (21) и имел соответствующие значения $\eta_c = 0,00125; 0,0025; 0,005; 0,01$.

На рис. 5 (см. также цв. вкл.) приводятся расчетные зависимости ширины зоны Δ от времени для всех расчетов, там же приведена аналитическая зависимость $\Delta \approx 8\sqrt{\eta t}$ для $\eta = 0,005$. Видно, что зависимости, полученные в расчетах на сетках с $h = 0,005, h = 0,01$, хорошо согласуются с аналитической зависимостью. Для этих расчетов коэффициент схемной вязкости меньше, чем коэффициент физической вязкости $\eta = 0,005$ ($\eta_c < \eta$). При $h = 0,02$ влияние схемной вязкости на результаты расчета ($\eta_c = \eta$) уже заметно. В расчетах на более грубых сетках коэффициент схемной вязкости больше, чем коэффициент физической вязкости ($\eta_c > \eta$), и здесь влияние схемной вязкости существенно.

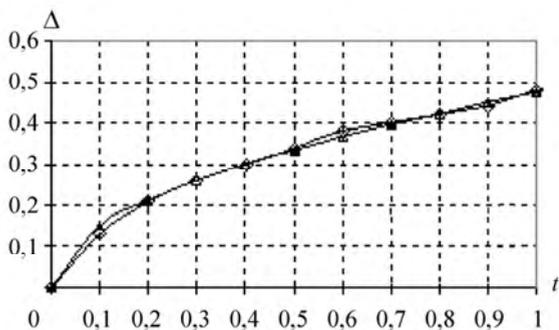


Рис. 4. Задача Стокса: зависимость ширины зоны Δ от времени: \diamond – расчет; Δ – аналитическое решение при $\eta = 0,0035$

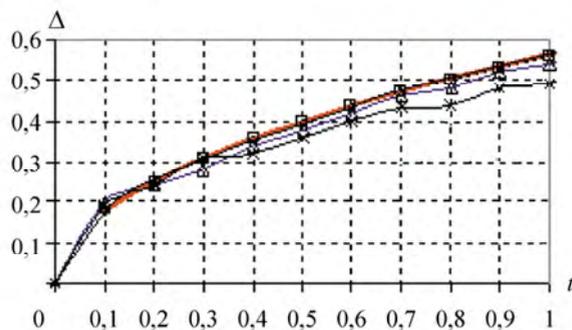


Рис. 5. Задача Стокса при $u_x = 1$. Зависимость Δ от времени для расчетов на разных сетках: \diamond – расчет, $h = 0,005$; \square – расчет, $h = 0,01$; Δ – расчет, $h = 0,02$; \times – расчет, $h = 0,04$; — — — — аналитическое решение

Замечание. Немонотонное поведение двух кривых на рис. 5 объясняется грубостью счетной сетки при малом количестве ячеек.

Задача о размазывании фронта стационарной УВ в конденсированной среде.

Постановка задачи и расчетов. Рассматривается задача, взятая из работы [8] (опыт № 927) с коэффициентом физической вязкости $\eta = 0,01$ ГПа·10 мкс. Начальная геометрия задачи приведена на рис. 6.

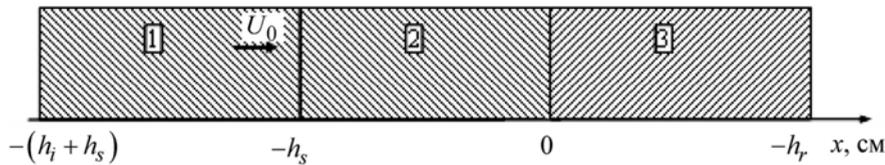


Рис. 6. Начальная геометрия задачи о размазывании фронта стационарной УВ:
1 – ударник; 2 – образец; 3 – опорная пластина

В расчетах пластина-ударник (алюминиевый сплав Al6061-T6) со скоростью удара $U_0 = 0,4808$ км/с имела толщину $h_1 = 1,223$ см, образец (сплав Al6061-T6) – толщину $h_s = 1,223$ см, опорная пластина – толщину $h_r = 1,223$ см. В момент удара все три пластины (ударник, образец и опора) были в состоянии *при нормальных условиях*: температура $T_0 = 293$ К, давление $P_0 = 10^{-4}$ ГПа, удельная внутренняя энергия $e_0 = 0$, плотность $\rho_0 = 2,71$ г/см³.

