

УДК 519.6

# Пакет программ ЛОГОС. Метод решения задач статической прочности тонкостенных и стержневых конструкций на основе solid-shell технологии

**Р. А. Барабанов, Д. Ю. Дьянов,  
И. И. Каныгин, В. Ф. Спиридонов,  
Е. А. Филимонкин, К. В. Циберев**

*В модуле статической прочности пакета программ ЛОГОС разработана и реализована технология проведения расчетов деформирования конструкций путем расширения структурных конечных элементов (оболочечных и балочных) до объемных элементов сплошной среды (шестигранники, треугольные призмы). Эта технология обеспечивает возможность проведения расчетов нелинейного деформирования тонкостенных конструкций, в которых присутствуют оболочечные и балочные элементы, за счет ранее реализованных возможностей для объемных элементов.*

*Дано описание базовых процедур и алгоритмов реализованного метода, приведены результаты тестовых расчетов в нелинейной постановке с учетом геометрической нелинейности, проведено сравнение результатов с эталонными решениями.*

## *Введение*

В настоящее время в РФЯЦ-ВНИИЭФ разрабатывается пакет программ (ПП) ЛОГОС для решения широкого круга задач, в том числе механики деформируемого твердого тела, на многопроцессорных вычислительных ресурсах [1, 2]. Одной из составных частей данного ПП является модуль решения задач расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций при квазистатических термосиловых воздействиях, основанный на методе конечных элементов (модуль ЛОГОС-Прочность). Моделирование процессов статического деформирования применяется для задач, в которых действие сил инерции или процессы рассеяния энергии не оказывают существенного влияния на поведение конструкции. Необходимость решения задач указанного класса актуальна для многих отраслей промышленности.

Многие практически важные инженерные задачи являются нелинейными, и для удовлетворения потребностей пользователей программного продукта необходимы функциональные возможности, обеспечивающие учет нелинейных эффектов для всех поддерживаемых типов конечных элементов (так называемый *нелинейный функционал*). На текущий момент в модуле ЛОГОС-Прочность широко развит нелинейный функционал для объемных элементов сплошной среды, что обеспечивает возможность расчета конечно-элементных моделей, состоящих из трехмерных объемных элементов, с учетом материальной, геометрической нелинейностей, а также контактного взаимодействия. Кроме объемных элементов библиотека поддерживаемых конечных элементов

модуля ЛОГОС-Прочность включает в себя набор структурных одномерных и двумерных элементов (балочных и оболочечных). Однако для них в ЛОГОС-Прочность моделирование процессов статического деформирования обеспечивается лишь в линейном приближении, без возможности учета геометрической нелинейности.

По оценкам разработчиков программного модуля ЛОГОС-Прочность, адаптация структурных элементов к возможностям нелинейного деформирования была бы существенно затратной. Поэтому разработчиками модуля ЛОГОС-Прочность в качестве относительно быстрого решения, которое могло бы обеспечить возможность проведения нелинейных расчетов оболочечных и балочных моделей, была выбрана так называемая *solid-shell*-методология расширения двумерных и одномерных элементов до объемных элементов сплошной среды.

Идея конечно-элементного моделирования тонкостенных оболочечных конструкций с использованием либо гибридных оболочечно-объемных теорий (*hybrid solid-shell approach*), либо теории чисто объемных тел (*pure-solid formulation*) активно развивается с начала 2000-х годов [3–5]. Для разработки и реализации в рамках ЛОГОС-Прочность был выбран второй подход моделирования оболочечных конструкций с использованием трехмерных элементов сплошной среды [6]. Для простоты изложения в дальнейшем реализуемый в рамках ЛОГОС-Прочность подход будем называть *solid-shell*-технологией (подходом, методологией).

