

УДК 537.8; 531.35

Устойчивые компактные движения частицы под действием центральной силы в шестимерном пространстве- времени

Р. А. Анпилогов

Приведен контрпример к известному утверждению Эренфеста о невозможности существования связанных электромагнитных систем в пространствах с размерностью большей 3. Требования выполнения законов Максвелла в любых четных пространственно-временных размерностях и общей самосогласованности динамики приводят к необходимости модификации законов механики посредством введения старших производных по времени. Рассматривается нерелятивистская частица с лагранжианом, зависящим от ускорения, движущаяся в пятимерном пространстве под действием притягивающего $1/r^3$ потенциала. Найдены компактные движения частицы, проецирующиеся на Пуассоновы положения равновесия соответствующей гамильтоновой системы, редуцированной по группе $SO(5)$. Нелинейно устойчивые положения равновесия соответствуют физически устойчивым движениям вдоль прямого произведения 3-сфер в конфигурационном пространстве. Показано, что энергетический метод непригоден для строгого доказательства устойчивости. Устойчивость исследуемой системы показана явно посредством численного решения уравнений возмущенного движения на редуцированном фазовом пространстве. Таким образом, падение на центр в задаче предотвращается.

Введение

Широко распространено представление, согласно которому заряженная частица в D -мерном пространстве \mathbb{R}_D под действием центральной электростатической силы всегда движется неустойчиво в случае $D \geq 4$; все движения ограничены в случае $D \leq 2$; в пространстве \mathbb{R}_3 возможны как ограниченные, так и неограниченные движения. Это представление восходит к анализу вопроса «Какие выделенные свойства отличают геометрию и физику в \mathbb{R}_3 от возможной физики в \mathbb{R}_D ?», проведенному Эренфестом в работах [1, 2]. Отвечая на этот вопрос, Эренфест предположил, что в воображаемом мире с D пространственными измерениями законы механики и электромагнетизма те же, что и в \mathbb{R}_3 . Точнее, в таком случае законы, определяющие поведение замкнутой системы из N заряженных частиц, определяются привычным действием

$$S = - \sum_{I=1}^N \int d\tau_I \left[m_0^I \sqrt{\dot{x}_I \dot{x}_I} + e_I \dot{x}_I^\mu A_\mu(x_I) \right] - \frac{1}{4\Omega_{D-1}} \int d^{D+1}x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1)$$

где Ω_{D-1} – площадь единичной $(D-1)$ -сферы. В действительности достаточно рассматривать поведение двух заряженных частиц с зарядами Ze и $-e$. Эренфест полагал, что при любом значении D задача двух тел сводится к задаче Кеплера для одной частицы с приведенной массой \bar{m} и зарядом $-e$ в сферически-симметричном притягивающем поле заряда Ze , покоящегося в начале координат. Особенностью данной задачи является то, что все возможные траектории частицы лежат в плоскости. Качественный анализ релятивистской задачи Кеплера может быть проведен с помощью эффективного потенциала (см., например, [3])

$$u(r) = \sqrt{\bar{m}^2 + \mathbf{L}^2/r^2} + U(r). \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{L}^2 = \sum_{i < j} L_{ij}^2$ – квадрат момента импульса, $U(r) = e\varphi(\mathbf{x})$ – потенциальная энергия взаимодействия частиц. Временная компонента вектор-потенциала $\varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет D -мерному уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{x}) = -\Omega_{D-1} Ze \delta^{(D)}(\mathbf{x}). \quad (3)$$

Решение уравнения (3):

$$\varphi(\mathbf{x}) = -Ze \begin{cases} \operatorname{sgn}(2-D) |\mathbf{x}|^{2-D} & D \neq 2, \\ \log |\mathbf{x}| & D = 2. \end{cases} \quad (4)$$

При $D > 3$ потенциальная энергия $e\varphi(\mathbf{x})$ более сингулярна, чем центробежный член $|\mathbf{L}|/r$, поэтому падение на центр (или уход на бесконечность) неизбежно. В то же время при $D = 3$ и $Ze^2 \leq |\mathbf{L}|$ член $e\varphi(\mathbf{x})$ менее сингулярен, чем $|\mathbf{L}|/r$, что предотвращает падение на центр и делает возможным устойчивое орбитальное движение. Это привело Эренфеста к заключению о том, что $D = 3$ представляет собой пограничную черту между мирами, в которых возможно или невозможно существование таких устойчивых электромагнитно связанных систем, как атом водорода¹.

Данный анализ является упрощенным, так как взаимодействие частиц определяется электростатическим потенциалом (4) и опускается эффект радиационного замедления. При учете потерь на излучение, конечно, электрон падает на центр даже в пространстве \mathbb{R}_3 . Чтобы исправить ситуацию, Эренфест ввел в рассмотрение боровское квантование, отражающее связь устойчивости атома в реальном мире с его квантовой природой. Эренфест обнаружил, что боровская модель атома в пространствах \mathbb{R}_D с $D \geq 5$ приводит к дискретным энергетическим уровням, $E_n \sim n^{2(D-2)/(D-4)} \cdot (D-2)/(D-4)$. При этом система будет стремиться занимать все более низкие энергетические уровни одновременно с увеличением радиуса «орбитального движения», что означает неизбежную ионизацию атома.

¹ В действительности здесь идет речь не об устойчивости в строгом смысле. Малое возмущение радиуса кеплеровской орбиты рано или поздно приводит к угловой разнице в 180° между исходной и возмущенной орбитами, что свидетельствует о неустойчивости такого движения по Ляпунову. В то же время орбитальное движение интуитивно воспринимается как устойчивое, если малое возмущение соответствующего решения уравнений движения оставляет движение в компактной области фазового пространства при условии, что не происходит падения на центр. В задаче Кеплера мы имеем дело с таким типом устойчивости вместо устойчивости по Ляпунову. Будем называть компактные движения такого типа физически устойчивыми.

Более строгий анализ данной задачи с позиций современной квантовой механики был проведен Гуревичем и Мостепаненко [4]. Они анализировали систему двух частиц с потенциалом взаимодействия (4), используя уравнение Шредингера. Ими было показано, что при $D \geq 4$ дискретный энергетический спектр продолжается до $-\infty$. Давно известно [5], что подобные системы стремятся занять все более выгодное состояние, при этом дисперсия волновой функции приближается к нулю при $E \rightarrow -\infty$. В классической интерпретации этот процесс представляет собой падение на центр. Механизм, лежащий в основе этой неустойчивости, тот же, что и в классической картине. Так как сингулярность электромагнитного притяжения возрастает с ростом D , а центробежное отталкивание неизменно, появляется пограничная размерность, выше которой притяжение не может быть скомпенсировано инерцией вращения. В рассматриваемой системе возможно обращение электрона по орбите радиуса r_0 , при котором максимален эффективный потенциал $u(r_0) = u_{\max}$. Однако такое движение неустойчиво: система либо коллапсирует, либо разрушается. Рис. 1 иллюстрирует данное положение в классическом случае (рис. 1, а), в полуклассическом подходе Эренфеста, который подразумевает разрушение (рис. 1, б), и в квантово-механической интерпретации Гуревича и Мостепаненко, которая предсказывает падение на центр (рис. 1, в).

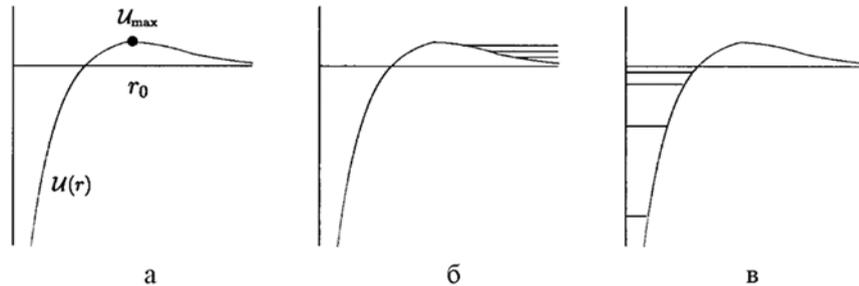


Рис. 1. Эффективный потенциал (а) и дискретный энергетический спектр по Эренфесту (б) и по Гуревичу и Мостепаненко (в)

Доводы Эренфеста были поставлены под сомнение Косяковым [6–8]. Он отметил, что классическая электродинамика с действием (1) является несамосогласованной при $D > 3$ из-за роста числа расходимостей энергии самодействия точечного заряда, который происходит с увеличением D . При этом действие (1) не содержит достаточного числа параметров, посредством переопределения которых можно было бы устранить все возникающие расходимости.

