

УДК 539.4

# О корректности моделей вязкоупруго- пластичности с неньютоновой формой вязкости

М. А. Десятникова, В. Н. Софронов

*Рассмотрены проблемы, возникающие при численной реализации моделей вязкоупруго-пластичности. В данном классе моделей в качестве вязкого элемента выбрана неньютонова среда. Для таких сред коэффициент вязкости зависит не только от термодинамических параметров, но и от приведенной скорости сдвиговых деформаций. Предпринята попытка ответа на вопрос, насколько произвольной может быть эта зависимость.*

## Введение

В современных технологиях часто используются интенсивные нагрузки, превышающие предел упругости материалов, что вызывает неупругие (или пластические) деформации твердых тел. Первоначально модели пластичности создавались для задач статического и квазистатического деформирования. В дальнейшем было получено их обобщение на динамические процессы. В моделях этого класса часто пренебрегают эффектами вязкости и рассматривают деформации, не зависящие от скорости деформирования. По этой причине в ряде случаев возникают значительные расхождения количественного характера между расчетом и экспериментом. Примером являются неудовлетворительные попытки согласования расчетных и экспериментальных данных по затуханию амплитуды упругопластической ударной волны при ее взаимодействии с догоняющей волной разгрузки в рамках моделей идеальной пластичности [1–3]. На влияние вязкости при высокоскоростном течении указывают эксперименты по взрывному деформированию цилиндрических оболочек [4].

Потребность детального численного исследования рассмотренной в статье задачи возникла в ходе реализации и тестирования вязкоупругопластической модели прочности металлов. Отличительной особенностью данной модели является ее сильная нелинейность. В частности, предполагается, что коэффициент вязкости  $\mu$  зависит не только от термодинамических параметров, но и от приведенной скорости деформирования  $\dot{\zeta} = \sqrt{2\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}/3$  (квадратичного инварианта девиатора  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ ). Эта зависимость такова, что производная  $(\mu(\dot{\zeta})\dot{\zeta})'$  при конечных значениях  $\dot{\zeta}$  меняет знак и лишь при  $\dot{\zeta} \rightarrow \infty$  становится асимптотически положительной. Смена знака означает смену

направления параболичности соответствующих диффузионных уравнений [5], что приводит к появлению неустойчивости по отношению к малым изменениям начальных данных. Результаты расчетов показали сильную зависимость численного решения от малых параметров, определяемых искусственной либо аппроксимационной вязкостью, а также отсутствие предельного перехода при измельчении сетки  $\Delta t \rightarrow 0$ . В настоящей работе определены ограничения на параметры модели, при которых для данной формы вязкости гарантируется устойчивость численного счета.

### Уравнения вязкоупругопластической модели

Для учета процессов вязкой диссипации будем использовать реологическую модель Кельвина, схематично изображенную на рис. 1. Последовательное соединение элементов эквивалентно выполнению условия аддитивности деформаций, параллельное соединение – выполнению условия аддитивности напряжений.

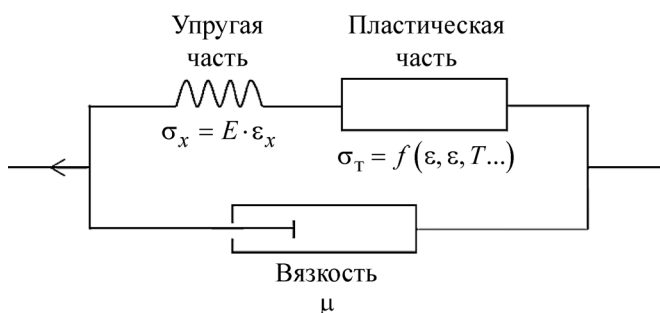


Рис. 1. Реологическая модель Кельвина учета вязких свойств материала

Все существующие модели упругопластического деформирования содержат уравнения трех видов, а именно:

– уравнения согласования, эквивалентные условию аддитивности для девиаторов полных ( $\epsilon_{ij}$ ), упругих ( $\epsilon_{ij}^e$ ) и пластических ( $\epsilon_{ij}^p$ ) деформаций:  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p$ ;

– закон Гука, связывающий девиатор тензора напряжений ( $s_{ij}$ ) с упругими деформациями:  $s_{ij} = 2G\epsilon_{ij}^e$ ,  $G$  – модуль сдвига;

– закон течения, связывающий пластическую деформацию с напряжениями.

