

УДК 519.6+533.6

# Искусственная вязкость в схемах типа Годунова как метод подавления «карбункул»- неустойчивости

*Описан новый метод решения «карбункул»-проблемы в схемах типа Годунова при моделировании гиперзвуковых течений с ударными волнами. Метод предполагает подавление «карбункул»-неустойчивости за счет введения в расчет диссипативных добавок в виде правых частей уравнений Навье – Стокса с заменой физической вязкости на искусственную. Эффективность предлагаемого подхода демонстрируется на примерах решения тестовых задач.*

**А. В. Родионов, И. Ю. Тагирова**

## *Введение*

Эффективным инструментом численного решения многомерных задач газовой динамики являются методы сквозного счета. При их использовании газодинамические разрывы не выделяются специальным образом, а «размываются» на некоторое число ячеек расчетной сетки. Одна из основных трудностей сквозного счета связана с появлением нефизических осцилляций решения в окрестности разрывов, которые могут его заметно исказить.

Первая схема сквозного счета была описана в 1950 г. Нейманом и Рихтмайером [1]. Главная идея заключалась в добавлении специального члена *искусственной вязкости*, приводящего к диссипации ударной волны (УВ) на несколько сеточных интервалов. При этом действие искусственной вязкости по своему характеру напоминает действие физической вязкости, но ее значение зависит от интенсивности скачка и размера счетной ячейки.

Одними из наиболее популярных методов сквозного счета являются схемы типа Годунова. В 1959 г. С. К. Годунов опубликовал работу [2], в которой предложил «наиболее точную» монотонную схему первого порядка, основанную на двух предположениях. Согласно первому предположению пространственное распределение всех параметров газа на *нижнем* временном слое считается кусочно-постоянным. Второе предположение заключается в использовании решения задачи о распаде произвольного разрыва (задачи Римана) при вычислении потоков на границах ячеек.

В 1988 г. была обнаружена серьезная проблема [3] в применении методов типа Годунова к задачам гиперзвуковой аэродинамики, получившая название «carbuncle phenomenon». Постепенно эта проблема привлекла к себе внимание большого числа специалистов в области численного моделирования. Так, ван Лир в своем обзоре [4], посвященном истории развития численных методов в США и Канаде, выделил «карбункул»-проблему как одну из главных нерешенных проблем классических конечно-объемных схем.

Эффект карбункула обнаруживается при сквозном расчете сильных УВ в гиперзвуковых потоках и проявляется как численная неустойчивость, приводящая к сильному искажению течения.

Появление неустойчивости зависит и от расчетной сетки, и от метода решения задачи Римана: менее точные методы свободны от этой проблемы, в то время как большинство более точных методов подвержены карбункул-неустойчивости.

Основные способы борьбы с эффектом карбункула связаны с модификацией методов решения задачи Римана. Кёрк [5] первым предложил комбинировать различные методы решения задачи Римана в зависимости от локальных условий течения.

Наиболее эффективным считается использование «rotated Riemann solvers» [6–9], когда делается декомпозиция нормали к боковой грани и в каждом из направлений решается своя задача Римана. В случае, когда по разным направлениям используются разные методы решения задачи распада разрыва, то говорят о «rotated-hybrid Riemann solvers» [7–9]. Такой способ считается самым эффективным, поскольку позволяет выгодно комбинировать диссипативные свойства двухволновых и трехволновых методов приближенного решения задачи Римана.

В данной работе предлагается новый способ борьбы с карбункул-неустойчивостью, который является универсальным (применим к различным схемам) и эффективным (действует избирательно, а именно только на фронте УВ). Для этого в базовый метод решения уравнений Эйлера предлагается добавлять некоторое количество диссипации в форме правых частей уравнений Навье – Стокса (*вязких* членов). Коэффициент физической вязкости заменяется коэффициентом искусственной вязкости, который согласуется с [1], но имеет свои особенности; вводится в рассмотрение искусственная теплопроводность. Новый способ тестируется на схеме Годунова и ее модификации второго порядка точности (схема Годунова – Колгана – Родионова (ГКР) [10, 11]) с использованием точного решения задачи Римана.