Как уже было сказано, определяющим фактором для начала работ по программной реализации *solid-shell*-методологии в модуле ЛОГОС-Прочность явилось то, что в текущей реализации объемных элементов развит и достаточно хорошо оттестирован функционал для проведения нелинейных расчетов с учетом материальной, геометрической нелинейностей и контактного взаимодействия. Обзор публикаций по реализации *solid-shell*-подхода на основе моделирования трехмерными элементами сплошной среды [5, 7] показал, что реализованные для объемных элементов алгоритмы учета нелинейностей в пакете программ ЛОГОС-Прочность могут быть достаточно легко и в приемлемые сроки адаптированы к оболочечным и балочным структурным элементам.

В первом разделе статьи представлено описание основных этапов и разработанных ключевых алгоритмов *solid-shell*-технологии расширения оболочечных и балочных элементов до сетки из объемных элементов. В текущей реализации ведется расширение до объемных элементов первого порядка аппроксимации. Однако реализованные алгоритмы предполагают как возможность расширения до элементов со вторым порядком аппроксимации по пространству, так и использование специальных опций объемных элементов, влияющих на качество аппроксимации (дополнительные функции формы, *hourglass*-стабилизация) и препятствующих искажениям расчетной сетки.

Во втором разделе приведены результаты расчетов в нелинейном приближении для подтверждения работоспособности реализованной технологии. Там, где возможно, приводится сравнение результатов, полученных по *solid-shell*-методологии, с аналитическими решениями или с эталонными численными решениями.

## ***1. Реализация solid-shell-методологии в ПП ЛОГОС***

Методология расширения оболочечных элементов до объемных элементов сплошной среды заключается в построении на основе исходной двумерной модели трехмерной неразрывной модели сплошной среды. При этом особым образом моделируются острые углы и другие изгибные участки геометрии, где касательная к поверхности терпит разрыв или толщина оболочек становится разрывной.

Программная реализация методологии расширения оболочечных элементов до объемных элементов сплошной среды сводится к следующим основным процедурам:

- определение и подсчет числа разнонаправленных нормалей для каждой вершины оболочечного элемента (в дальнейшем каждый набор этих *узловых* нормалей используется для формирования узла (knot) – набора вершин трехмерной сетки, объединенных условиями жесткой связи);
- добавление набора виртуальных вершин для каждой вершины исходной оболочечной сетки (по 3 узла для каждой из узловых нормалей: первый узел совпадает с исходной оболочечной вершиной, а два других расположены от него на расстоянии в половину толщины оболочки вверх и вниз по нормали);
- построение набора объемных элементов сплошной среды на основе наборов виртуальных вершин;
- смена признаков счетности для вершин и элементов: вершины и элементы исходной оболочечной сетки объявляются нерассчитываемыми на процессоре (несчетными), виртуальные вершины и элементы сплошной среды полагаются рассчитываемыми;
- расширение начальных и граничных условий, определенных на оболочечных структурах, на структуры виртуальной объемной сетки;
- формирование узлов – дополнительных наборов вершин с поступательными и вращательными степенями свободы и дополнительного набора многоточечных соединений, выражающих условия перемещения для каждого набора виртуальных вершин как жесткого тела;
- формирование матрично-векторных структур на основе модифицированной сеточной топологии и решение глобальной системы, определенной на сетке из объемных элементов;
- пересчет результирующих данных, определяющих НДС, с виртуальных вершин и элементов трехмерной сетки на исходные вершины и элементы двумерной оболочечной сетки.

Далее приводятся детали ключевых алгоритмов реализации.

**Расширение сеточной топологии.** На рис. 1, 2 представлены схемы соответствия узлов исходных одномерного (балочный элемент с прямоугольным сечением) и двумерного (четыреузловой/восьмиузловой оболочечный элемент первого/второго порядка аппроксимации по пространству) элементов узлам генерируемого трехмерного элемента. Схемы расширения сеточной топологии приведены для объемных элементов первого и второго порядка аппроксимации. Отметим, что текущая реализация в ЛОГОС-Прочность предполагает построение объемных элементов первого порядка аппроксимации по пространству; реализацию для элементов второго порядка аппроксимации планируется осуществить в ближайшее время.