Для реологической вязкоупругопластической модели Кельвина к перечисленному выше списку замыкающих соотношений следует добавить уравнения для вязких напряжений. В соответствии с рис. 1 полный тензор напряжений является суммой упругопластического и вязкого тензоров:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + s_{ij} + s_{ij}^H. \quad (1)$$

Вязкая составляющая девиатора напряжений определяется следующим соотношением:

$$s_{ij}^H = 2\mu \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right), \quad (2)$$

где  $\mu$  – коэффициент первой вязкости (вязкости на сдвиговых деформациях).

Предполагается, что коэффициент вязкости  $\mu$  зависит не только от термодинамических параметров, но и от квадратичного инварианта тензора скоростей сдвигового деформирования  $\dot{\zeta} = \sqrt{2\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}/3$ . Для определенности рассмотрим модель неньютоновой среды, представленную в [6], с параметрами из табл. 1:

$$\mu(\dot{\zeta}) = \frac{\mu_0}{\sqrt{1 + \dot{\zeta}\varphi(\dot{\zeta})/\dot{\zeta}_0}}, \quad \varphi(\dot{\zeta}) = \frac{1 + \varphi_{\max}(\dot{\zeta}/\dot{\zeta}_S)^{m^*}}{1 + (\dot{\zeta}/\dot{\zeta}_S)^{m^*}}. \quad (3)$$

Здесь и в дальнейшем используется следующая система единиц:  $L$  – см,  $t$  –  $10^{-5}$  с,  $m$  – г,  $T$  – К. Для вспомогательных величин:  $u$  – км/с,  $\rho$  – г/см<sup>3</sup>,  $P$  – ГПа,  $E$  – КДж/г,  $\mu$  – ГПа ·  $10^{-5}$  с,  $\dot{\varepsilon}$  –  $10^5$  с<sup>-1</sup>.

Таблица 1

Параметры модели вязкости [6]

$\mu_0$ , ГПа · $10^{-5}$ с	$\varphi_{\max}$	$m^*$	$\dot{\zeta}'_0$ , $10^{-5}$ с	$\dot{\zeta}'_S$ , $10^{-5}$ с
127,5	4000	2	0,0007	100

### ***Термодинамика вязкопластического деформирования.***

#### ***Условия выпуклости диссипативной функции для вязких напряжений***

Для описания процессов динамического деформирования сплошной среды используются основные соотношения физики, выражающие законы сохранения массы, импульса, энергии, которые замыкаются связями девиатора напряжений с термодинамическими и кинематическими параметрами среды. Наличие вязкого элемента в модели Кельвина приводит к корректировке уравнений движения и энергии за счет добавления слагаемых, определяющих вязкий перенос импульса и вязкую диссипацию:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= -\frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \\ \rho \frac{du_i}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial s_{ik}^{\mu}}{\partial x_k}, \\ \rho \frac{dE}{dt} &= \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + s_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + s_{ij}^{\mu} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}. \end{aligned} \quad (4)$$

Следствием системы (4) является уравнение для роста энтропии:

$$T \frac{dS}{dt} = \frac{s_{ij}}{\rho} \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dt} + \frac{s_{ij}^{\mu}}{\rho} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}. \quad (5)$$

Из уравнения (5) следует, что для необратимого процесса вязкой и пластической диссипации обобщенными термодинамическими силами являются напряжения  $s_{ij}/\rho$ ,  $s_{ij}^{\mu}/\rho$ , а термодинамическими потоками – скорости деформирования  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dot{\varepsilon}_{ij}$ . В соответствии с принципом Онзагера о существовании скалярного потенциала определим диссипативные функции для пластической и вязкой диссипации [7, 8]. Потенциалы являются функциями термодинамических потоков. В действительности имеет место зависимость этих функций от квадратичных инвариантов соответствующих тензоров. Термодинамические силы определяются дифференцированием диссипативных потенциалов:

$$\frac{s_{ij}}{\rho} = \frac{\partial \Psi^p(\dot{\chi}_p)}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^p}, \quad \frac{s_{ij}^{\mu}}{\rho} = \frac{\partial \Psi^{\mu}(\dot{\zeta})}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}},$$