Рассмотрим в качестве примера случай $D = 5$. Интегрирование электромагнитного тензора энергии-импульса $F_{\mu\nu}$ по \mathbb{R}_5 приводит к кубической и линейной расходимости. Кубические расходимости возникают даже в случае покоящихся частиц и могут быть поглощены перенормированием m_0^I . Линейные расходимости возникают только для искривленных мировых линий, и для их поглощения не хватает свободного параметра. Следовательно, лагранжиан (1) может быть усовершенствован добавлением членов, содержащих высшие производные от x_I^μ , при этом множители при них выступают требуемыми свободными параметрами. Говорят, что лагранжиан, содержащий высшие производные (\ddot{x}_I^μ , $\ddot{\ddot{x}}_I^\mu$ и т. д.), описывает «жесткие частицы». Таким образом, основная идея работы [6] состоит в том, что в случае рассмотрения \mathbb{R}_D при $D > 3$ и сохранении электродинамики Максвелла необходимо привлекать динамику жестких частиц. Данное положение в дальнейшем подтвердилось с различных точек зрения [9–14]. Следует отметить, что случай $D = 2n$ должен рассматриваться отдельно, так как область определения запаздывающей функции Грина

в таком случае является всей внутренней частью светового конуса будущего, а не его поверхностью (иными словами, принцип Гюйгенса не работает в четных пространственно-временных размерностях). Таким образом, в случае $D = 2n$ ситуация с расходимостями существенно отличается от случая $D = 2n + 1$ и добавление членов с высшими производными может не привести к согласованной динамике.

Маловероятно, что задача динамики двух жестких частиц всегда может быть сведена к «плоской» задаче Кеплера для одной частицы. В общем случае свободная жесткая частица ведет себя негалилеевым образом, двигаясь по спиральной, а не по прямой мировой линии, что можно интерпретировать как классическую реализацию *zitterbewegung*-режима движения² [8]. Переход к такому типу движения при «выключении» взаимодействия несовместим с предположением об орбитальном движении частиц в плоскости. Таким образом, линия рассуждений Эренфеста неприемима к жестким частицам, и утверждение о невозможности существования электромагнитно связанной системы при $D > 3$ (в противоположность $D = 3$) открыто для обсуждения.

В статье приведен контрпример к данному утверждению. Поведение жесткой заряженной частицы в \mathbb{R}_5 рассматривалось без учета радиационного замедления. Была рассмотрена гамильтонова динамика нерелятивистской частицы в притягивающем потенциале $1/r^3$, показано, что ее движение может быть физически устойчивым и падения на центр не происходит. Говоря упрощенно, *zitterbewegung*-режим движения удерживает частицу от падения на центр.

Чтобы $(5 + 1)$ -мерную классическую электродинамику заряженной точечной частицы освободить от ультрафиолетовых расходимостей, достаточно снабдить отвечающую за частицы часть лагранжиана (1) дополнительным слагаемым, зависящим от ускорения. Подобный репараметризационно-инвариантный член общего вида представляет собой [15]

$$-\int d\tau_I \sqrt{\dot{x}_I \dot{x}_I} f(-a_I^2), \quad (5)$$

где $a_I^\mu = \gamma_I d/d\tau_I (\gamma_I \dot{x}_I^\mu)$, $\gamma_I = (\dot{x} \dot{x})^{-1/2}$, а f – произвольная гладкая функция. В частности, она может иметь вид

$$f(\alpha) \sim \alpha^{q/2}. \quad (6)$$

В работе [16] было показано, что свободная жесткая частица такого вида испытывает *zitterbewegung*, устойчивый относительно малых возмущений, в случаях $0 < q < 1/2$ или $q > 1$. В дальнейшем будем рассматривать функции f такого вида.

Исследование посвящено рассмотрению жесткой частицы, движущейся в сферически-симметричном потенциале $U(\mathbf{x}^2)$. Таким образом, работа опирается на лагранжиан

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \varepsilon\ddot{\mathbf{x}}^2 - U(\mathbf{x}^2). \quad (7)$$

Из-за отсутствия репараметризационной инвариантности действия, что означает отсутствие дираковских связей, нерелятивистское рассмотрение сильно облегчает анализ задачи. Он состоит в следующем. В разделе 1 применяется подход Остроградского для вывода гамильтоновой системы на

² *Zitterbewegung* – нем. «дрожащее движение». Термин введен Шредингером в 1930 г. и изначально относился к быстрому осциллирующему движению частицы, подчиняющейся уравнению Дирака. В настоящее время им характеризуют также соответствующее поведение абстрактных жестких частиц.

20-мерном фазовом пространстве, которая соответствует вариационной задаче с лагранжианом (7). Будучи $SO(5)$ -инвариантной, система допускает редукцию посредством отображения момента, математической конструкции, выражающей законы сохранения, связанные с симметрией гамильтоновой системы (см., например, [17]). Выраженная в терминах глобальных инвариантов группы $SO(5)$, система редуцируется на 10-мерное фазовое пространство. Раздел 2 посвящен описанию редукции. Установлено, что частица движется в 4-плоскости, определяемой регулярным элементом коалгебры $\mathfrak{so}^*(5)$, дуальной к алгебре Ли $\mathfrak{so}(5)$. В разделе 3 показано, что уравнения движения редуцированной системы имеют статические решения, представляющие собой точки в редуцированном фазовом пространстве, т. е. положения равновесия. Эти положения равновесия – проекции траекторий, описываемых частицей при движении вдоль 3-сфер в конфигурационном пространстве, на редуцированное фазовое пространство. Устойчивость по Ляпунову (также известная как нелинейная) положений равновесия в редуцированной задаче обеспечивает физическую устойчивость компактных движений. Нелинейная устойчивость продемонстрирована посредством численного решения уравнений возмущенного движения для случая движения в притягивающем потенциале $1/r^3$.

Введение высших производных в механические системы, связанные с непрерывным полем сил, обычно приводит к неустойчивости из-за того, что такие системы содержат и положительные, и отрицательные вклады в энергию, иными словами, гамильтониан в таких ситуациях не ограничен снизу. Поэтому затруднением, связанным с высшими размерностями, вполне может быть не вопрос устойчивости атомов как таковых, а вопрос устойчивости Вселенной, который иногда упоминается как проблема «неустойчивости Остроградского» [18]. Однако если представить, что во Вселенной существует лишь один атом, то и тогда применимо утверждение Эренфеста об уникальности трехмерия. Представленный контрпример опровергает его независимо от того, является ли неустойчивость Остроградского серьезной проблемой или нет.

Могут ли подобные аргументы быть перенесены на квантовое рассмотрение так, чтобы изменить вывод Гуревича и Мостепаненко? Данный вопрос кратко обсуждается в разделе 4.

Фундаментальные законы физики имеют форму, допускающую простую трансляцию на пространства большей или меньшей размерности. Единственное исключение – теория струн, чье согласованное квантовое описание требует десятимерного пространства-времени и заставляет подыскивать соответствующие компактифицируемые многообразия. Поэтому пересмотр анализа Эренфеста может быть важен для физики высоких энергий, где на равных рассматриваются струнные модели, объясняющие $D = 3$ [19] и модели с дополнительными измерениями [20, 21].

1. Гамильтонова постановка задачи

Используем лагранжиан (7) для построения соответствующей гамильтоновой системы на 20-мерном фазовом пространстве $\bar{q} = (q_1, \dots, q_5, Q_1, \dots, Q_5)$, $\bar{p} = (p_1, \dots, p_5, P_1, \dots, P_5)$ с помощью теоремы Остроградского. Здесь координаты в фазовом пространстве $\mathbf{q}, \mathbf{Q}, \mathbf{p}, \mathbf{P}$ – 5-векторы, определяемые как

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{x}, & \mathbf{Q} &= \dot{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{p} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{\mathbf{x}}} \right) = m\dot{\mathbf{x}} + 2\ddot{\mathbf{x}} \cdot f'(\ddot{\mathbf{x}}^2) + 4\ddot{\mathbf{x}}(\ddot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}})f''(\ddot{\mathbf{x}}^2), \\ \mathbf{P} &= \frac{\partial L}{\partial \ddot{\mathbf{x}}} = -2\ddot{\mathbf{x}} \cdot f'(\ddot{\mathbf{x}}^2), \end{aligned} \quad (8)$$

где штрихи означают дифференцирование по соответствующим аргументам. Гамильтониан $H = \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p} + \ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P} - L$ выражается как

$$H = -\frac{m}{2} \mathbf{Q}^2 - \tilde{f}(\mathbf{P}^2) + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{p} + U(\mathbf{q}^2), \quad (9)$$

$$\tilde{f}(\mathbf{P}^2) = -f(\ddot{\mathbf{x}}^2) + 4\ddot{\mathbf{x}}^2 f'(\ddot{\mathbf{x}}^2), \quad (10)$$

а $\ddot{\mathbf{x}}^2$ в (10) полагается выраженным через \mathbf{P}^2 . Например, если $f = \varepsilon \ddot{\mathbf{x}}^2$, тогда $\tilde{f}(\mathbf{P}^2) = \mathbf{P}^2/4\varepsilon$.