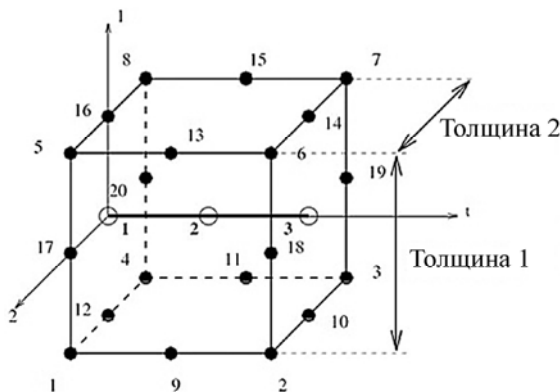


Рис. 1. Расширение балочного элемента:  
○ – узлы исходного балочного элемента;  
● – узлы объемного элемента

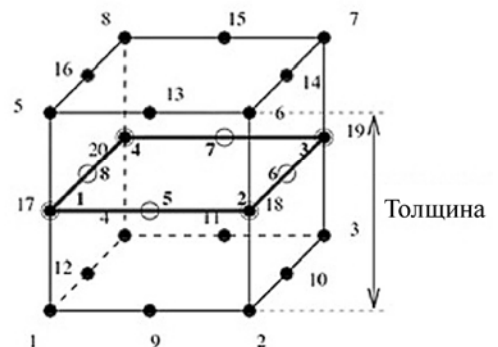


Рис. 2. Расширение оболочечного элемента:  
○ – узлы исходного оболочечного элемента;  
● – узлы объемного элемента

Локальные оси  $1$  и  $2$  (см. рис. 1) определяют нормали в поперечном сечении балочного элемента, по которым строятся вершины генерируемого объемного элемента. Эти локальные оси и нормали определяются из исходных данных конечно-элементной модели. Толщина  $1$  и толщина  $2$ , которые задают координаты генерируемых вершин в направлениях нормалей, также определяются по исходным данным – площади поперечного сечения и/или моментам инерции. Так, для балки с прямоугольным сечением толщины сечения определяются из соотношений

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{12},$$

$$I_{zz} = \frac{hb^3}{12},$$

где  $I_{yy}$  и  $I_{zz}$  – заданные моменты инерции;  $b$  и  $h$  – искомые толщины  $1$  и  $2$ .

Отметим, что такая реализация solid-shell-методологии для балочных элементов ориентирована на элементы с прямоугольным поперечным сечением. Реализация для балок с другими формами поперечного сечения потребует введения дополнительных условий и приближений в конечно-элементные аппроксимации объемных элементов.

Расширение оболочечного элемента до объемного ведется по аналогичной схеме с использованием исходных данных о срединной поверхности оболочки и толщине оболочки. Срединная поверхность оболочки, заданная тремя или четырьмя вершинами (в случае треугольной или четырехугольной оболочки), определяет узловые нормали к каждой из исходных вершин. Вершины генерируемого объемного элемента строятся на расстоянии половины толщины оболочки от сходных вершин вверх и вниз по узловым нормальям.

**Моделирование узлов – особых зон с разрывом нормалей или толщин.** До тех пор, пока конечно-элементная сетка из оболочек или балок остается гладкой, расширение исходной плоской или одномерной сетки приведет к построению связной неразрывной трехмерной конечно-элементной сетки. Критерии связности узлов генерируемой объемной сетки проверяются программным образом на основе анализа набора нормалей, выходящих из рассматриваемого узла оболочечной сетки. Этот набор определяется векторами нормалей к срединной поверхности для всех элементов исходной сетки, сходящихся в рассматриваемом узле. Если угол между нормальями из набора не превышает заданной малой величины или длины нормалей одинаковы с заданной точностью, то исходная сетка в данном узле считается гладкой и вершина исходной сетки имеет единственную нормаль. В этом случае для рассматриваемой вершины исходной сетки строится единственная пара вершин объемной сетки, общая для всех объемных элементов, генерируемых на основе исходных элементов, содержащих рассматриваемую вершину.