Проведена серия расчетов в плоской геометрии. Использовалась равномерная эйлерова сетка с размерами ячеек по оси x (по нормали к поверхности ударника и мишени) $h = 0,002, 0,001; 0,0005$ см. На левой и правой границах задавалось условие типа *свободная поверхность*.

Для алюминиевого сплава использовался УРС РОСА-МИ [9] без учета разрушения; для описания упругопластических свойств использовалась модель сдвиговой прочности [10].

Расчеты проводились до момента времени $t = 0,3 \cdot 10$ мкс. Укажем некоторые данные, необходимые для оценок схемной вязкости: скорость звука $c \approx 5,5$ км/с; массовая скорость $u \approx 0,25$ км/с, скорость распространения УВ $D \approx 5,75$ км/с, счетный шаг τ в расчетах приведен в табл. 2.³

Результаты расчетов и их обсуждение. Для данной задачи имеются экспериментальные данные о скорости КГ *образец – опорная пластина*, по которым можно определить ширину и временной интервал размазывания УВ. Последний будет основным параметром при анализе результатов расчетов.

Прежде чем перейти к результатам расчетов, отметим следующие их особенности. В данной задаче имеются УВ (в первой задаче их нет), для моделирования которых используется искусственная вязкость, состоящая из квадратичной и линейной частей. Обе эти вязкости действуют аналогично физической вязкости, сглаживая профиль УВ. При этом квадратичная вязкость размазывает УВ приблизительно на 4 ячейки, а зона размазывания у линейной вязкости может быть значительно больше, так как она «работает» (превалирует по сравнению с квадратичной) и за фронтом волны. Следовательно, влияние искусственной вязкости на временные зависимости скорости рассматриваемой КГ может быть значительным. Кроме того, вследствие наличия УВ в данной задаче при оценке необходим учет дополнительной схемной вязкости за счет определения предвычисленного давления (13).

³ Всюду далее в данной задаче скорость измеряется в км/с, время – в 10 мкс.

Таким образом, в данной задаче имеет место наложение на решение действий пяти видов вязкостей: физической, искусственной (квадратичной и линейной), схемной (стационарной и нестационарной). Для выяснения эффектов, связанных именно с физической вязкостью, необходимо минимизировать влияние остальных или точно их оценить. При оценке последних авторы используют *предположение 1*: каждая из рассматриваемых вязкостей влияет на течение аддитивным образом.

Таблица 2

Отличительные особенности расчетов

Номер расчета	Число ячеек	Шаг τ	Линейная вязкость	Физическая вязкость $\eta = 0,01$
1	n	0,00012	Нет	Есть
2	$2n$	0,00006	Нет	Есть
3	$4n$	0,00003	Нет	Есть
4	n	0,00012	Есть	Нет
5	n	0,00012	Есть	Есть
6	$2n$	0,00006	Есть	Нет
7	$2n$	0,00006	Есть	Есть
8	$2n$	0,00006	Нет	Нет
9	n	0,00006	Есть	Нет

Ударно-волновые течения в методике ЭГАК не могут быть смоделированы без квадратичной вязкости, но при использовании линейной вязкости допускается ее «отключение». Были проведены расчеты как с линейной вязкостью, так и без нее. Естественно, возможно отключение и физической вязкости. В табл. 2 приведены отличительные данные всех проведенных расчетов (n соответствует размеру ячейки $h = 0,002$ см). Остальные вязкости (схемные и искусственная квадратичная) могут быть оценены теоретически или численно при помощи расчетов, при этом их влияние уменьшается при измельчении счетной сетки.