где  $\dot{\chi}_p = \sqrt{2\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p / 3}$ ,  $\dot{\zeta} = \sqrt{2\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} / 3}$  – квадратичные инварианты тензоров  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dot{\varepsilon}_{ij}$ .

Общепринятым является требование выпуклости диссипативных функций относительно потоков. Так, для обеспечения единственности решения ряда динамических задач для жестко- и вязкопластических сред требуется, чтобы отображение  $s_{ij}(\dot{\varepsilon}_{ij})$  было монотонно возрастающим [8], что эквивалентно выпуклости вязкой диссипативной функции.

Диссипативная функция, отвечающая за пластическую диссипацию, может быть получена с использованием соотношений теории пластического течения:

$$\Psi^p(\dot{\chi}_p) = \frac{1}{\rho} \int s_{ij} d\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \left[ \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dt} = \frac{3\dot{\chi}_p}{2Y_s} s_{ij} \right] = \frac{2}{3\rho} \int \frac{Y_s}{\dot{\chi}_p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p d\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{1}{\rho} \int \frac{Y_s}{\dot{\chi}_p} \dot{\chi}_p d\dot{\chi}_p = \frac{1}{\rho} \int Y_s d\dot{\chi}_p.$$

Для моделей идеальной пластичности предел текучести ( $Y_s$ ) не зависит от скорости пластических деформаций, поэтому для таких моделей  $\Psi^p(\dot{\chi}_p)$  является линейной функцией квадратичного инварианта  $\dot{\chi}_p$  и перечисленные выше требования будут выполнены. В то же время в некоторых моделях учитывается зависимость предела текучести от параметра  $\dot{\chi}_p$ . Для выполнения условия выпуклости требуется, чтобы эта зависимость была растущей функцией аргумента  $\dot{\chi}_p$ .

Диссипативная функция для вязких напряжений с учетом (2) принимает вид:

$$\Psi^{\mu}(\dot{\zeta}) = \frac{1}{\rho} \int s_{ij}^{\mu} d\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{\rho} \int 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij} d\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2\rho} \int 2\mu(\dot{\zeta}) \dot{\zeta} d\dot{\zeta}.$$

Для ньютоновых моделей диссипативный потенциал является квадратичной, а следовательно, и выпуклой функцией инварианта  $\dot{\zeta}$ . В общем случае требование выпуклости функции  $\Psi^{\mu}(\dot{\zeta})$  эквивалентно условию

$$(\mu \dot{\zeta})'_{\dot{\zeta}} > 0. \quad (6)$$

Исследования показывают, что для выбранной ранее формулы для коэффициента вязкости (3) данное условие будет выполнено при следующих ограничениях на параметры модели:

$\varphi_{\max} < \varphi_{\max}^*(m_*)$ . График функции  $\varphi_{\max}^*(m_*)$  показан на рис. 2. Для стандартного набора параметров (см. табл. 1) ограничение (6) принимает вид  $\varphi_{\max} < \varphi_{\max}^*(m_* = 2) = 9,000194$ . Если  $m_* \leq 1$ , ограничения на параметр  $\varphi_{\max}$  отсутствуют.