Однако когда появляется необходимость моделирования углов, сильных изгибов, сочленений, т. е. зон, где пересекаются несколько балок или оболочек или толщина балок/оболочек терпит разрыв, возникает проблема построения связной трехмерной сетки. На рис. 3, 4 показаны типичные случаи таких особых зон, в которых нормали/толщины претерпевают разрывы и узлы генерируемой сетки из объемных конечных элементов становятся геометрически не связанными друг с другом. В реализуемой solid-shell-терминологии сеточные вершины, образующие такие разрывные зоны, называются узлами (knots). Далее по тексту понятия *узел* и *вершина* будут разделяться – понятие *вершина* будет применяться к вершинам конечного элемента (т. е. узлам пространственной сетки), а понятие *узел* – к вершинам в зоне пересечения балок/оболочек с разрывом в направлении нормали или с разрывом толщины.

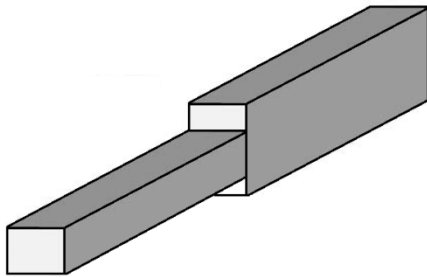


Рис. 3. Разрыв толщины в узле

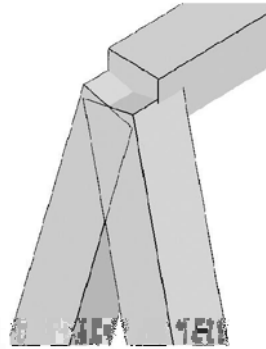


Рис. 4. Наличие нескольких разнонаправленных нормалей в узле

В зонах узлов генерируемая трехмерная сетка из объемных элементов частично перекрывается; элементы этой сетки не связаны друг с другом посредством общих вершин. Для обеспечения связи между объемными элементами набор сгенерированных вершин в узловых зонах рассматривается движущимся как единое жесткое тело; определяющей вершиной полагается вершина исходной оболочечной/балочной сетки. На рис. 5 (см. также цв. вкл.) приведена иллюстрация узла и набора связей, определяющих движение узла как жесткого тела.

Узел как набор жестких связей определяется поступательными и вращательными степенями свободы. Условие жесткой связи между *определяющей* вершиной (оболочечной или балочной) и *зависимой* вершиной (принадлежащей объемному элементу) в конечно-элементной аппроксимации вводится как многоточечное ограничение (MPC – multi-point constraint), в векторной форме записанное как

$$\overline{U}_s = \overline{U}_m + \overline{\omega}_m (\overline{R}_s - \overline{R}_m),$$

где  $\overline{U}_s$ ,  $\overline{U}_m$  – векторы поступательных перемещений зависимой (slave) и определяющей (master) вершин,  $\overline{\omega}_m$  – вектор вращательных перемещений определяющей вершины;  $\overline{R}_s$ ,  $\overline{R}_m$  – радиус-векторы определяющей и зависимой вершин. Исходя из этого уравнения, поступательное движение вершин сгенерированной сетки из объемных элементов определяется поступательным и вращательным движением определяющих вершин исходной сетки из оболочечных или балочных элементов.

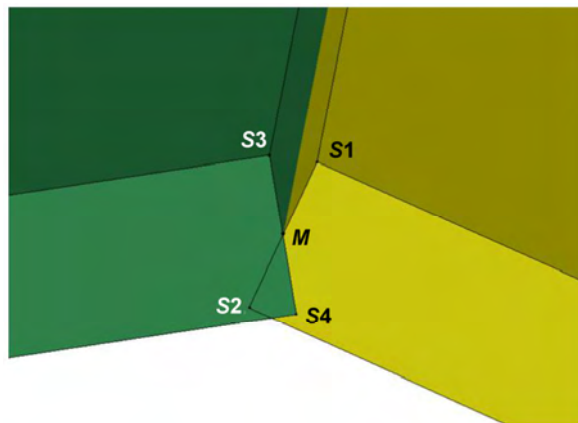


Рис. 5. Узел как набор из master-вершины  $M$  и жестко связанных с ней вершин  $S1$ – $S4$