### ***Краткий обзор работ по искусственной вязкости***

Первая схема сквозного счета была описана в 1950 г. Рихтмайером и Нейманом [1]. Главная идея их работы заключалась в добавлении к давлению диссипативного источника, который размывает профиль ударной волны на несколько ячеек:

$$q = c\rho(\Delta x)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (1)$$

Стоит отметить, что в [1] вязкость добавлялась в основные уравнения и при сжатии, и при разрежении. Позднее было предложено использовать искусственную вязкость только на сжатии. Далее, когда речь пойдет об аддитивном источнике в давлении, будет подразумеваться только сжатие (если не оговорено другое).

После введения искусственной вязкости (1) за фронтом УВ все еще оставались осцилляции. Для борьбы с ними была разработана линейная комбинация квадратичного и линейного вязкостных источников [12]:

$$q = c_1\rho(\Delta x)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + c_2\rho a\Delta x \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – эмпирические константы,  $a$  – скорость звука.

Существуют и другие формы искусственной вязкости. Например, в [13] В. Ф. Куропатенко для описания роста энтропии использует тот же механизм, что и на УВ. Выражение для искусственной вязкости выводится из законов сохранения на поверхности сильного разрыва с привлечением уравнения состояния. Так, для идеального газа  $p = (\gamma - 1)\rho e$  искусственная вязкость будет иметь вид

$$q = \frac{\gamma + 1}{4} \rho (\Delta x)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \sqrt{\left( \frac{\gamma + 1}{4} \rho \right)^2 (\Delta x)^4 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 + (\rho a)^2 (\Delta x)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2}. \quad (2)$$

Неоспоримым достоинством метода является отсутствие каких-либо эмпирических констант.

Вместо громоздкой формулы (2) также используют более простую формулу в форме [12] с конкретными коэффициентами (например, Уилкинса [14]):

$$q = \frac{\gamma + 1}{2} \rho (\Delta x)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + a \rho \Delta x \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|. \quad (3)$$

Одним из недостатков метода сквозного счета [1] является действие численной вязкости как при ударном, так и при адиабатическом сжатии. Для решения данной проблемы предложено использовать ограничители [15, 16]. Данные функции-ограничители основаны на TVD-методе ограничения потоков Хартена и находят сегодня широкое применение (см., например, [17, 18]). Их использование также позволяет сократить численную вязкость (диссипацию) в областях умеренных градиентов скоростей.

Липидус [19] предложил новый подход, заключающийся в добавлении к вектору численного потока  $\mathbf{F} = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u(e + p/\rho))$  диссипативных источников вида

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F} - \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = c (\Delta x)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x},$$

где  $\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho e)$  – вектор консервативных переменных. Стоит подчеркнуть, что диффузионный поток вводится во все законы сохранения, включая уравнение неразрывности. Искусственную вязкость в форме Липидуса использовали Колелла и Вудвард в расчетах по схеме PPM [20].

Обобщение искусственной вязкости на многомерный случай может быть реализовано двумя способами, каждый из которых имеет свои сложности.

Первый способ имеет скалярный характер и заключается в рассмотрении искусственной вязкости как источника давления. При этом, как правило, в выражении для искусственной вязкости производная скорости заменяется на ее дивергенцию. При таком способе обобщения желательно учитывать направление движения УВ в формуле для характерного размера счетной ячейки (см., например, [14, 21]). К типичным недостаткам скалярной многомерной вязкости следует отнести ее действие при адиабатическом сжатии, что может приводить к искажению численного решения.

Второй способ обобщения имеет ярко выраженный многомерный характер и сводится к рассмотрению тензорной природы искусственной вязкости. Пионерской работой в этом направлении считается работа Шульца [22]. Он разработал тензор вязких напряжений на основе одномерных вязкостей, вычисленных в каждом из направлений линий сетки; при этом было использовано понятие одномерной дивергенции. Полученный тензор не обладает симметрией.