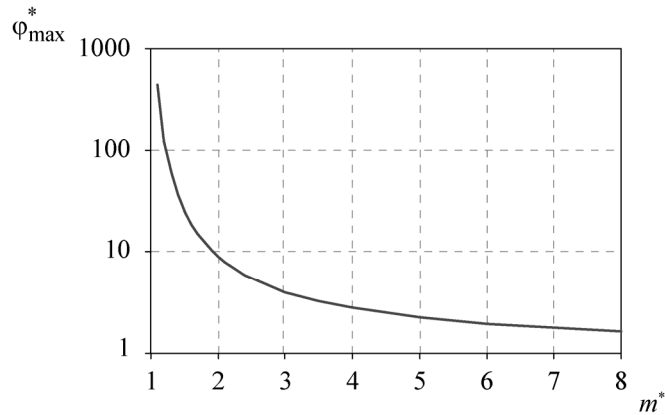


Рис. 2. Зависимость порогового значения  $\varphi_{\max}^*$  от параметра модели  $m_*$

Имеющиеся экспериментальные данные указывают на существенное уменьшение вязкости при скоростях деформирования  $10^6-10^7 \text{ c}^{-1}$ . Сглаживающая функция  $\varphi(\dot{\zeta}, m)$  требуется для плавного перехода функциональной зависимости (3) с параметрами  $\mu_0 = 127,5, \varphi_{\max} = 1$  при нормальных условиях на функциональную зависимость с параметрами  $\mu_0 = 2, \varphi_{\max} = 1$  при скоростях деформирования  $10^6-10^7 \text{ c}^{-1}$  (рис. 3). В принципе, функция  $\varphi(\dot{\zeta}, m_*)$  может быть выбрана достаточно произвольно. На рис. 3 представлены итоговые зависимости коэффициента вязкости от скорости деформирования для двух значений параметра  $m_* = 2$  и  $m_* = 1$ . Второму варианту соответствует выпуклая функция диссипативности. Именно для этого варианта возможно получение устойчивых численных решений.

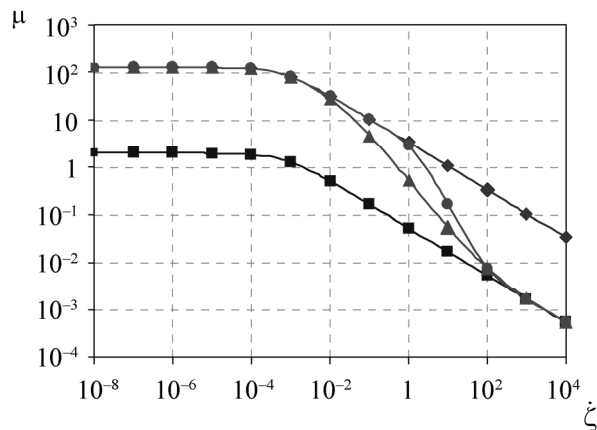


Рис. 3. Зависимость коэффициента вязкости от скорости деформирования: ◆ –  $\mu_0 = 127,5, \varphi_{\max} = 1$ ; ■ –  $\mu_0 = 2, \varphi_{\max} = 1$ ; ▲ –  $\mu_0 = 127,5, \varphi_{\max} = 4000, m_* = 1$ ; ● –  $\mu_0 = 127,5, \varphi_{\max} = 4000, m_* = 2$

### Условие эволюционности

В этом разделе выясним, какие условия следует накладывать на коэффициенты вязкости для получения устойчивых численных решений. Ограничимся рассмотрением плоских одномерных течений. В этом случае ненулевые компоненты девиаторов  $s_{ij}$ ,  $s_{ij}^{\mu}$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}$  и квадратичный инвариант  $\zeta$  принимают вид:

$$s_{11} = -2s_{22} = -2s_{33} = P - P_r = -\frac{2}{3}(P_r - P_{\varphi}), \quad s_{11}^{\mu} = -2s_{22}^{\mu} = -2s_{33}^{\mu} = \frac{4\mu}{3} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{4\mu}{3V} \frac{\partial u}{\partial m}, \quad (7)$$

$$\dot{\epsilon}_{11} = -2\dot{\epsilon}_{22} = -2\dot{\epsilon}_{33} = \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2}{3V} \frac{\partial u}{\partial m}, \quad \zeta = \frac{2}{3} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| = \frac{2}{3V} \left| \frac{\partial u}{\partial m} \right|. \quad (8)$$

С учетом (7), (8) система (4) запишется в виде:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial r},$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{2}{3} \frac{\partial (P_r - P_{\varphi})}{\partial r} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \left( \frac{2}{3} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \right) \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (9)$$

$$\rho \frac{dE}{dt} = \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{2(P_r - P_{\varphi})}{3} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{4}{3} \mu \left( \frac{2}{3} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \right) \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2.$$

Для исследования корректности неньютоновых моделей вязкости рассмотрим среду с вязким элементом и баротропным уравнением состояния  $P(\delta) = \rho C_0^2 (\delta^n - 1) / n$ . Эффектами упругости и пластичности пренебрегаем. При использовании баротропного УРСа уравнение энергии выпадает из рассмотрения.