Отметим еще одно обстоятельство, связанное с оценкой схемной вязкости. Дело в том, что формула (21) получена для квазистационарных течений однородной (однокомпонентной) среды. Ударно-волновые течения условию квазистационарности не удовлетворяют, кроме того, рассматриваемая среда является многокомпонентной. Поэтому при теоретической оценке схемной вязкости по формуле (21) к ней должна быть добавлена нестационарная вязкость за счет предвычисленного давления по формуле (22).

Ниже анализируются результаты расчетов в виде временного интервала (временной ширины) Δt размазывания скорости УВ на КГ. При этом возникает проблема его корректного определения, так как в рассматриваемых задачах нет четкой границы. В настоящей работе ширина определялась следующим образом. В качестве границ зоны взяты точки, в которых значения скорости отличаются от ее значений *на полочках* слева или справа от зоны размазывания, как и в предыдущей задаче, примерно на 1 % ее максимального значения. В данном эксперименте максимальное значение скорости составляет $\sim 0,231$ (в расчетах $\sim 0,24$), тогда $\Delta u \sim 0,0025$ с каждой стороны зоны. Определенные таким образом экспериментальные значения временной ширины размазывания скорости составляют $\sim 0,0085$ – $0,0115$. К сожалению, для более точного определения не хватает экспериментальных точек. Поэтому в качестве экспериментальной ширины берется среднее значение $\Delta t_{\text{exp}} = 0,01$.

Прежде чем анализировать результаты расчетов, определим теоретические оценочные значения части нефизических вязкостей и соответствующие им значения временного интервала размазывания УВ.

Рассмотрим искусственную квадратичную вязкость. Ширина зоны размазывания УВ за счет этой вязкости с указанным выше множителем в методике ЭГАК, как правило, составляет ~4 ячейки, что позволяет оценить и временной интервал размазывания УВ: $\Delta t = \frac{\text{ширина зоны размазывания УВ}}{\text{скорость УВ}} \approx 4h/5,75 \approx 0,0014$ для расчета на сетке с размером n ($h = 0,002$).

Оценка схемных вязкостей дает следующие значения: стационарная вязкость по формуле (21) равна 0,00068, а нестационарная по формуле (22) – 0,0058 для расчета на сетке размером n . При теоретической оценке схемной вязкости принято во внимание, что в данной задаче представляет интерес погрешность на УВ, а на ней используется донорная аппроксимация потоков импульса. Для расчетов $2n$ и $4n$ полученные значения должны быть уменьшены соответственно в 2 и 4 раза.

Переход к временной ширине размазывания УВ Δt осуществим, исходя из следующих соображений. Наличие результатов моделирования с учетом физической вязкости и без нее позволяет связать коэффициент физической вязкости с временной шириной размазывания УВ линейной зависимостью

$$\Delta t = B\eta, \quad (26)$$

где B – некоторая размерная константа, значение которой будет получено ниже. Используя предположение 2 – постоянство этой константы, из значения коэффициента физической вязкости по формуле (26) можем получить временной интервал размазывания УВ и для схемной вязкости – Δt_c .

Рассмотрим теперь результаты расчетов, которые в виде зависимостей скорости КГ образцы – опорная пластина приводятся на рис. 7–10.

В табл. 3 собраны интегральные данные по временным интервалам размазывания УВ. В ней в столбцах 4–8 для всех расчетов представлены Δt отдельно для каждого вида вязкости: Δt_ϕ – для физической вязкости; Δt_{sw} – для квадратичной искусственной вязкости; $\Delta t_{лин}$ – для линейной искусственной вязкости; $\Delta t_{нс}$ – для нестационарной схемной вязкости по формулам (22) и (26); Δt_c – для стационарной схемной вязкости по формулам (21) и (26). В столбце 2 – суммарное значение по столбцам 4–8, в столбце 1 – значение, полученное в соответствующем расчете (для сравнения: экспериментальное значение составляет 0,01).