Работу [22] можно назвать ключевой, поскольку здесь впервые сформулирован ряд требований (критериев), которым должна удовлетворять искусственная вязкость. Позднее в [17] были развиты идеи Шульца [22] и расширен набор критериев.

В 2001 г. в работе [18] были предложены два вида тензорной искусственной вязкости. Первую из них назвали симметричной, поскольку тензор искусственных вязких напряжений имеет симметричную форму:

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4)$$

Данная форма близка к физическим вязким напряжениям для несжимаемых течений. Другой тензор искусственных вязких напряжений имеет несимметричную форму:

$$\tau_{ij} = \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (5)$$

Авторы [18] на основе некоторых теоретических рассуждений и результатов численных экспериментов делают вывод, что несимметричная форма вязкости (5) дает лучшее решение, чем симметричная форма (4). В более поздних работах авторы рассматривают уже только несимметричную форму тензора искусственных вязких напряжений (5).

Интересно отметить, что Уилкинс в работе [14] предложил совместно с вязкостью (3) использовать тензорную вязкость в форме уравнений Навье – Стокса для борьбы с искажением сетки типа *песочных часов* (для разнесенных сеток).

А. М. Стенин и Е. А. Соловьева предложили метод [23], названный *матрицей искусственных вязкостей*. Тензор искусственных вязких напряжений [23] имеет симметричную форму, которая отличается от тензора вязких напряжений уравнений Навье – Стокса диагональным членом:

$$\boldsymbol{\tau} = C_U l \rho \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \end{pmatrix}.$$

Примечательно, что в [23] вводится в рассмотрение не только тензор искусственных вязких напряжений, но и диффузия массы с искусственной теплопроводностью [24].

### ***Искусственная вязкость в форме физической вязкости***

По мнению авторов настоящей работы, наиболее естественно добавлять искусственную вязкость в такой форме, которая соответствует физической вязкости. Такой подход особенно привлекателен для тех CFD-кодов, которые уже имеют аппроксимацию уравнений Навье – Стокса, поскольку в этом случае доработки минимальны. Тогда в двумерном случае тензор искусственных вязких напряжений принимает вид

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu_{AV} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \nabla \mathbf{u} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \nabla \mathbf{u} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Входящий в (6) коэффициент искусственной вязкости  $\mu_{AV}$  предлагается вычислять как

$$\mu_{AV} = k_1 \rho l^2 \max(0, -\nabla \mathbf{u} - k_2 a/l), \quad (7)$$

где  $a$  – скорость звука;  $k_1, k_2$  – коэффициенты.

Общий вид выражения (7) обуславливает наличие искусственной вязкости только в областях сжатия, а наличие ограничителя ( $k_2 > 0$ ) гарантирует, что введенная искусственная вязкость будет действовать только на фронте интенсивной УВ (отсутствие реакции на безударное сжатие). Кроме того, такой подход дает дополнительное преимущество, связанное с экономией вычислительных ресурсов (если  $\mu_{AV} = 0$ , вязкие члены не рассчитываются).

Характерный размер  $l$  в выражении (7) предлагается вычислять по формуле

$$l^2 = \frac{V^2}{S_i^2 + S_j^2},$$

где  $V$  – объем ячейки, а  $S_i^2, S_j^2$  – квадраты площадей боковых граней вдоль двух линий сетки. Нетрудно показать, что характерный размер близок к минимальной стороне ячейки с некоторым запасом.