Таким образом, введение понятия *узел* в solid-shell-методологии является ключевым. Узлы не только обеспечивают связность между вершинами сгенерированной сетки из объемных элементов, но и сохраняют в конечно-элементной модели из трехмерных объемных элементов вращательные степени свободы, присущие аппроксимациям исходных оболочечных и балочных элементов.

Как сказано выше, узлы вводятся в рассмотрение в вершинах, в которых либо нормаль к поверхности является разрывной (благодаря углам, изгибам или соединениям разных поверхностей), либо меняется толщина оболочечной поверхности, либо имеет место соединение элементов разного типа (балок с оболочками). Кроме того, узлы формируются в вершинах, в которых наложены ограничения на вращательные степени свободы, а также в вершинах с заданным вращательным или изгибным моментом. Это необходимо для наследования сеткой из объемных элементов граничных условий, заданных для исходной оболочечной или балочной сетки.

## 2. Результаты расчетов

В качестве иллюстрации применения метода solid-shell-технологии в ПП ЛОГОС для численного решения задач статической прочности в данном разделе представлены результаты расчетов ряда тестовых и практических задач в нелинейной постановке с учетом эффекта геометрической нелинейности. Данные расчеты проводились в предположении разрывности нормалей в вершинах оболочечных элементов с начала расчета.

**Расчеты изгиба пластины.** Приведены результаты решения трех вариантов задачи на изгиб пластины, лежащей в плоскости  $XU$ , с учетом эффекта геометрической нелинейности. Моделировались три разных типа изгибных деформаций при нагрузке:

- 1) в плоскости пластины (приложение нагрузки по оси  $Y$ );
- 2) нормальной к плоскости пластины (приложение нагрузки по оси  $Z$ );
- 3) приводящей к скручивающему деформированию (противоположные нагрузки по оси  $Z$  в двух узлах). Для обеспечения статической определенности левый торец пластины закреплен от перемещений.

В табл. 1, 2 представлены результаты, полученные с помощью ПП ЛОГОС-Прочность с привлечением solid-shell-подхода, в сравнении с эталонными результатами [6].

Таблица 1

Максимальное суммарное перемещение пластины при изгибе (мм)

Вид нагрузки	Эталон	ЛОГОС-Прочность	Погрешность, %
В плоскости пластины	8,52509	8,50709	0,2111
По нормали к плоскости пластины	23,8068	23,6541	0,6414
Закручивающая	6,09903	5,99552	1,6972

Таблица 2

Максимальное напряжение по Мизесу при изгибе пластины (кгс/мм<sup>2</sup>)

Вид нагрузки	Эталон	ЛОГОС-Прочность	Погрешность, %
В плоскости пластины	495,258	494,482	0,1567
По нормали к плоскости пластины	144,651	144,180	0,3256
Закручивающая	280,062	272,062	2,8565

Как видно из таблиц, алгоритмы нелинейного деформирования, реализованные в ЛОГОС-Прочность для объемных элементов, оказываются применимыми и в случае их использования для моделирования оболочечных элементов по solid-shell-технологии. Для трех вариантов нелинейного деформирования оболочки с большими перемещениями получено согласие с эталонными решениями (разница в перемещениях менее 2 %; разница в максимальных напряжениях менее 3 %).

**Расчет пластины под давлением.** В данной задаче необходимо определить прогибы и напряженное состояние пластины, нагруженной равномерным давлением. Конечно-элементная модель строится с использованием изгибно-мембранных 2D-элементов. Цель процедуры – оценка возможности учета больших прогибов. Верификация выполнялась путем сопоставления результатов, полученных с помощью программы ЛОГОС-Прочность, с аналитическим решением.