В табл. 3 неизвестно теоретическое значение линейной вязкости. Оно оценено сравнением двух расчетов: с линейной вязкостью и без нее (в предположении 1 об аддитивности влияния отдельных вязкостей на решение). На рис. 7 приведены результаты расчетов на сетке $2n$ с нулевой физической вязкостью $\eta = 0$ и с нулевой и ненулевой линейной вязкостью. Сравнивая результаты двух расчетов (см. строки 6 и 8 в табл. 3), можно оценить влияние линейной вязкости в расчете. Временной интервал размазывания УВ составляет $\Delta t \approx 0,0030$ для расчета без линейной вязкости и $\Delta t \approx 0,0059$ с ее учетом. Таким образом, на линейную вязкость приходится $\Delta t \approx 0,0029 = 0,0059 - 0,0030$. Аналогичная оценка линейной вязкости для расчетов на сетке n составляет $\Delta t \approx 0,0039$.

Рассмотрим результаты расчетов, в которых меняется временной шаг при сохранении остальных параметров неизменными (расчеты 4 и 9). В этом случае меняется лишь нестационарная вязкость, которая линейно зависит от временного шага. Из этих расчетов можно определить

расчетное значение разницы между временными интервалами Δt , приблизительно равное $0,0029 = 0,0105 - 0,0076$, которое совпадает с теоретической оценкой. Этот факт служит подтверждением правомерности предположения 1 об аддитивности действия различных вязкостей и достаточной точности полученной теоретической оценки нестационарной вязкости.

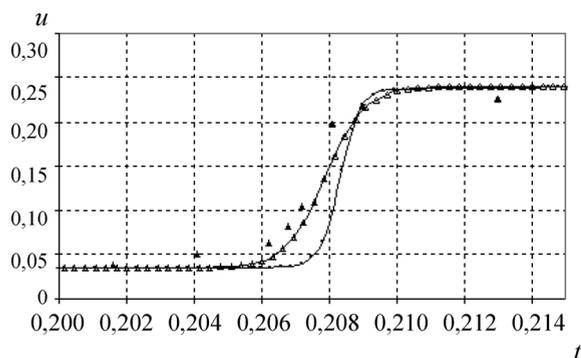


Рис. 7. Зависимости массовой скорости КГ образец – опорная пластина от времени в расчетах с $\eta = 0$ с линейной вязкостью и без нее на сетке $2n$: \blacktriangle – эксперимент; Δ – с линейной вязкостью; \bullet – без линейной вязкости

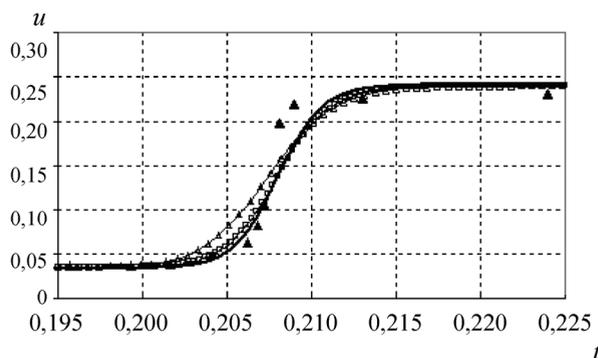


Рис. 8. Зависимости массовой скорости КГ образец – опорная пластина от времени в расчетах на сходимость с $\eta = 0,01$ без линейной вязкости: \blacktriangle – эксперимент; — – расчет на сетке $4n$, \square – расчет на сетке $2n$; Δ – расчет на сетке n