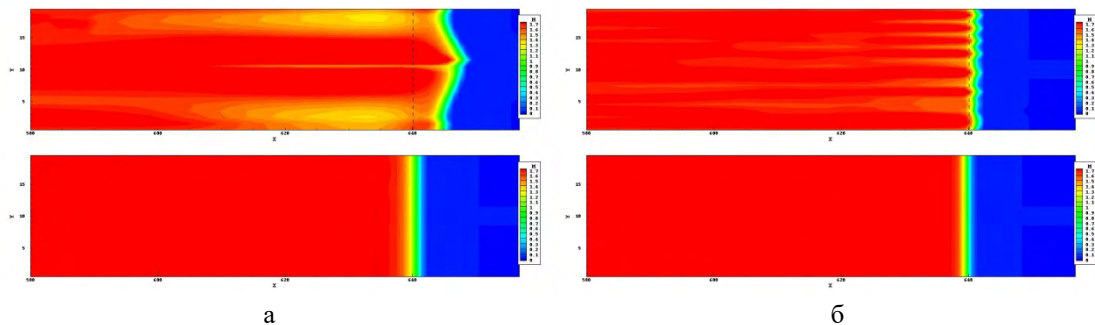


Рис. 1. Распределение чисел Маха в задаче Кёрка:  
 а – расчеты по схеме Годунова, б – расчеты по схеме ГКР;  
 вверху – без искусственной вязкости, внизу – с искусственной вязкостью

На основе большого количества тестовых расчетов были выбраны следующие значения для постоянных коэффициентов в (7):  $k_1 = 0,5, k_2 = 0,02$ . Данные значения обеспечивают минимальное значение диссипации, необходимое для регуляризации численного решения.

В дополнении к членам искусственной вязкости предлагается добавлять искусственную теплопроводность, определяемую через коэффициент:

$$\lambda_{AV} = \frac{\mu_{AV} C_p}{Pr},$$

где  $C_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $Pr$  – число Прандтля, полагаемое равным единице.

### Численные расчеты

**Задача Кёрка.** Подробная постановка задачи приведена в [5] («odd-even decoupling»). В плоском канале исследуется гиперзвуковое течение газа с числом Маха  $M=6$ . Область покрывалась равномерной сеткой с единичным шагом ( $h_x = h_y = 1$ ). В положение узлов центральной линии счетной сетки  $j_c = 11$  (соответствует  $y = 10$ ) вносились возмущения следующим образом:

$$\bar{y}(i, j_c) = y(i, j_c) + (-1)^i \varepsilon.$$

В оригинальной работе [5] использовалось значение  $\varepsilon = 10^{-6}$ . В данной работе для ускорения развития карбункул-неустойчивости используется значение  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Задача рассчитывалась до момента времени

$$t = 0,8 \text{ Scale}, \quad \text{Scale} = \frac{800}{U_{\text{shock}}},$$

что соответствует положению фронта УВ  $x_{\text{shock}} = 640$  ( $U_{\text{shock}}$  – скорость УВ).

На рис. 1 (см. также цв. вкл.) представлено распределение числа Маха в расчетах по схемам Годунова и ГКР в оригинальном варианте и с введением искусственной вязкости. Видно, что искусственная вязкость позволяет предотвратить появление карбункула, фронт волны остается гладким, а задача – одномерной (что соответствует физической постановке).