Расчетная сетка пластины содержала 2601 узлов и 2500 изгибно-мембранных плоских конечных элементов. Конечно-элементная модель пластины представлена на рис. 6. Характерный размер конечных элементов – 2×2 мм. Модуль упругости материала пластины –  $E = 21000 \text{ кгс/мм}^2$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . Материал считался линейно-упругим. По всем кромкам пластина жестко закреплена. Взаимное сближение кромок пластины отсутствует. Пластина нагружена равномерно распределенным давлением интенсивностью  $p = 18 \text{ кгс/мм}^2$ . На рис. 7 показана схема закрепления и нагружения пластины.

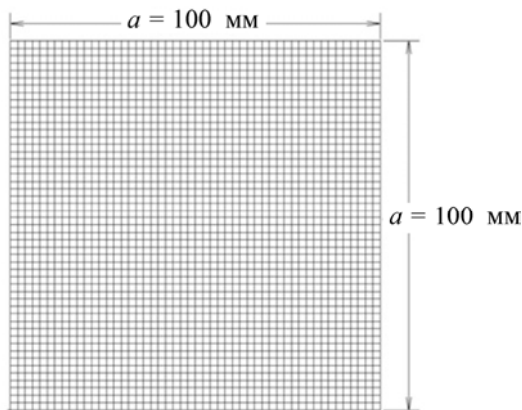


Рис. 6. Конечно-элементная модель пластины

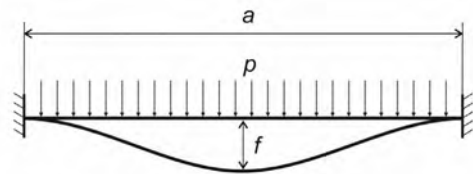


Рис. 7. Схема закрепления и нагружения пластины под давлением

Задача решалась в геометрически нелинейной постановке. Нужно было найти зависимость прогиба в центре пластины от прикладываемого давления. На рис. 8 (см. также цв. вкл.) показано деформированное состояние пластины на конечный момент нагружения в расчете по ПП ЛОГОС-Прочность с использованием solid-shell-технологии.

На рис. 9 сравнивается решение, полученное по ЛОГОС-Прочность, и аналитическое решение [8]. Как видно из приведенных графиков, они хорошо согласуются между собой.

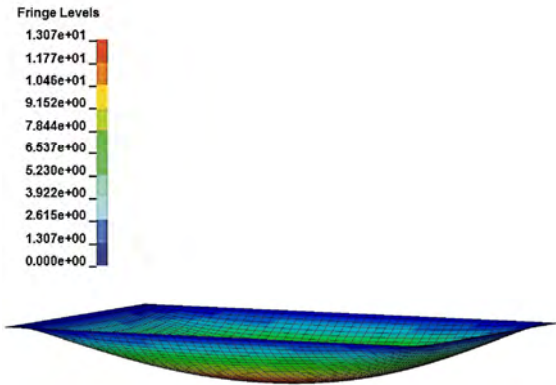


Рис. 8. Деформированное состояние пластины на конечный момент нагружения в расчете по ЛОГОС-Прочность

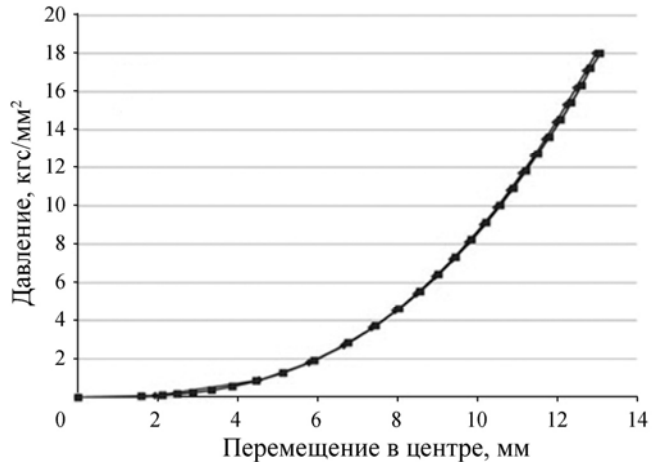


Рис. 9. Зависимость давления от перемещения в центре пластины: ■ – аналитическое решение, ◆ – расчет по ЛОГОС-Прочность