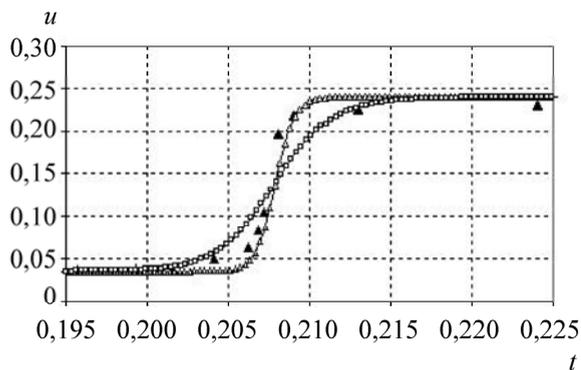


Рис. 9. Зависимости массовой скорости КГ образец – опорная пластина от времени в расчетах с физической вязкостью и без нее на сетке $2n$: \blacktriangle – эксперимент; Δ – $\eta = 0$; \square – $\eta = 0,01$

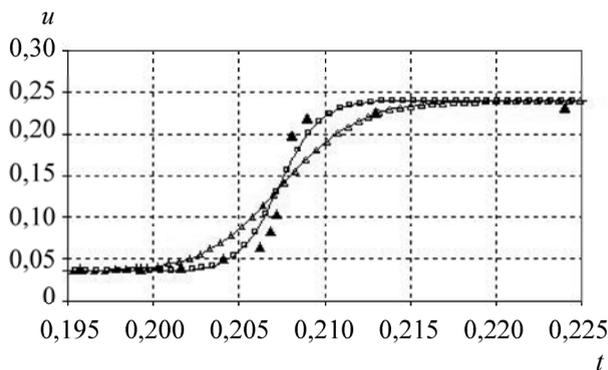


Рис. 10. Зависимости массовой скорости КГ образец – опорная пластина от времени в расчетах с физической вязкостью и без нее на сетке n : \blacktriangle – эксперимент; \square – $\eta = 0$; Δ – $\eta = 0,01$

Отметим, что в расчетах с физической вязкостью имеется сходимость к эксперименту с уменьшением размеров ячеек. Об этом свидетельствует рис. 8, на котором приведены графики зависимостей скорости КГ от времени, полученные в расчетах на сходимость с физической вязкостью $\eta = 0,01$ на сетках n , $2n$ и $4n$ без линейной вязкости в сравнении с экспериментальными данными. Соответствующие временные интервалы приведены в табл. 3 (первые три строки). Из таблицы видно, что расчетная вязкость оказывается несколько меньше по сравнению с оценочным значением во всех трех расчетах. Однако погрешность оценки уменьшается (линейно) с уменьшением размера ячеек: $\Delta t_{\text{расчет}} - \Delta t_{\text{сумма}} = 0,0014; 0,0010; 0,0006$ соответственно, что также свидетельствует о сходимости численного решения.

Таблица 3

Расчетные данные по временному интервалу размазывания УВ

Расчет	$\Delta t_{\text{расчет}}$	$\Delta t_{\text{сумма}}$	$\Delta t_{\text{ф}}$	Δt_{sw}	$\Delta t_{\text{лин}}$	$\Delta t_{\text{нс}}$	$\Delta t_{\text{с}}$
1 (n)	0,0166	0,0180	0,01	0,0014	0	0,0058	0,00068
2 ($2n$)	0,0130	0,0140	0,01	0,0007	0	0,0029	0,00034
3 ($4n$)	0,0114	0,0120	0,01	0,00035	0	0,00145	0,00017
4 (n)	0,0105	0,0118	0	0,0014	0,0039	0,0058	0,00068
5 (n)	0,0205	0,0218	0,01	0,0014	0,0039	0,0058	0,00068
6 ($2n$)	0,0059	0,0068	0	0,0007	0,0029	0,0029	0,00034
7 ($2n$)	0,0159	0,0168	0,01	0,0007	0,0029	0,0029	0,00034
8 ($2n$)	0,0030	0,0039	0	0,0007	0	0,0029	0,00034
9 (n)	0,0076	0,0089	0	0,0014	0,0039	0,0029	0,00068