В п. 3.3 мы используем \tilde{f} , связанные с f вида (6) с параметром $q \in (0, 1/2) \cup (1, \infty)$.

Фазовое пространство наделено каноническими скобками Пуассона

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{Q}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{P}}. \quad (11)$$

Гамильтоновы уравнения имеют вид

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}}. \quad (12)$$

2. Гамильтонова редукция

2.1. Законы сохранения, связанные с $SO(5)$ -инвариантностью

Гамильтониан (9) принадлежит классу гамильтонианов вида

$$H(\mathbf{P}^2, \mathbf{q}^2, \mathbf{Q}^2, \mathbf{p} \cdot \mathbf{Q}), \quad (13)$$

инвариантных относительно симплектического действия группы $SO(5)$, одновременно поворачивающего 5-векторы $\mathbf{q}, \mathbf{Q}, \mathbf{p}, \mathbf{P}$:

$$\mathbb{R}_{20} \rightarrow \mathbb{R}_{20}, \quad (\mathbf{p}, \mathbf{P}, \mathbf{q}, \mathbf{Q}) \mapsto (g\mathbf{p}, g\mathbf{P}, g\mathbf{q}, g\mathbf{Q}), \quad g \in SO(5). \quad (14)$$

Для нахождения законов сохранения, связанных с такой симметрией, определим отображение момента $\mu: \mathbb{R}_{20} \rightarrow \mathfrak{so}^*(5)$, $(\mathbf{p}, \mathbf{P}, \mathbf{q}, \mathbf{Q}) \mapsto \Lambda$, где Λ – антисимметрическая матрица 5×5 . Заметим, что $\mathfrak{so}^*(5) \simeq \mathfrak{so}(5)$. Некоторые важные примеры отображения момента описаны в [22]. Действие (14) определяет гамильтонианы H_A , связанные с элементами A алгебры Ли $\mathfrak{so}(5)$:

$$H_A(\mathbf{p}, \mathbf{P}, \mathbf{q}, \mathbf{Q}) = A\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + A\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}. \quad (15)$$

Функция H_A неявно задает отображение момента:

$$H_A(\mathbf{p}, \mathbf{P}, \mathbf{q}, \mathbf{Q}) = \langle \mu(\mathbf{p}, \mathbf{P}, \mathbf{q}, \mathbf{Q}), A \rangle, \quad (16)$$

где $\langle \lambda, A \rangle$ – значение линейного функционала $\lambda \in \mathfrak{so}^*(5)$ в точке $A \in \mathfrak{so}(5)$. Эта операция может быть определена как $\text{tr}(\lambda A)$,

$$\text{tr}(\mu(\mathbf{p}, \mathbf{P}, \mathbf{q}, \mathbf{Q})A) = A\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + A\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}. \quad (17)$$

Из (17) отображение момента можно выразить в явной форме

$$\Lambda = \mu(\mathbf{p}, \mathbf{P}, \mathbf{q}, \mathbf{Q}) = \frac{1}{2}(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}^T - \mathbf{q} \otimes \mathbf{p}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}^T - \mathbf{Q} \otimes \mathbf{P}^T), \quad (18)$$

где \mathbf{p} – однострочная матрица, \mathbf{p}^T – соответствующая матрица-столбец; то же верно для 5-векторов $\mathbf{P}, \mathbf{q}, \mathbf{Q}$.

Из вида отображения момента (18) ясно, что частица движется в 4-мерной плоскости, определяемой регулярным элементом Λ . Действительно, пусть регулярный элемент коалгебры $\mathfrak{so}^*(5)$ записан в каноническом виде:

$$\Lambda^{\text{reg}} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} \neq 0. \quad (19)$$

То есть существует система координат, в которой регулярный элемент принимает вид (19). В этой системе координат можно записать отображение момента

$$\Lambda_{ij}^{\text{reg}} = \frac{1}{2}(p_i q_j - p_j q_i + P_i Q_j - P_j Q_i), \quad i, j = 1, \dots, 5. \quad (20)$$

Выражение (20) представляет собой искомые законы сохранения, связанные с $SO(5)$ -симметрией системы. Векторы $\mathbf{p}, \mathbf{P}, \mathbf{q}, \mathbf{Q}$ могут подчиняться уравнениям (20) только при нулевых компонентах p_5, P_5, q_5, Q_5 . Это и означает движение частицы в 4-плоскости.

Ньютоновская (нежесткая) частица под действием центральной силы в пространстве \mathbb{R}_D произвольной размерности $D \geq 2$, как известно, движется в плоскости, так как $\mathbb{R}_{2D} \rightarrow \mathfrak{so}^*(D)$ – отображение момента μ – переводит (\mathbf{p}, \mathbf{q}) в элементы $(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}^T - \mathbf{q} \otimes \mathbf{p}^T)/2$, сингулярные при $D > 3$. Регулярные же элементы $\mathfrak{so}^*(D)$ не встречаются в такой задаче вообще. Ситуация изменяется в случае жесткой частицы. Движение жесткой частицы под действием центральной силы в пятимерном пространстве в общем случае происходит в 4-плоскости, соответствующей регулярному элементу $\mathfrak{so}^*(5)$. Движения жесткой частицы в плоскости тоже возможны, но их обсуждение лежит за пределами данной работы.

2.2. Редуцированная гамильтонова система

Применяемый способ редукции опирается на следующий факт: если система дифференциальных уравнений первого порядка, определяющая динамическую систему на многообразии M ,

инвариантна относительно группы симметрии G , она редуцируется к системе дифференциальных уравнений первого порядка на фактор многообразия M/G . Если при этом G является группой гамильтоновой симметрии, тогда существует гамильтонова система на M/G , траектории которой суть проекции траекторий исходной системы. Обсуждение концептуальных и технических аспектов гамильтоновой редукции можно найти, например, в работах [17, 22–23].

Как обсуждалось выше, $SO(5)$ действует как группа гамильтоновой симметрии, так как существуют гамильтонианы H_A , связанные с элементами алгебры $\mathfrak{so}(5)$. Действие $SO(5)$ в области $F = \{(\mathbf{p}, \mathbf{P}, \mathbf{q}, \mathbf{Q}) : \mathbf{p}, \mathbf{P}, \mathbf{q}, \mathbf{Q} \text{ – линейно независимые 5-векторы}\}$ регулярно. Глобальные инварианты $SO(5)$, действующей на векторы $\mathbf{p}, \mathbf{P}, \mathbf{q}, \mathbf{Q}$, – скалярные произведения

$$\begin{aligned} x &= \mathbf{p}^2, & y &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, & z &= \mathbf{q}^2, \\ X &= \mathbf{P}^2, & Y &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}, & Z &= \mathbf{Q}^2, & N &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{P}, \\ K &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{Q}, & L &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{P}, & M &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (21)$$

Эти переменные служат координатами на пространстве $F/SO(5)$. Они покрывают область в \mathbb{R}_{10} , которая будет описана ниже.

Симплектическая структура на $F/SO(5)$ вычисляется посредством скобок Пуассона на $F \subset \mathbb{R}_{20}$ (11), простым применением их к переменным (21). Структурная матрица $J^{ij} = \{\kappa^i, \kappa^j\}_{F/SO(5)}$, $\vec{\kappa} = (x, y, z, X, Y, Z, K, L, M, N)$, определяющая скобки Пуассона на $F/SO(5)$, имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -2x & -4y & 0 & 0 & 0 & -2M & 0 & 0 & -2L \\ 2x & 0 & -2z & 0 & 0 & 0 & -K & L & M & -N \\ 4y & 2z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N & 2K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2X & -4Y & -2N & 0 & -2L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2X & 0 & -2Z & -K & L & -M & N \\ 0 & 0 & 0 & 4Y & 2Z & 0 & 0 & 2M & 0 & 2K \\ 2M & K & 0 & 2N & K & 0 & 0 & Y+y & Z & z \\ 0 & -L & -2N & 0 & -L & -2M & -Y-y & 0 & -x & -X \\ 0 & -M & -2K & 2L & M & 0 & -Z & x & 0 & y-Y \\ 2L & N & 0 & 0 & -N & -2K & -z & X & -y+Y & 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Выраженный в терминах координат (21) гамильтониан (9) принимает вид