Система дифференциальных уравнений называется эволюционной, если задача Коши для нее корректна [9]. В этом случае малым возмущениям начальных данных при  $t = 0$  соответствуют малые возмущения решения при  $t > 0$ . Условия эволюционности могут быть получены для линеаризованной системы

$$\frac{du}{dt} = -V \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{4}{3} V \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \left( \frac{2}{3} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \right) \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{C_W^2}{V} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{4}{3} (\mu \dot{\zeta})'_{\zeta} V \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad \frac{dV}{dt} = V \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (10)$$

где  $C_W^2 = dP/d\rho$  – адиабатическая скорость звука,  $V = 1/\rho$  – удельный объем.

Пусть начальные данные заданы в виде гармонических возмущений. Определим эволюцию этих возмущений на частных решениях вида

$$u = \tilde{u} e^{i(\lambda t + kr)}, \quad V = \tilde{V} e^{i(\lambda t + kr)},$$

где  $(|\tilde{u}|, |\tilde{V}|)$  – конечная и ненулевая амплитуда начальных возмущений,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Решая уравнения (10) при замороженных коэффициентах, получим связь частоты  $\lambda$  с волновым числом  $k$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{2(\mu\dot{\zeta})'_{\xi} V k^2 i}{3} \pm \sqrt{-\left(\frac{2(\mu\dot{\zeta})'_{\xi} V k^2}{3}\right)^2 + C_W^2 k^2}.$$

Для коротковолновых возмущений (при  $k \rightarrow \infty$ ) ненулевой корень принимает значение  $\lambda = 4(\mu\dot{\zeta})'_{\xi} V k^2 i / 3$ . Таким образом, условие эволюционности  $\text{Im}(\lambda) > 0$  (отсутствия роста начальных возмущений) будет выполнено тогда и только тогда, когда во всей области течения диссипативная функция строго выпукла  $(\mu\dot{\zeta})'_{\xi} > 0$ .

Наличие в численных расчетах областей невыпуклости означает рост возмущений. Однако предсказать возможные сценарии развития этих возмущений не представляется возможным ввиду того, что с их ростом начинают проявляться нелинейные свойства уравнений.

Модели, нарушающие условие эволюционности, должны быть исключены из рассмотрения. Тем не менее, выясним, может ли быть получена структура стационарной ударной волны в средах с неньютоновской вязкостью общего вида.

### ***О существовании структуры стационарных ударных волн в неньютоновых моделях вязкости. Условие допустимости разрывов***

Известна гипотеза о том, что существуют только фронты, имеющие структуру [10]. Эта гипотеза позволила решить проблему единственности ряда задач газовой динамики [11, 12]. Условие допустимости (наличие структуры) означает существование гладкого решения, зависящего от автомодельной переменной  $\xi = m - \rho_0 D t$  и принимающего при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  значения параметров перед и за фронтом волны.

При исследовании эффектов физической вязкости всегда предполагается, что сетка выбрана так, что эффектами математической псевдовязкости можно пренебречь. Так как модели с неньютоновской вязкостью могут нарушать условие эволюционности, то математическая псевдовязкость может играть роль регуляризатора исходных некорректных уравнений и тем самым влиять на структуру волны. Выберем математическую вязкость в форме Шульца [13]. Запишем систему (10) в массовых лагранжевых координатах с учетом физической и математической вязкости:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial m}, & \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial(P+q)}{\partial m} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial m} \left( \mu \left( \frac{2}{3V} \left| \frac{\partial u}{\partial m} \right| \right) \frac{1}{V} \frac{\partial u}{\partial m} \right), \\ q &= -C_L C_W \frac{\Delta m}{V} \frac{\partial u}{\partial m} + C_K \frac{\Delta m^2}{2V} \left( \frac{\partial u}{\partial m} - \left| \frac{\partial u}{\partial m} \right| \right) \frac{\partial u}{\partial m}, \end{aligned} \tag{11}$$