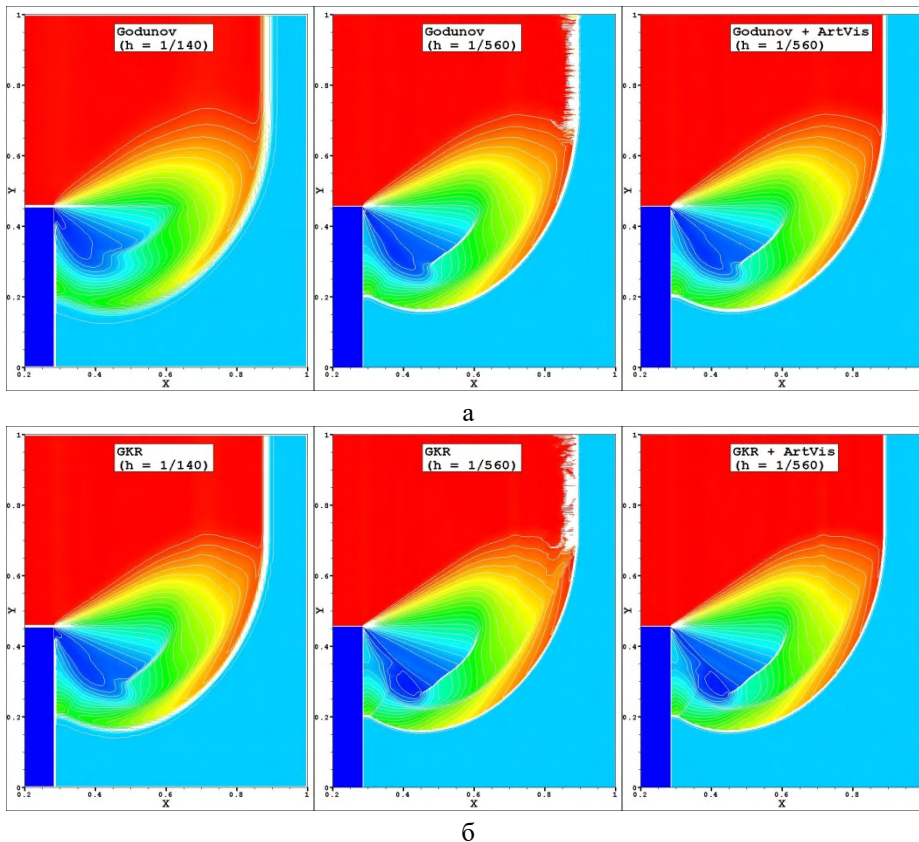


Рис. 2. Распределение числа Маха в задаче о дифракции сильной УВ на прямом угле:  
а – расчеты по схеме Годунова, б – расчеты по схеме ГКР

**Дифракция сильной УВ на прямом угле.** Постановка взята из [5], где УВ с числом Маха  $M = 5$  движется слева направо, обтекая конструкцию в виде ступеньки (плоская постановка). На рис. 2 (см. также цв. вкл.) представлены результаты расчетов на двух сеточных разбиениях:  $h = 1/140$  и  $h = 1/560$ . На грубом сеточном разбиении получаемое решение является приемлемым. При измельчении сетки диссипативных свойств схем недостаточно, чтобы подавить развитие карбункул-неустойчивости на фронте УВ. Введение искусственной вязкости позволяет корректно заполнить расчет без развития возмущений на фронте УВ.

**Задача «Double Mach Reflection».** Постановка задачи взята из [25]. Задача представляет собой моделирование взаимодействия плоской УВ (число Маха  $M = 10$ ) с клином под углом  $30^\circ$ . Расчет проводится до момента времени  $t = 0,2$ . Область покрывается равномерной сеткой с равными по всем направлениям разбиениями:  $h = 1/120$ ,  $h = 1/240$ ,  $h = 1/480$ .

На рис. 3, 4 представлены результаты численного моделирования, выполненного по схемам Годунова и ГКР на серии сгущающихся сеток без искусственной вязкости и с ее использованием. Введение искусственной вязкости позволяет избежать излома *ножки Маха* и правильно описать контактный разрыв грибовидной формы. Рис. 5 демонстрирует, что введенная искусственная вязкость действует только на фронтах сильных УВ и не затрагивает остальную область течения, в том числе контактный разрыв.