$$H = -\frac{mZ}{2} - \tilde{f}(X) + M + U(z). \quad (23)$$

Мы пришли к редуцированной системе, являющейся пуассоновой динамической системой со структурой Ли – Пуассона J и гамильтонианом H . С учетом структурной матрицы J^{ij} (22) уравнения Гамильтона $\dot{\kappa}^i = \{H, \kappa^i\}_{F/SO(5)}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -4yU'(z), & \dot{Z} &= -4Y\tilde{f}'(X), \\
 \dot{y} &= -2zU'(z) + M, & \dot{K} &= -2N\tilde{f}'(X) + Z, \\
 \dot{z} &= 2K, & \dot{L} &= -2NU'(z) + mM - x, \\
 \dot{X} &= 2mY - 2L, & \dot{M} &= -2KU'(z) - 2L\tilde{f}'(X), \\
 \dot{Y} &= -2X\tilde{f}'(X) + mZ - M, & \dot{N} &= mK - y + Y.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Ранг алгебры $\mathfrak{so}(5) - 2$, поэтому симплектическая структура на $F/\text{SO}(5)$ имеет две независимых функции Казимира $C_1 = \text{tr}(\Lambda^2)$, $C_2 = \text{tr}(\Lambda^4)$. Вместо C_2 удобнее использовать $P_2 = C_2 - C_1^2/2$. Из (18) можно установить

$$C_1 = 2\left((\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 - \mathbf{p}^2 \mathbf{q}^2 + (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})^2 - \mathbf{P}^2 \mathbf{Q}^2 + 2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{Q})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{P}) - 2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{P})(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{q})\right), \tag{25}$$

$$P_2 = -4 \det \begin{pmatrix} \mathbf{p}^2 & \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} & \mathbf{p} \cdot \mathbf{P} & \mathbf{p} \cdot \mathbf{Q} \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} & \mathbf{q}^2 & \mathbf{q} \cdot \mathbf{P} & \mathbf{q} \cdot \mathbf{Q} \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{P} & \mathbf{q} \cdot \mathbf{P} & \mathbf{P}^2 & \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{Q} & \mathbf{q} \cdot \mathbf{Q} & \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} & \mathbf{Q}^2 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

или, в терминах (21),

$$C_1 = 2(y^2 - xz + Y^2 - XZ + 2MN - 2KL), \tag{27}$$

$$P_2 = -4 \det \begin{pmatrix} x & y & L & M \\ y & z & N & K \\ L & N & X & Y \\ M & K & Y & Z \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Многообразие $F/\text{SO}(5)$ можно рассматривать как область \mathbb{R}_{10} ; с учетом того, что значения C_1 и P_2 отрицательны для регулярных элементов $\mathfrak{so}(5)$ (канонический вид Λ^{reg} дает $C_1 = -2\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2$, $P_2 = -4\lambda_1^2\lambda_2^2$), получаем

$$F/\text{SO}(5) = \{\bar{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}_{10} : x > 0, z > 0, X > 0, Z > 0, C_1(\bar{\mathbf{k}}) < 0, P_2(\bar{\mathbf{k}}) < 0\}. \tag{29}$$

Процедура редукции гамильтоновой системы, соответствующей стандартной задаче центральных сил с ньютоновой частицей в трехмерном пространстве, обсуждается в [23].

Решения уравнений Гамильтона (24) представляют собой проекции на пространство соответствующих решений исходной системы (12). Так как $\text{SO}(5)$ – неразрешимая группа, решения редуцированной системы уравнений Гамильтона невозможно использовать для интегрирования в квадратурах исходной задачи, однако устойчивость решений в ней может быть проанализирована с помощью их проекций.

3. Компактные движения. Устойчивость

3.1. Двухпараметрические статические решения

Нас интересуют простейшие решения системы уравнений (24) – статические решения, т. е. положения равновесия редуцированной гамильтоновой системы. Решения редуцированной системы уравнений (24) – статические, если они являются решениями системы уравнений, получающейся из (24) заменой $U'(z)$ и $\tilde{f}'(X)$ постоянными U'_{st} и \tilde{f}'_{st} :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -4yU'_{st}, & \dot{Z} &= -4Y\tilde{f}'_{st}, \\ \dot{y} &= -2zU'_{st} + M, & \dot{K} &= -2N\tilde{f}'_{st} + Z, \\ \dot{z} &= 2K, & \dot{L} &= -2NU'_{st} + mM - x, \\ \dot{X} &= 2mY - 2L, & \dot{M} &= -2KU'_{st} - 2L\tilde{f}'_{st}, \\ \dot{Y} &= -2X\tilde{f}'_{st} + mZ - M, & \dot{N} &= mK - y + Y, \end{aligned} \quad (30)$$

и при этом представляют собой точки в редуцированном фазовом пространстве. Характеристическое уравнение для системы однородных уравнений (30):

$$\lambda^2 \left(\lambda^4 + 8m\tilde{f}'_{st}\lambda^2 + 64U'_{st}\tilde{f}'_{st} \right) \left(\lambda^4 + 4m\tilde{f}'_{st}\lambda^2 - 16U'_{st}\tilde{f}'_{st} + 4m^2\tilde{f}'_{st}{}^2 \right) = 0. \quad (31)$$

Двойному корню $\lambda = 0$ соответствуют два собственных вектора

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_1 &= \left(2m^2\tilde{f}'_{st} - 2U'_{st}, 0, m\tilde{f}'_{st}/U'_{st}, 0, 0, 2\tilde{f}'_{st}, 0, 0, 2m\tilde{f}'_{st}, 1 \right), \\ \bar{\kappa}_2 &= \left(-2m\tilde{f}'_{st}, 0, -\tilde{f}'_{st}/U'_{st}, 1, 0, 0, 0, 0, -2\tilde{f}'_{st}, 0 \right), \end{aligned} \quad (32)$$

поэтому статическое решение системы уравнений (30)

$$\bar{\kappa}_{st}(t) = a\bar{\kappa}_1 + b\bar{\kappa}_2. \quad (33)$$

Чтобы найти статическое решение уравнений Гамильтона (24), соответствующее (33), подставляем $\tilde{f}'_{st} \Rightarrow \tilde{f}'(X_0)$, $U'_{st} \Rightarrow U'(z_0)$, где $X_0 = b$, а z_0 определяется из уравнения

$$z_0 = \frac{\tilde{f}'(X_0)}{U'(z_0)}(ma - b). \quad (34)$$

Искомое статическое решение $\bar{\kappa}(t) = \bar{\kappa}_0$ зависит от параметров a и b :

$$\begin{aligned} x_0 &= 2m\tilde{f}'(X_0)(ma - b) - 2aU'(z_0), & Z_0 &= 2a\tilde{f}'(X_0), \\ y_0 &= 0, & K_0 &= 0, \\ z_0 &= \bar{z}_0, & L_0 &= 0, \\ X_0 &= b, & M_0 &= 2\tilde{f}'(X_0)(ma - b), \\ Y_0 &= 0, & N_0 &= a, \end{aligned} \quad (35)$$

где \bar{z}_0 – решения уравнения (34). Представляют интерес решения, лежащие в пространстве $F/SO(5)$. Решение (35) таково, если

$$x_0 > 0, z_0 > 0, X_0 > 0, Z_0 > 0, C_1(\bar{\kappa}_0) < 0, P_2(\bar{\kappa}_0) < 0. \quad (36)$$

Для проверки этого условия предположим, что

$$\tilde{f}'(X_0) > 0, \quad (37)$$

(позже будет показано, что это условие вместе с неравенством $f'(X_0) > 0$ выполняется для гамильтонианов, естественных для задачи), и что $U(z)$ – отрицательная показательная функция,

$$U(z) = -\beta z^{-p}, p > 0, \beta > 0. \quad (38)$$

С физической точки зрения $U(z)$ такого вида описывает сферически-симметричный притягивающий потенциал, исчезающий на бесконечности. С учетом (37) и (38) решение уравнения (34), $X_0 = b$:

$$z_0 = \left(\frac{\beta q}{\Delta \tilde{f}'(b)} \right)^{1/p}, \quad (39)$$

где $\Delta = ma - b$, $\Delta > 0$. Оно позволяет найти x_0 , $C_1(\bar{\kappa}_0)$ и $P_2(\bar{\kappa}_0)$:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2\tilde{f}'(b)\Delta(m - a/z_0), \\ C_1(\bar{\kappa}_0) &= -4\tilde{f}'(b)\Delta(m - a/z_0)z_0 - 4ba\tilde{f}'(b) + 8\tilde{f}'(b)\Delta a, \\ P_2(\bar{\kappa}_0) &= -\Delta(z_0b - a^2)^2(4\tilde{f}'(b))^2/z_0. \end{aligned} \quad (40)$$

Пусть β , p , m , b – произвольные положительные параметры, a – произвольный положительный параметр, отвечающий за изменение z_0 . Тогда из (39) и (40) следует, что условие (36) выполняется для всех z_0 , больших некоторого z_{\min} , $z_0 \neq a^2/b$, зависящего от параметров.