**Расчет панелей конструкции летательного аппарата.** Общий вид экспериментальной панели и ее геометрические параметры представлены на рис. 10. Необходимо определить критическое усилие продольного сжатия панели, при котором исчерпывается ее несущая способность, т. е. она не может воспринимать возрастающую нагрузку [6]. Материал панели – алюминиевый сплав типа 1163 ( $E = 7200 \text{ кгс/мм}^2$ ,  $\nu = 0,3$ ) – считался линейно-упругим.

На левом торце панель закреплена во избежание продольных и вертикальных перемещений. В местах расположения шпангоутов узлы расчетной сетки закреплены от перемещений из плоскости панели. Закрепление правого торца панели избавляет от вертикальных перемещений. В продольном направлении к правому торцу панели прикладывается кинематическое нагружение в виде перемещения  $\Delta U = 6 \text{ мм}$ .

Конечно-элементная модель панели представлена на рис. 11. Для моделирования использовались изгибно-мембранные оболочечные элементы. Задача решалась в геометрически нелинейной постановке с заданным инкрементом приращения по нагрузке 0,05.

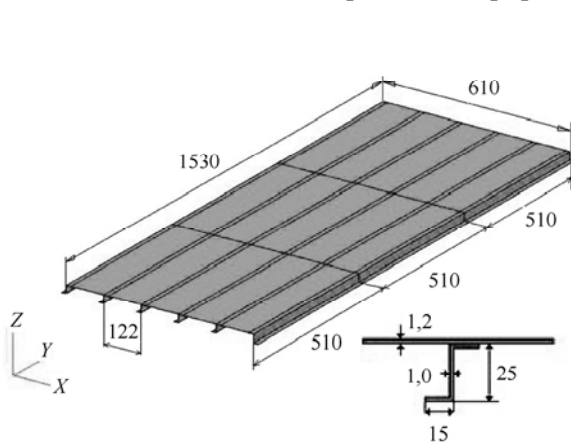


Рис. 10. Геометрическая модель панели

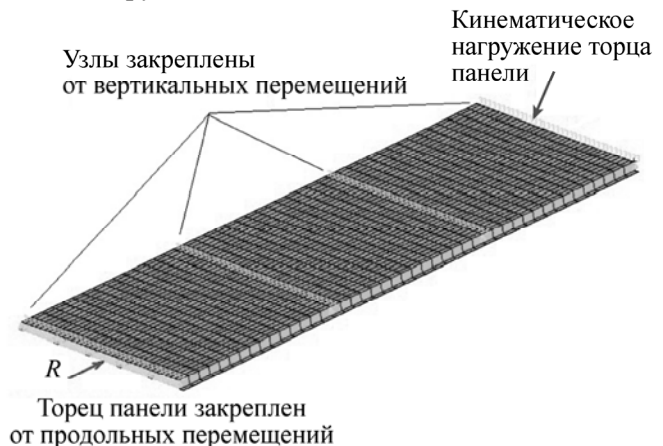


Рис. 11. Конечно-элементная модель панели



В эталонном расчете критическое усилие сжатия панели отслеживалось по максимальному значению силы реакции на ее левом торце. Согласно этому расчету критическое усилие, после которого начинается общая потеря устойчивости и разрушение, соответствует 76 % приложенной нагрузки [6]. При этом местная потеря устойчивости начиналась с 12 % приложенной нагрузки. В результате расчета по ЛОГОС-Прочность с учетом геометрической нелинейности получено критическое усилие, соответствующее 80 % прикладываемой нагрузки. По достижении данного нагружения начинается сильный рост деформаций, приводящий к общей потере устойчивости и разрушению элементов.