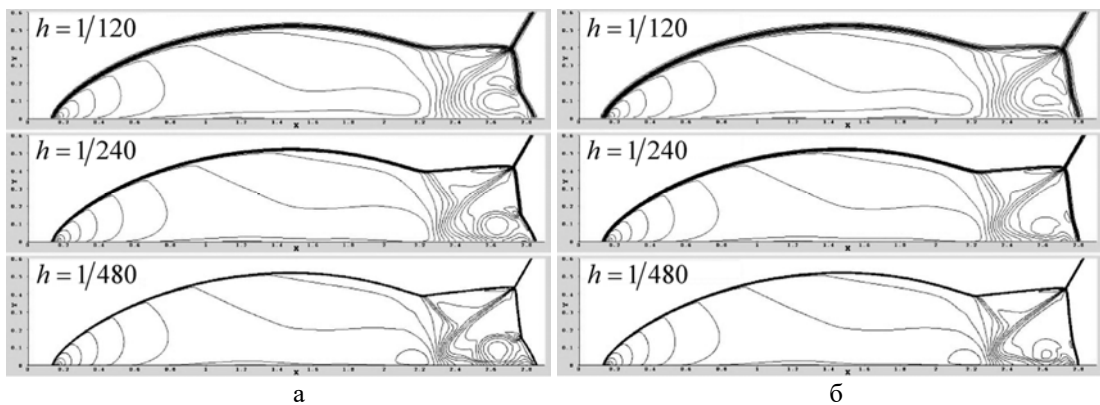


Рис. 3. Изолинии плотности в расчетах задачи «Double Mach Reflection» на последовательно сгущающихся сетках по схеме Годунова без искусственной вязкости (а) и с ее использованием (б)

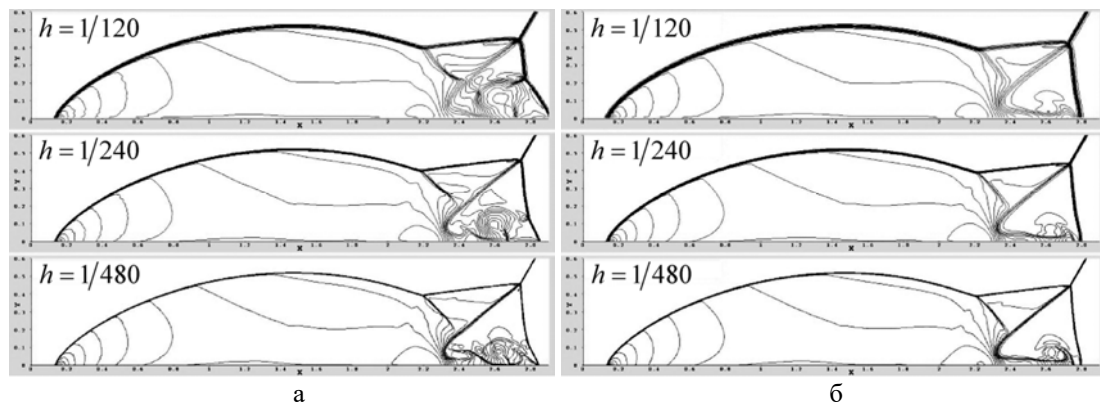


Рис. 4. Изолинии плотности в расчетах задачи «Double Mach Reflection» на последовательно сгущающихся сетках по схеме ГКР без искусственной вязкости (а) и с ее использованием (б)

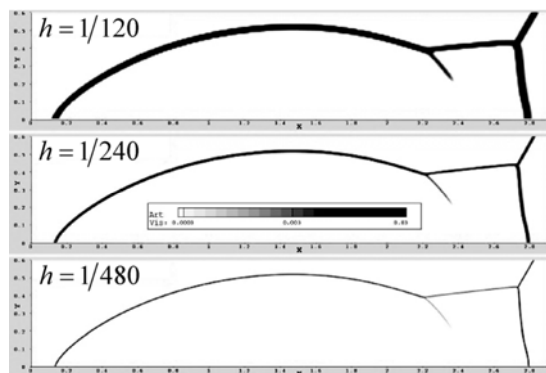


Рис. 5. Поле искусственной вязкости в расчетах задачи «Double Mach Reflection» на последовательно сгущающихся сетках по схеме ГКР

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-06224).

Авторы выражают признательность Бондаренко Ю. А. за полезные обсуждения и ценные замечания.