Каждая пара отрицательных значений C_1 и P_2 определяет 8-мерное подпространство $F/\text{SO}(5)$. Такие подпространства называются симплектическими листами пуассонова многообразия. Редуцированная система, описываемая уравнениями (24), эволюционирует вдоль симплектического листа. Заметим, что для любого решения вида $\bar{\kappa}_0$ в его окрестности существует набор решений $\{\bar{\kappa}_0'\}$, каждое решение $\bar{\kappa}_0'$ из которого находится во взаимно однозначном соответствии с парой C_1' , P_2' , близкой к $C_1(\bar{\kappa}_0)$, $P_2(\bar{\kappa}_0)$.

Нам уже известно, что рассматриваемая частица движется в 4-плоскости. При этом понятно, что траектории частицы лежат на 3-сфере радиуса $\sqrt{z_0}$, если для статического решения выполняется условие (36). Решения редуцированной системы неприменимы для интегрирования исходной задачи. Однако явный вид движений по 3-сферам может быть легко найден. Запишем уравнения Эйлера – Лагранжа для лагранжиана (7):

$$\ddot{\mathbf{x}} + \frac{m}{2f'(\dot{\mathbf{x}}^2)} \ddot{\mathbf{x}} + \frac{U'(\mathbf{x}^2)}{f'(\dot{\mathbf{x}}^2)} \mathbf{x} = 0. \quad (41)$$

Заменяя $U'(\mathbf{x}^2)$ и $f'(\dot{\mathbf{x}}^2)$ на постоянные U'_{st} и f'_{st} , находим наиболее простой пример движений $\mathbf{x}(t)$ по 3-сфере в 4-плоскости $x_5 = 0$:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= R_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1), & x_3(t) &= R_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2), \\
 x_2(t) &= R_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1), & x_4(t) &= R_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \\
 \omega_1 &= \sqrt{m \left(1 - \sqrt{1 - 16 f'_{st} U'_{st} / m^2} \right) / (4 f'_{st})}, & \omega_2 &= \sqrt{m \left(1 + \sqrt{1 - 16 f'_{st} U'_{st} / m^2} \right) / (4 f'_{st})},
 \end{aligned} \tag{42}$$

где ϕ_1, ϕ_2 – произвольные фазы и выполняется

$$0 < 1 - 16 f'_{st} U'_{st} / m^2 < 1. \tag{43}$$

Решение (42) описывает движение, которое можно мыслить себе как обращение частицы вокруг притягивающего центра по кругу радиуса R_1 , испытывающей при этом zitterbewegung с амплитудой R_2 . При этом R_1, R_2 определяются уравнениями $U'_{st} = U'(R_1^2 + R_2^2)$ и $f'_{st} = f'(\omega_1^2 R_1^2 + \omega_2^2 R_2^2)$ и должно выполняться дополнительное условие (43). Учитывая, что для рассматриваемых лагранжианов $f'(X_0) > 0$, а потенциал имеет вид (38), можно заключить, что условие (43) выполняется для достаточно больших $z_0 = R_1^2 + R_2^2$. Остальные движения по 3-сферам можно получить из приведенного посредством поворотов элементами $SO(5)$.

Жесткая динамика демонстрирует класс движений по 3-сферам, отображающихся в положения равновесия редуцированной динамической системы. В ньютоновой механике существует похожая ситуация. Когда ньютонова частица обращается вокруг центра масс по кругу, ее движение представляется точкой в редуцированном фазовом пространстве $F/SO(3)$, которая определяется постоянными $\mathbf{p}^2, \mathbf{q}^2$ и нулевым скалярным произведением $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$.

3.2. Нейтральная и нелинейная устойчивость

Предположим, что положение равновесия $\bar{\mathbf{q}}_0$ редуцированной системы устойчиво по Ляпунову. Тогда, так как 4-плоскость, в которой движется частица, фиксирована, из выражений (21) следует, что при возмущении движения по 3-сфере возмущенное движение навсегда останется близким к этой же 3-сфере. Точнее, возмущенное решение исходной системы ограничено в области фазового пространства $\{\mathbf{p}, \mathbf{P}, \mathbf{q}, \mathbf{Q}\}$, представляющей собой соответствующую возмущению окрестность прямого произведения 3-сфер с радиусами $|\mathbf{p}_0| = \sqrt{x_0}, |\mathbf{P}_0| = \sqrt{X_0}, |\mathbf{q}_0| = \sqrt{z_0}$, и $|\mathbf{Q}_0| = \sqrt{Z_0}$. То есть устойчивость положений равновесия редуцированной задачи обеспечивает физическую устойчивость.

Из-за отсутствия диссипации в гамильтоновых системах при анализе устойчивости линеаризованной системы уравнений движения имеется две возможности. Первая состоит в том, что положение равновесия линеаризованной системы неустойчиво, тогда оно же неустойчиво и в исходной нелинейной системе. Вторая возможность заключается в нейтральной устойчивости положения равновесия. Под нейтральной устойчивостью понимается ситуация, когда характеристическое уравнение имеет мнимые корни и, возможно, нулевые корни, связанные с простыми элементарными делителями³. Нейтральная устойчивость может нарушаться нелинейными членами в уравнениях движения. Поэтому линейное приближение неприменимо для строгого анализа нелинейной

³ Наличие n нулевых корней, связанных с простыми элементарными делителями, соответствует ситуации, когда n степеней свободы линейной системы «заморожены».

устойчивости гамильтоновых систем. Однако именно нейтрально устойчивые положения равновесия для гамильтоновых систем являются кандидатами на нелинейную устойчивость.

Сформулируем критерий нейтральной устойчивости статических решений \vec{k}_0 . Уравнение движения вектора возмущения $\delta\vec{k} = \vec{k} - \vec{k}_0$ вытекает из (24):

$$\delta\dot{\vec{k}} = A\delta\vec{k} + \vec{X}^*, \quad (44)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2(u_1 + z_0u_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2(\varphi_1 + X_0\varphi_2) & 0 & m & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2N_0\varphi_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4\varphi_1 \\ -1 & 0 & -2N_0u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m & -2u_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2u_1 & -2\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

где $A\delta\vec{k}$ – линейная часть системы, \vec{X}^* – остаточные члены высших порядков по $|\delta\vec{k}|$, $u_1 = U'(z_0)$, $u_2 = U''(z_0)$, $\varphi_1 = \tilde{f}'(X_0)$, $\varphi_2 = \tilde{f}''(X_0)$. Соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^2(\lambda^8 + a_1\lambda^6 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^2 + a_4) = 0, \quad (46)$$

где a_j , $j = 1, \dots, 4$ – некоторые алгебраические функции от u_1 , u_2 , φ_1 , φ_2 , X_0 , z_0 , N_0 и m . Устойчивость решения $\delta\vec{k}(t)$ линеаризованной системы $\delta\dot{\vec{k}} = A\delta\vec{k}$ нейтральна, когда уравнение (46), помимо пары нулевых корней, имеет четыре пары комплексно сопряженных чисто мнимых корней. Наличие двух нулевых корней обязано наличию двух дополнительных законов сохранения $C_1 = \text{const}$, $P_2 = \text{const}$ в нелинейной системе (44), из чего следует, что как линеаризованная, так и нелинейная системы эволюционируют в 8-мерном подпространстве фазового пространства.

В связи с наличием множества положений равновесия $\{\vec{k}'_0\}$ вблизи заданного \vec{k}_0 вектор возмущения всегда представляется в виде $\delta\vec{k} = \delta\vec{k}_\perp + \delta\vec{k}_\parallel$, где $\delta\vec{k}_\perp$ обозначает $\vec{k}'_0 - \vec{k}_0$, а $\delta\vec{k}_\parallel$ – компонента вектора возмущения, направленная вдоль симплектического листа. Отсюда следует, что подходящие пары мнимых корней уравнения (46) должны быть отличны друг от друга. Действительно, пусть положение равновесия \vec{k}_0 соответствует двойному мнимому корню, тогда во множестве $\{\vec{k}'_0\}$ найдется линейно неустойчивое положение равновесия и, следовательно, вектор возмущения, смещающий \vec{k}_0 в это неустойчивое положение. Таким образом, наличие подходящих четырех пар мнимых корней достигается, когда уравнение

$$\sigma^4 + a_1\sigma^3 + a_2\sigma^2 + a_3\sigma + a_4 = 0 \quad (47)$$

имеет четыре различных вещественных отрицательных корня. Решения $\vec{\kappa}_0$, удовлетворяющие этому критерию, могут быть нелинейно устойчивы.