Как отмечено выше, можно оценить точность учета физической вязкости по используемой методике. На рис. 9 приводятся результаты расчетов на сетке n с нулевой и ненулевой ($\eta = 0,01$) физической вязкостью в сравнении с экспериментальными данными. Разница между двумя расчетами (см. строки 4 и 5 в табл. 3) дает значение расчетной физической вязкости. Временная ширина зоны размазывания УВ в расчете с $\eta = 0$ составила $\Delta t \approx 0,0105$, в расчете с $\eta = 0,01$ $\Delta t \approx 0,0205$. На рис. 10 приводятся аналогичные результаты расчетов на сетке $2n$ (см. также строки 6 и 7 в табл. 3). Здесь временной интервал размазывания в расчете с $\eta = 0$ составил $\Delta t \approx 0,0059$, в расчете с $\eta = 0,01$ $\Delta t \approx 0,0159$. Разница между этими данными на обеих сетках имеет значение $\Delta t \approx 0,01$, которое находится в экспериментальном диапазоне.

Полученные результаты означают, что заданная физическая вязкость $\eta = 0,01$ в расчетах учитывается корректно. Отсюда и из результатов расчетов на сходимость (см. выше) следует и побочный вывод о том, что погрешность моделирования в основном определяется аппроксимацией невязких членов уравнений. Отметим, что из этих расчетов также следует значение константы $B = 1$ в формуле (26).

Таким образом, оценка полной схемной вязкости по формулам (21), (22) и с учетом искусственной вязкости дает близкое к полученным в расчете значение, при этом погрешность коррелирует с размером ячейки.

4. Оценка схемного числа Рейнольдса

Полученная оценка схемной вязкости позволяет оценить схемное число Рейнольдса в расчетах. Теоретически число Рейнольдса Re определяется выражением

$$Re = \frac{\langle u \rangle L}{\eta}, \quad (27)$$

где L – характерный размер задачи. Если вместо физической вязкости η в (27) использовать схемную вязкость для стационарного течения (21), что представляется вполне корректным (например, для турбулентных течений), получим схемное число Рейнольдса

$$Re_c = \frac{\langle u \rangle hN}{Ah \langle u \rangle} = \frac{N}{A}, \quad (28)$$

где N – число ячеек на характерный размер задачи. Таким образом, при $A = 1/4 \text{ Re}_c = 4N$, т. е. схемное число Рейнольдса с точностью до множителя равно количеству ячеек в направлении характерного размера задачи.

Заключение

В работе кратко описаны исходные уравнения и разностная схема методики решения уравнений Навье – Стокса для многокомпонентной среды, реализованной в коде ЭГАК и предназначенной для моделирования двумерных и трехмерных течений в эйлеровых переменных. Представлены результаты тестовых расчетов, подтверждающих корректность выполнения программы.

Приведена теоретическая оценка схемной вязкости для квазистационарных и нестационарных течений, получающаяся из рассмотрения первого дифференциального приближения. Проведены расчеты для двух течений, которые показали, что влияние схемной вязкости на получаемое разностное решение во многом аналогично влиянию физической вязкости. Поэтому при проведении расчетов важно уметь оценивать эффекты, связанные с ее наличием. Показано, что схемную вязкость методики ЭГАК, а также схемное число Рейнольдса можно оценить по предложенным в данной работе формулам, которые дают вполне корректные оценки в расчетах безударных и ударно-волновых течений многокомпонентной среды. Это позволяет теоретически определять критические размеры ячеек, больше которых не имеет смысла использовать при проведении расчетов течений вязкой жидкости, так как в этом случае влияние схемной вязкости будет сравнимо с эффектами физической вязкости.