где  $C_L = 0,5$  и  $C_K = 3$  – коэффициенты линейной и квадратичной псевдовязкости;  $\Delta m = \rho \Delta r$  – размер ячейки сетки. Для решения уравнений (11) в виде бегущей волны  $F(m, t) = F(\xi)$  получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 -\rho_0 D V'_\xi &= u'_\xi, \\
 -\rho_0 D u'_\xi &= -(P+q)'_\xi + \frac{4}{3} (\mu \rho u'_\xi)'_\xi, \\
 q &= -\frac{\Delta m}{V} u'_\xi (C_L C_W - C_K \Delta m u'_\xi) = \rho_0 D \frac{\Delta m}{V} V'_\xi (C_L C_W + C_K \rho_0 D \Delta m V'_\xi)
 \end{aligned} \tag{12}$$

с граничными условиями на бесконечности:

$$V(\xi \rightarrow \infty) = V_0, \quad V(\xi \rightarrow -\infty) = V_F, \quad u(\xi \rightarrow \infty) = 0, \quad u(\xi \rightarrow -\infty) = u_F, \quad V'_\xi(\xi \rightarrow \pm\infty) = 0, \quad u'_\xi(\xi \rightarrow \pm\infty) = 0.$$

Интегрируя уравнения (12) с учетом граничных условий, получаем

$$\begin{aligned}
 u &= \rho_0 D (V_0 - V), \\
 \left( C_L C_W \Delta m + C_K \rho_0 D \Delta m^2 V'_\xi + \frac{4}{3} \mu \left( \frac{2\rho_0 D}{3V} V'_\xi \right) \right) \frac{\rho_0 D V'_\xi}{V} &= (\rho_0 D)^2 (V_0 - V) - (P(V) - P_0).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Второе уравнение системы (13)

$$\Omega(V, V'_\xi) = \left( C_L C_W \Delta m + C_K \rho_0 D \Delta m^2 V'_\xi + \frac{4}{3} \mu \left( \frac{2\rho_0 D}{3V} V'_\xi \right) \right) \frac{\rho_0 D V'_\xi}{V} - (\rho_0 D)^2 (V_0 - V) + P(V) - P_0 = 0 \tag{14}$$

не разрешено относительно производной  $V'_\xi$ . Для его однозначной разрешимости требуется, чтобы уравнение не имело особых точек [14]. Особые точки – это те точки поверхности  $\Omega(V, V'_\xi) = 0$ ,

в которых  $\frac{\partial \Omega}{\partial V'_\xi} = \frac{2\rho_0 D}{3V} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\zeta}} = \frac{4\rho_0 D}{3V} \frac{\partial}{\partial \dot{\zeta}} \mu(\dot{\zeta}) \dot{\zeta} = 0$ . Обращение в нуль производной  $\partial \Omega / \partial \dot{\zeta}$  означает

смену знака функции  $(\mu \dot{\zeta})'_\xi$ . Таким образом, для однозначной разрешимости уравнения (14), а следовательно, и для существования стационарной структуры достаточно выполнения условия (6).

Графики функций  $V'_\xi(V)$ , удовлетворяющие условию  $\Omega(V, V'_\xi) = 0$  в отсутствие математической вязкости, показаны на рис. 4 (см. также цв. вкл.). В расчетах использовались параметры вязкости из табл. 1, а также модифицированный набор с заменой одного из параметров ( $\varphi_{\max} = 9$ ). В этом случае условие выпуклости диссипативной функции (6) выполнено во всей области течения.