3.3. Двигается ли жесткая частица устойчиво под действием притягивающей электростатической силы

Так как zitterbewegung свободной частицы с зависящим от ускорения лагранжианом (7) устойчив относительно малых возмущений в случае $f(\alpha) \sim \varepsilon(\alpha)^{q/2}$, $\varepsilon > 0$, $q \in (0, 1/2) \cup (1, \infty)$, ограничим рассмотрение данным классом функций. Из (10) получим:

$$\tilde{f}(\mathbf{P}^2) = \frac{\varepsilon(q-1)(\mathbf{P}^2)^{\frac{q}{2(q-1)}}}{|\varepsilon q|^{\frac{q}{q-1}}}. \quad (48)$$

Можно выразить \tilde{f} посредством координат в редуцированном фазовом пространстве:

$$\tilde{f}(X) = \frac{\varepsilon(q-1)(X)^{\frac{q}{2(q-1)}}}{|\varepsilon q|^{\frac{q}{q-1}}}, \quad \tilde{f}'(X) = \frac{\varepsilon q}{2} \frac{(X)^{\frac{2-q}{2(q-1)}}}{|\varepsilon q|^{\frac{q}{q-1}}}. \quad (49)$$

Из второго выражения (49) ясно, что для обсуждаемых \tilde{f} выполняется условие (37). Также выполняется $f'(X_0) > 0$, что обеспечивает существование прообразов для положений равновесия.

Нас интересует притягивающий потенциал $1/r^3$. Будем рассматривать $f(X)$ наиболее простой формы, которая достигается в случае $q = 2$, тогда гамильтониан (23) принимает вид

$$H = -\frac{mZ}{2} - \frac{X}{4\varepsilon} + M - \frac{\beta}{z^{3/2}}. \quad (50)$$

Считаем, что невозмущенное движение осуществляется по единичным 3-сферам, $z_0 = 1$. Это позволяет относительно удобно параметризовать положения равновесия. Обозначим $\gamma = 1/(4\varepsilon)$ и будем считать, что параметры k_1 и k_2 принадлежат интервалу $(0, 1)$. Тогда β и свободные параметры a , b , фигурирующие в выражении (35) для $\vec{\kappa}_0$, выражаются через k_1 и k_2 :

$$\beta = 2m^2 k_1 k_2 \gamma / 3, \quad a = k_1 m, \quad b = m^2 k_1 (1 - k_1), \quad (51)$$

что приводит к

$$H = -\frac{mZ}{2} - \gamma X + M - \frac{2}{3} \frac{m^2 k_1 k_2 \gamma}{z^{3/2}}. \quad (52)$$

Положения равновесия $\vec{\kappa}_0^{\text{unit}}$ и казимирь $C_1(\vec{\kappa}_0^{\text{unit}})$, $P_2(\vec{\kappa}_0^{\text{unit}})$ принимают вид:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 2m^3\gamma k_1 k_2 (1 - k_1), & Z_0 &= 2k_1 m\gamma, \\
 y_0 &= 0, & K_0 &= 0, \\
 z_0 &= 1, & L_0 &= 0, \\
 X_0 &= m^2 k_1 (1 - k_2), & M_0 &= 2m^2 \gamma k_1 k_2, \\
 Y_0 &= 0, & N_0 &= k_1 m,
 \end{aligned} \tag{53}$$

$$C_1(\bar{\kappa}_0^{\text{unit}}) = -4m^3 k_1 (k_1 + k_2 - 4k_1 k_2), \quad P_2(\bar{\kappa}_0^{\text{unit}}) = -16m^6 \gamma^2 k_1^3 k_2 (k_1 + k_2 - 1)^2. \tag{54}$$

Условие (43), отвечающее за существование прообразов положений равновесия $\bar{\kappa}_0^{\text{unit}}$,

$$4k_1 k_2 < 1. \tag{55}$$

Очевидно, что при $4k_1 k_2 < 1$, $k_1 + k_2 \neq 1$ условия (36) выполняются. Параметры u_1 , u_2 , φ_1 , φ_2 в матрице A (45) имеют вид $u_1 = m^2 k_1 k_2 \gamma$, $u_2 = -5m^2 k_1 k_2 \gamma / 2$, $\varphi_1 = \gamma$, $\varphi_2 = 0$, а коэффициенты характеристического уравнения (46)

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 12m\gamma, & a_3 &= 8(m\gamma)^3 (50k_1^2 k_2 - 9k_1 k_2 + 4), \\
 a_2 &= 4(m\gamma)^2 (7k_1 k_2 + 9), & a_4 &= 64(m\gamma)^4 k_1 k_2 (14k_1 k_2 + 5k_1 - 1).
 \end{aligned} \tag{56}$$

Нейтральная устойчивость положений равновесия $\bar{\kappa}_0^{\text{unit}}$ достигается, когда уравнение

$$\tilde{\sigma}^4 + 12\tilde{\sigma}^3 + 4(7k_1 k_2 + 9)\tilde{\sigma}^2 + 8(50k_1^2 k_2 - 9k_1 k_2 + 4)\tilde{\sigma} + 64k_1 k_2 (14k_1 k_2 + 5k_1 - 1) = 0 \tag{57}$$

имеет четыре разных отрицательных вещественных корня.

Условия $4k_1 k_2 < 1$ и $k_1 + k_2 \neq 1$ одновременно с построенным критерием нейтральной устойчивости $\bar{\kappa}_0^{\text{unit}}$ выполняются в широком диапазоне параметров k_1 , k_2 . Обозначим соответствующее множество пар (k_1, k_2) как \mathbf{N} , $\mathbf{N} \subset (0,1) \times (0,1)$. Для уравнений $\delta \ddot{\bar{\kappa}}_{\text{nl}} = A \delta \bar{\kappa}_{\text{nl}} + \bar{X}^*$ и $\delta \ddot{\bar{\kappa}}_{\text{lin}} = A \delta \bar{\kappa}_{\text{lin}}$ был проведен численный анализ решений с одинаковыми начальными условиями при различных m , γ и k_1 , k_2 из диапазона \mathbf{N} с использованием программы MATHEMATICA. Характерные результаты вычислений представлены на рис. 2 (см. также цв. вкл.), где показана эволюция абсолютной величины и z -компоненты векторов возмущений $\delta \bar{\kappa}_{\text{nl}}$ и $\delta \bar{\kappa}_{\text{lin}}$ около положения равновесия $\bar{\kappa}_0^{\text{unit}}$ при $k_1 = 0,4$, $k_2 = 0,1$, $m = 2$, $\gamma = 1$ с начальным вектором возмущения $\delta \bar{\kappa}(0) = 5 \cdot 10^{-3} (1, \dots, 1)$. Рис. 2 демонстрирует, что формы и значения осциллирующей величины $|\delta \bar{\kappa}_{\text{nl}}|$ и $|\delta \bar{\kappa}_{\text{lin}}|$ имеют сходный вид на протяжении длительного промежутка времени, составляющего порядка 10^5 характерных периодов $(m\gamma)^{-1/2}$. Величина и форма квазипериодических траекторий z -компонент $\delta \bar{\kappa}_{\text{nl}}$ и $\delta \bar{\kappa}_{\text{lin}}$ также схожи в рассматриваемый период, что свидетельствует об удержании траектории частицы вблизи единичной 3-сферы. Рис. 3 иллюстрирует сохранение расчетных величин $H(\delta \bar{\kappa}_{\text{nl}}(t) + \bar{\kappa}_0^{\text{unit}})$, $C_1(\delta \bar{\kappa}_{\text{nl}}(t) + \bar{\kappa}_0^{\text{unit}})$ и $P_2(\delta \bar{\kappa}_{\text{nl}}(t) + \bar{\kappa}_0^{\text{unit}})$ с большой точностью. Поведение решений $\delta \bar{\kappa}_{\text{nl}}(t)$ нелинейного уравнения на возмущение относительно положений равновесия $\bar{\kappa}_0^{\text{unit}}$

с разными $(k_1, k_2) \in \mathbb{N}$ при моделировании с различными начальными данными $\delta\vec{k}(0)$ оказывается идентичным поведению соответствующих решений $\delta\vec{k}_{\text{lin}}(t)$ в большом массиве вычислений. Это служит серьезным аргументом в пользу нелинейной устойчивости нейтрально устойчивых положений равновесия рассматриваемой системы, что свою очередь означает существование устойчивых компактных движений нерелятивистской частицы с лагранжианом, зависящим от ускорения, в притягивающем потенциале $1/r^3$ в пятимерном пространстве.