### *Заключение*

Представлено описание методов и алгоритмов расчетной solid-shell-технологии, реализованной в рамках модуля решения задач квазистатической прочности конструкций ПП ЛОГОС. Реализованный подход обеспечивает возможность моделирования процессов нелинейного деформирования тонкостенных конструкций, состоящих из балочных и оболочечных конечных элементов, с учетом эффекта геометрической нелинейности.

Ключевой аспект реализованной solid-shell технологии заключается в расширении одномерных и двумерных элементов до объемных элементов с учетом толщины и локальной ориентации балок и оболочек. Достоинством реализованного подхода является то, что для пользователя сохраняется легкость в постановке модели и интерпретации результатов, поскольку все процедуры построения объемной сетки и обратного перехода к исходной плоской/одномерной сетке скрыты внутри кода. Кроме того, реализованный набор процедур расширения плоской сеточной топологии до сетки из объемных элементов может быть востребован и повторно использован в других программных модулях пакета ЛОГОС, в частности программах визуализации, а также контактных алгоритмах для нахождения взаимопenetрации контактирующих поверхностей.

Хорошее согласие результатов расчетов ряда задач с аналитическими и эталонными численными решениями демонстрирует применимость реализованного solid-shell-подхода. Путем учета эффекта геометрической нелинейности в задачах деформирования оболочечных и балочных конструкций расширяется класс задач, решаемых с применением модуля квазистатической прочности ПП ЛОГОС.

### **Список литературы**

1. Циберев К. В., Авдеев П. А., Артамонов М. В. и др. Пакет программ ЛОГОС. Функциональные возможности для решения задач прочности // Труды XIII международного семинара «Супервычисления и математическое моделирование». – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2011. С. 541–550.
2. Речкин В. Н., Спиридонов В. Ф., Циберев К. В. и др. Пакет программ ЛОГОС. Модуль решения квазистатических задач прочности и модального анализа // Там же. С. 493–502.
3. Flores G. F., Onate E. A basic thin shell triangle with only translational DOFs for large strainplasticity // Int. J. Numer. Methods Eng. 2001. Vol. 51. P. 57–83.

4. Wriggers P., Eberlein R., Reese S. A comparison of three-dimensional continuum and shell elements for finite plasticity // *Int. J. Solids Struct.* 1996. Vol. 33. P. 3309–3326.
5. Dhondt G. The finite element method for three-dimensional thermomechanical applications. – England, Chichester: John Wiley & Sons, 2004. P. 162–167.
6. Барабанов Р. А., Дьянов Д. Ю., Каныгин И. И. и др. Пакет программ ЛОГОС. Метод решения задач статической прочности тонкостенных и стержневых конструкций на основе solid-shell технологии // Труды XV межд. конф. «Супервычисления и математическое моделирование». – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2015. С. 61–72.
7. Dhondt G. CalculiX CrunchiX USER'S MANUAL version 2.5 [Electronic resource]. – <http://www.calculix.de>.
8. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гос. изд-во физ.-тех. лит., 1956.

## **LOGOS Code Package: the Method of Solving the Static Strength Problems for Thin-Walled and Framed Structures on the Basis of the Solid-Shell Technology**

R. A. Barabanov, D. Yu. D'yanov, I. I. Kanygin,  
V. F. Spiridonov, E. A. Filimonkin, K. V. Tsiberev

*A technology of simulating the structure deformation process by expanding the structural finite elements (shell and beam elements) to obtain solid elements of continuum (hexahedrons, triangular prisms) has been developed and implemented in the static strength module of the LOGOS code package. This technology allows simulating the nonlinear deformation of thin-walled structures with shell and beam elements owing to the earlier implemented capabilities for solid elements.*

*The basic procedures and algorithms of the implemented method are described, results of test simulations of nonlinear problems with regard to geometrical nonlinearity are presented and compared with the available benchmark solutions.*