### Список литературы

1. Neumann J. von, Richtmyer R. D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // J. Appl. Phys. 1950. Vol. 21. P. 232–237.
2. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47, № 3. С. 271–306.
3. Peery K. M., Imlay S. T. Blunt body flow simulations // AIAA Paper. 1988. No 88-2924.
4. Leer B. van. The development of numerical fluid mechanics and aerodynamics since the 1960s: US and Canada // 100 Volumes of «Notes on Num. Fluid Mech» / Ed. by E. H. Hirschel et al. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. P. 159–185.
5. Quirk J. J. A contribution to the great Riemann solver debate // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 1994. Vol. 18. P. 555–574.
6. Ren Y.-X. A robust shock-capturing scheme based on rotated Riemann solvers // Comp. and Fluids. 2003. Vol. 32. P. 1379–1403.
7. Nishikawa H., Kitamura K. Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers // J. Comp. Phys. 2008. Vol. 227. P. 2560–2581.
8. Shen Y., Gecheng Zha G., Huerta M. A. Rotated hybrid low diffusion ECUSP-HLL scheme and its applications to hypersonic flows // AIAA Paper. 2011. No 2011-3345.
9. Huang K., Wu H., Yu H., Yan D. Cures for numerical shock instability in HLLC solver // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2011. Vol. 65. P. 1026–1038.
10. Родионов А. В. Монотонная схема второго порядка аппроксимации для сквозного расчета неравновесных течений // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1987. Т. 27, № 4. С. 585–593.



11. Родионов А. В., Мышкина И. Ю., Спиридонов В. Ф. и др. Программный модуль для решения двумерных аэродинамических задач на основе явной схемы Годунова – Колгана – Родионова // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2013. Вып. 2. С. 19–36.
12. Landshoff R., A Numerical method for treating fluid flow in the presence of shocks. Technical Report LANL-1930, 1955.
13. Куропатенко В. Ф. О разностных методах для уравнений газовой динамики // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1966. Т. 74. С. 107–137.
14. Wilkins M. L. Use of artificial viscosity in multidimensional shock wave problems // J. Comp. Phys. 1980. Vol. 36. P. 281–303.
15. Christiansen R. Godunov methods on a staggered mesh – an improved artificial viscosity. LLNL Report UCRL-JC-105269, 1991.
16. Christiansen R. High resolution hydrodynamics methods using artificial viscosity // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 1996. Вып. 4. С. 89–93.
17. Caramana E. J., Shashkov M. J., Whalen P. P. Formulations of artificial viscosity for multi-dimensional shock wave computations // J. Comp. Phys. 1998. Vol. 144. P. 70–97.
18. Campbell J. C., Shashkov M. J., A Tensor artificial viscosity using a mimetic finite difference algorithm // J. Comp. Phys. 2001. Vol. 172. P. 739–765.
19. Lapidus A. A detached shock calculation by second-order finite differences // J. Comp. Phys. 1967. Vol. 2. P. 154–177.
20. Colella P., Woodward P. The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations // J. Comp. Phys. 1984. Vol. 54. P. 174–201.
21. Бахрах С. М., Глаголева Ю. П., Самигулин М. С. и др. Расчет газодинамических течений на основе метода концентраций // АН СССР. 1981. Т. 257, № 3. С. 566.
22. Schulz W. D. Tensor artificial viscosity for numerical hydrodynamics // J. Math. Phys. 1964. Vol. 5. P. 133–138.
23. Стенин А. М., Соловьева Е. А. Матрица искусственных вязкостей для двумерной лагранжевой газодинамики, способствующая уменьшению «энтропийного следа» в численных расчетах // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2010. Вып. 1. С. 3–18.
24. Noh W. F. Errors for calculations of strong shocks using an artificial viscosity and an artificial heat flux // J. Comp. Phys. 1987. Vol. 72. P. 78–120.
25. Woodward P., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comp. Phys. 1984. Vol. 54. P. 115–173.

## **Artificial Viscosity in the Godunov's-Type Schemes as the Method of «Carbuncle»-Instability suppression**

A. V. Rodionov, I. Yu. Tagirova

*The paper describes a new method of solving the «carbuncle» problem in the Godunov's-type schemes when simulating hypersonic flows with shock waves. The method assumes the carbuncle instability suppression by means of the introducing of dissipative additions into the calculation in the form of right-hand parts of the Navier-Stokes equations with the physical viscosity replaced by the artificial one. The efficiency of the proposed approach is demonstrated by the examples of benchmark problem solutions.*