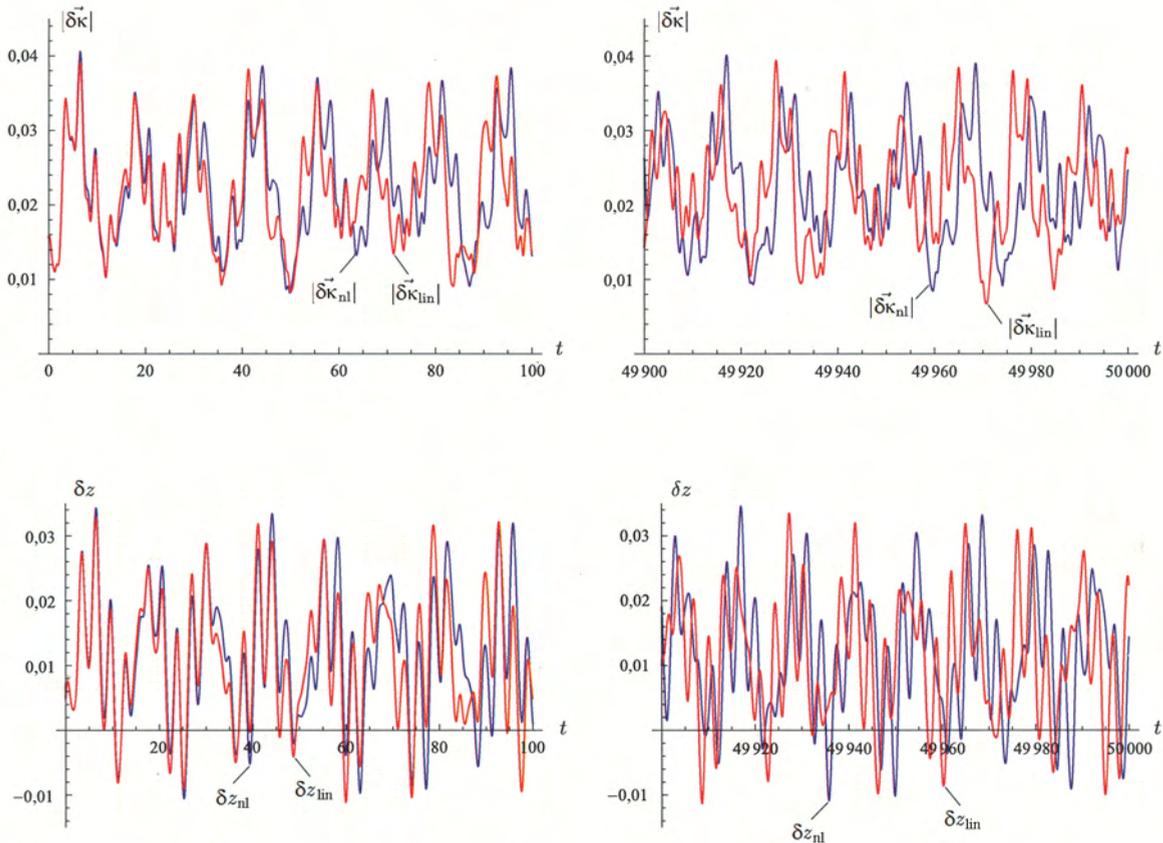


Рис. 2. Расчет нелинейного и линейного вариантов эволюции вектора $\delta\vec{k}$ около положения равновесия \vec{k}_0^{unit} с параметрами $k_1 = 0,4$; $k_2 = 0,1$; $m = 2$; $\gamma = 1$; $\delta\vec{k}(0) = 5 \cdot 10^{-3}(1, \dots, 1)$. Вверху – абсолютные величины $\delta\vec{k}_{\text{nl}}$ и $\delta\vec{k}_{\text{lin}}$ в начале и в конце расчета; форма и значение осцилляций $|\delta\vec{k}_{\text{nl}}|$ и $|\delta\vec{k}_{\text{lin}}|$ имеют сходный вид на протяжении большого временного отрезка, значит, нелинейные члены не нарушают устойчивости. Внизу – сходное поведение z -компонент векторов $\delta\vec{k}_{\text{nl}}$ и $\delta\vec{k}_{\text{lin}}$ свидетельствует об удержании траектории частицы вблизи единичной 3-сферы

Представленный подход к анализу устойчивости сложных динамических систем, заключающийся в демонстрации устойчивого поведения численного решения уравнений на возмущение, распространен в современных исследованиях (см., например, [24]). Однако, по возможности, желательно иметь аналитическое доказательство.

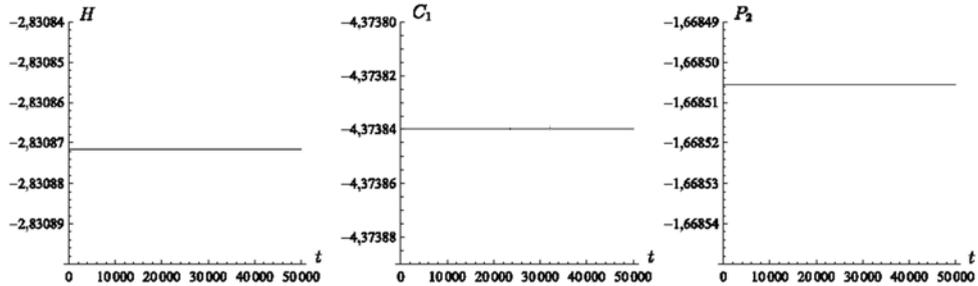


Рис. 3. Сохранение расчетных значений $H(\delta\bar{k}_{nl}(t) + \bar{k}_0^{unit})$, $C_1(\delta\bar{k}_{nl}(t) + \bar{k}_0^{unit})$ и $P_2(\delta\bar{k}_{nl}(t) + \bar{k}_0^{unit})$ во времени с высокой точностью

Энергетический метод (см., например, [25]) обладает наибольшим потенциалом проверки нелинейной устойчивости. Для его применения нужно найти функцию Ляпунова для уравнений на возмущение, которая представляет собой комбинацию гамильтониана и казимиров пуассоновой структуры. Для составления пробной квадратичной комбинации $V(\delta\bar{k})$ в районе положения равновесия \bar{k}_0^{unit} используем подход Четаева (см. [26]), в соответствии с которым получаем

$$\begin{aligned}
 V(\delta\bar{k}) = & \tilde{c} \left[H(\delta\bar{k} + \bar{k}_0^{unit}) - H(\bar{k}_0^{unit}) \right] + \left[H(\delta\bar{k} + \bar{k}_0^{unit}) - H(\bar{k}_0^{unit}) \right]^2 + \\
 & + (\tilde{c}/(4m(k_2 - k_1))) \left[C_1(\delta\bar{k} + \bar{k}_0^{unit}) - C_1(\bar{k}_0^{unit}) \right] + \left[C_1(\delta\bar{k} + \bar{k}_0^{unit}) - C_1(\bar{k}_0^{unit}) \right]^2 + \\
 & + (\tilde{c}/(16m^4\gamma k_1^2(k_2 - k_1)(k_2 + k_1 - 1))) \left[P_2(\delta\bar{k} + \bar{k}_0^{unit}) - P_2(\bar{k}_0^{unit}) \right] + \left[P_2(\delta\bar{k} + \bar{k}_0^{unit}) - P_2(\bar{k}_0^{unit}) \right]^2,
 \end{aligned} \tag{58}$$

где \tilde{c} – произвольный вещественный параметр. Постоянство знака такой квадратичной функции устанавливается критерием Сильвестра. Можно показать, что не существует набора вещественных параметров \tilde{c} , k_1 , k_2 , m и γ ($k_1, k_2 \in (0,1)$, $m > 0$, $\gamma > 0$), для которого выполняется критерий Сильвестра для гессиана функции V . Это означает, что в таком варианте энергетический метод не подходит для доказательства устойчивости в задаче⁴.

⁴ При этом, возможно, что более сложные его варианты могут дать положительный результат.

4. Обсуждение и перспективы

Как формулируется задача Эренфеста в квантовой механике? Напомним формулировку задачи, предложенную Гуревичем и Мостепаненко. Они искали решение D -мерного стационарного уравнения Шредингера

$$H\Psi = E\Psi, \quad (59)$$

где Ψ – волновая функция, $\langle \mathbf{x} | \Psi \rangle = \Psi(\mathbf{x})$, определенная на D -мерном конфигурационном пространстве \mathbb{R}_D , H – гамильтониан ньютоновой частицы

$$H = \mathbf{p}^2 / (2m) + U(\mathbf{x}^2). \quad (60)$$

Как обычно, импульс \mathbf{p} выражается посредством D -мерного оператора «набла», $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{x}}$. D -мерный лапласиан

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{D-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \nabla_{\Omega}^2, \quad (61)$$

где r – радиальная координата, а ∇_{Ω}^2 – лапласиан на единичной $(D-1)$ -сфере. Для решения уравнения (60) Гуревич и Мостепаненко разделили переменные:

$$\Psi(\mathbf{x}) = R(r)Y_l(\Omega). \quad (62)$$

Функции Y_l – сферические гармоники на единичной $(D-1)$ -сфере, являющиеся решениями уравнения

$$\nabla_{\Omega}^2 Y_l = -l(l+D-2)Y_l. \quad (63)$$

С помощью подстановки $\chi(r) = r^{(D-1)/2}R(r)$ радиальная часть уравнения Шредингера преобразуется к виду

$$\chi''(r) + 2m(E - u(r))\chi(r)/\hbar^2 = 0, \quad (64)$$

где u – эффективный потенциал, содержащий потенциальную энергию и центробежную часть:

$$u(r) = U(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{j(j+1)}{r^2}. \quad (65)$$

Здесь j – квантовое число, сходное с квантовым числом углового момента l ,

$$j = l + (D-3)/2. \quad (66)$$

При сравнении полученного результата с выражением (2), которое в нерелятивистском пределе $\bar{m}r \gg |\mathbf{L}|$ переходит в $\bar{m}\left(1 + \mathbf{L}^2 / (2\bar{m}^2 r^2)\right) + U(r)$, очевидно, что утверждение Эренфеста о несуществовании атомной структуры материи при $D > 3$ подтверждается и классическим, и квантовым анализом.