Анализ результатов показывает, что в первой задаче расчетная вязкость оказывается несколько больше теоретической оценки, а во второй, наоборот, меньше. Тем не менее, абсолютные значения расчетных вязкостей довольно близки к теоретическим значениям (возможно было получить и лучшее согласие выбором критерия определения зон размазывания, однако авторы не ставили перед собой такой цели). Это свидетельствует о достаточной корректности использованных в работе предположений об аддитивности действия различных вязкостей на решение и линейной зависимости между шириной зоны размазывания УВ и коэффициентами физической и схемной вязкостей. Кроме того, из полученных результатов следует, что при проведении расчетов с учетом физической вязкости для получения адекватных численных результатов достаточно обеспечить малость теоретических оценок значений нефизических вязкостей по сравнению с физической.

В заключение отметим, что полученные результаты являются достаточно общими. Авторы не могут указать какую-либо формулу для определения критических размеров ячеек, которая обеспечила бы малость схемной вязкости по отношению к физической и была бы пригодна для любой методики. Однако сам подход к проблеме может быть использован при проведении расчетов и по другим методикам.

Авторы выражают благодарность А. Г. Иоилеву за предложенную вторую задачу, В. Ф. Спирidonову, обратившему внимание на схемную вязкость, связанную с предвычисленным давлением, А. О. Наумову за ценные замечания по тексту статьи.

Список литературы

1. Янилкин Ю. В., Беляев С. П., Бондаренко Ю. А. и др. Эйлеровы численные методики ЭГАК и ТРЭК для моделирования многомерных течений многокомпонентной среды // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2008. Вып. 12. С. 54–65.
2. Стадник А. Л., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Учет молекулярной вязкости при прямом 3D численном моделировании гравитационного турбулентного перемешивания // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теор. и прикл. физика. 2005. Вып. 1–2. С. 74–83.
3. Яненко Н. Н., Шокин Ю. И. О первом дифференциальном приближении разностных схем для гиперболических систем уравнений // Сиб. матем. журнал. 1969. Т. 10, № 5.
4. Янилкин Ю. В., Стаценко В. П., Козлов В. И. Математическое моделирование турбулентного перемешивания в сжимаемых средах. Курс лекций. – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2009.
5. Бахрах С. М., Жарова Г. В., Спиридонов В. Ф. Консервативная схема счета осесимметричных течений (явно-неявный алгоритм) // Численные методы динамики вязкой жидкости. – Новосибирск, 1983. С. 31–35.
6. Bakhrakh S., Samigulin M., Sevastianov V., Yanilkin Yu. The EGAK method for calculating gas flows of heterogeneous media in Eulerian coordinates // Numerical Method in Fluid Dynamics. – М.: MIR, 1984.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974.
8. Johnson J. N., Barker L. M. Dislocation dynamics and steady plastic wave profiles in 6061-T6 aluminum // J. Appl. Phys. 1969. Vol. 40, N 11. P. 4321–4334.
9. Гордеев Д. Г., Гударенко Л. Ф., Каякин А. А., Куделькин В. Г. Полуэмпирическая модель уравнений состояния металлов с эффективным учетом ионизации. Ч. 1. Описание модели // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теор. и прикл. физика. 2010. Вып. 3. С. 19–25.
10. Глушак Б. Л., Новиков С. А., Батьков Ю. В. Определяющее уравнение Al и Mg для описания высокоскоростного деформирования в УВ // Физика горения и взрыва. 1992. № 1.

The Difference Scheme Approximation Viscosity and Simulations of Viscous Fluid Flows

Yu. V. Yanilkin, O. O. Toporova, A. L. Stadnik, L. E. Korzakova

The paper briefly describes the original equations and difference scheme used for the simulation of viscous and inviscid gas dynamic multimaterial flows in Eulerian variables with the EGAK code. A theoretical estimate of the scheme viscosity of the difference scheme used in the code is presented. Test computations have been carried out and they demonstrate the validity of using the theoretical estimate of the scheme viscosity in simulations for the particular problems.