В дальнейшем предпринимались попытки уточнить или опровергнуть рассуждение Гуревича и Мостепаненко (см., например, [27–30]). Все подобные исследования по большей части основываются на тех же предпосылках относительно структуры уравнения Шредингера в высших размерностях и в итоге приводят к уравнениям типа (64). Однако гамильтониан (60) происходит из действия (1), которое несамосогласованно как в классической теории, так и в полуклассическом формализме. Если мы хотим, чтобы законы электромагнетизма сохранялись для любой четной пространственно-временной размерности и динамика как целое была согласована, тогда законы механики должны быть скорректированы посредством добавления слагаемых с высшими производными, что приводит к соответствующей модификации гамильтонова формализма механики.

Чтобы построить квантово-механическую версию задачи о нерелятивистской жесткой частице в потенциале в \mathbb{R}_5 , следует определить волновую функцию $\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ на 10-мерном конфигурационном пространстве и записать гамильтониан (9) в виде

$$H = -\frac{m}{2}\mathbf{Q}^2 - \tilde{f}(-\hbar^2\nabla_{\mathbf{Q}}^2) + \frac{i\hbar}{2}(\mathbf{Q}\cdot\nabla_{\mathbf{q}} + \nabla_{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{Q}) + U(\mathbf{q}^2). \quad (67)$$

В качестве примера упомянем вариант $f(\alpha) = \varepsilon\alpha$, при котором $\tilde{f}(\mathbf{P}^2) = -(\hbar^2/(4\varepsilon))\nabla_{\mathbf{Q}}^2$. Другие формы f приведут к еще более сложному виду уравнения (67) из-за наличия функциональной зависимости от оператора $\nabla_{\mathbf{Q}}^2$.

Слагаемое $i\hbar(\mathbf{Q}\cdot\nabla_{\mathbf{q}} + \nabla_{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{Q})/2$ делает гамильтониан (67) непригодным для полного разделения переменных наподобие (62). Невозможность разделения радиальной и угловых переменных в 10-мерном уравнении Шредингера качественно согласуется с тем, что компактные движения жесткой частицы при классическом рассмотрении, как оказалось, не лежат в плоскости. Можно надеяться, что содержательные решения уравнений такого типа будут получены в дальнейших исследованиях.

Благодарности

Автор глубоко благодарен Б. П. Косякову за плодотворные обсуждения в процессе работы над статьей и всестороннюю поддержку; Я. Ю. Алексееву за интересные замечания; двум анонимным рецензентам за важные комментарии и предложения.

Список литературы

1. Ehrenfest P. In what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions? // Proc. Amsterdam Acad. 1917. Vol. 20. P. 200–209.
2. Ehrenfest P. Welche Rolle spielt die Dreidimensionalitat des Raumes in den Grundesetzen der Physik? // Ann. der Phys. 1920. Vol. 61. P. 440–446.
3. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теория поля. – М.: Наука, 1988.
4. Gurevich L., Mostepanenko V. On the existence of atoms in n-dimensional space // Phys. Lett. A. 1971. Vol. 35. P. 201–202.
5. Case K. M. Singular potentials // Phys. Rev. 1950. Vol. 80. P. 797–806.
6. Косяков Б. П. Точные решения классической электродинамики и теории Янга – Миллса – Вонга в четномерном пространстве-времени // Теор. и матем. физика. 1999. Т. 119. С. 119–135.
7. Косяков Б. П. Об инерциальных свойствах частиц в классической теории // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2003. Т. 34. С. 1564–1609.
8. Kosyakov B. P. Introduction to the classical theory of particles and fields. – Berlin: Springer, 2007.
9. Gal'tsov D. Radiation reaction in various dimensions // Phys. Rev. D. 2002. Vol. 66. P. 025016.
10. Kazinski P. O., Lyakhovich S. L., Sharapov A. A. Radiation reaction and renormalization in classical electrodynamics of a point particle in any dimension // Phys. Rev. D. 2002. Vol. 66. P. 025017.
11. Yaremko Yu. Radiation reaction, renormalization and conservation laws in six-dimensional classical electrodynamics // J. Phys. A: Math. Gen. 2004. Vol. 37. P. 1079–1091.
12. Галахов Д. Самодействие и регуляризация в классической электродинамике высшей размерности // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 87. 522–527.
13. Lehner K. Ultraviolet singularities in classical brane theory // JHEP. 2010. 1012:063.
14. Birnholtz O., Nadar S. An action for reaction in general dimension // Phys. Rev. D. 2014. Vol. 89. P. 045003.
15. Nesterenko V. V., Feoli A., Scarpetta G. Dynamics of relativistic particles with Lagrangians dependent on acceleration // J. Math. Phys. 1995. Vol. 36. P. 5552–5564.
16. Kosyakov B. P., Nesterenko V. V. Stability of Zitterbewegung of a rigid particle // Phys. Lett. B. 1996. Vol. 384. P. 70–74.
17. Ortega G. P., Ratiu T. S. Momentum maps and Hamiltonian reduction. – Basel: Birkhauser, 2004.
18. Woodard R. P. Avoiding dark energy with $1/R$ modification of gravity // Lect. Notes Phys. 2007. Vol. 720. P. 403–433.
19. Brandenberger R., Vafa C. Superstrings in the early universe // Nucl. Phys. B. 1988. Vol. 316. P. 391–410.

20. Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter // *Phys. Lett. B.* 1998. Vol. 429. P. 263–272.
21. Randall L., Sundrum R. A large mass hierarchy from a small extra dimension // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83. P. 3370–3373.
22. Переломов А. М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. – М.: Наука, 1990.
23. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989.
24. Pavšič M. Stable self-interacting Pais-Uhlenbeck oscillator // *Mod. Phys. Lett. A.* 2013. Vol. 28. P. 1350165.
25. Patrick G. W., Roberts R. M., Wulf C. Stability of Poisson equilibria and Hamiltonian relative equilibria by energy methods // *Arch. Rational Mech. Anal.* 2004. Vol. 174. P. 301–344.
26. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980.
27. Al-Jaber S. M. Hydrogen atom in N dimensions // *Int. J. Theor. Phys.* 1998. Vol. 37. P. 1289–1298.
28. Burgbacher F., Lämmerzahl C., Macias A. Is there a stable hydrogen atom in higher dimensions? // *J. Math. Phys.* 1999. Vol. 40. P. 625–634.
29. Caruso F., Martins J., Oguri V. On the existence of hydrogen atoms in higher dimensional Euclidean spaces // *Phys. Lett. A.* 2013. Vol. 337. P. 694–698.
30. Bureš M., Siegl P. Hydrogen atom in space with a compactified extra dimension and potential defined by Gauss' law // *Ann. Phys.* 2014. Vol. 354. P. 316–327.

Stable Compact Motions of a Particle Driven by a Central Force in Six-Dimensional Spacetime

R. A. Anpilogov

We give a counterexample to the well-known Ehrenfest's assertion that the existence of stable electromagnetic bound systems is impossible in spaces of more than three dimensions. If we require that the Maxwellian laws of electromagnetism be preserved for any even spacetime dimension, and that the dynamics as a whole be consistent, then the laws of mechanics must be amended by the addition of terms with higher derivatives. We consider a nonrelativistic particle with an acceleration-dependent Lagrangian which moves in an attractive $1/r^3$ potential in five-dimensional space. There are compactly supported motions whose projections on the $SO(5)$ -reduced Hamiltonian system are Poisson equilibrium points. The nonlinearly stable equilibria correspond to physically stable motions over the direct product of two three-spheres in configuration space. The Energy-Casimir method turns out to be not appropriate for checking the stability. The studied system is shown to be stable through an analysis of numerical solutions to the equations of motion for small perturbations on the reduced phase space. This implies that falling to the center is prevented.