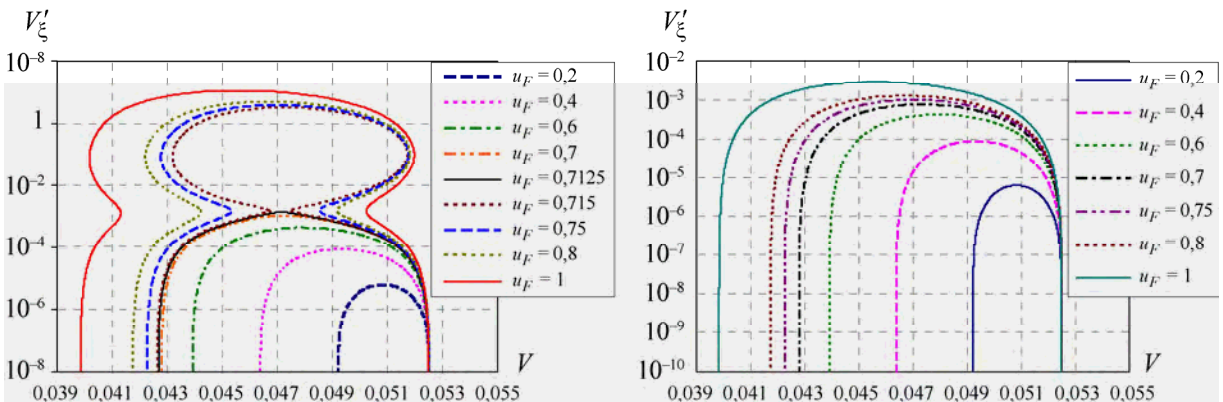


Рис. 4. Графики функций  $V'_\xi(V)$ , удовлетворяющих условию  $\Omega(V, V'_\xi) = 0$  ( $C_L = 0, C_K = 0$ ):

а –  $\varphi_{\max} = 4000$ ; б –  $\varphi_{\max} = 9$



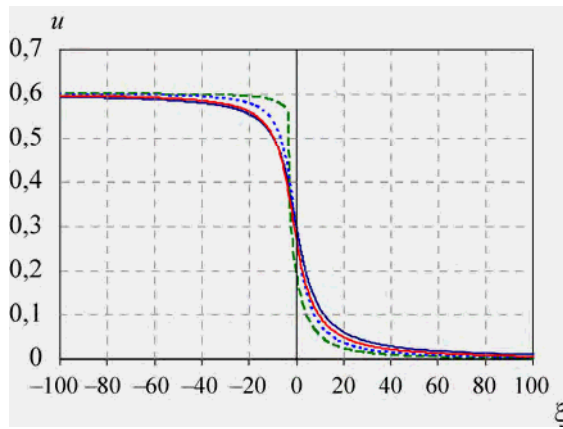


Рис. 5. Профили массовой скорости ударной волны с амплитудой  $u_F = 0,6$  в расчете с первым набором параметров ( $C_L = C_K = 0$ ,  $\varphi_{\max} = 4000$ ): — стационарное решение; --- расчет,  $t = 2$ ; ..... расчет,  $t = 4$ ; — расчет,  $t = 10$

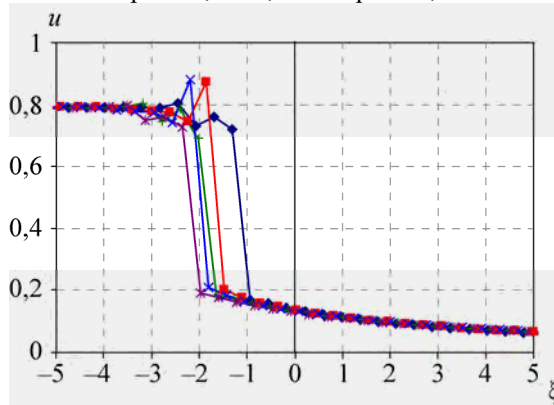


Рис. 6. Профили массовой скорости ударной волны с амплитудой  $u_F = 0,8$  в расчете с первым набором параметров ( $C_L = C_K = 0$ ,  $\varphi_{\max} = 4000$ ): ♦ — расчет,  $t = 2$ ; ■ — расчет,  $t = 4$ ; + — расчет,  $t = 6$ ; × — расчет,  $t = 8$ ; \* — расчет,  $t = 10$

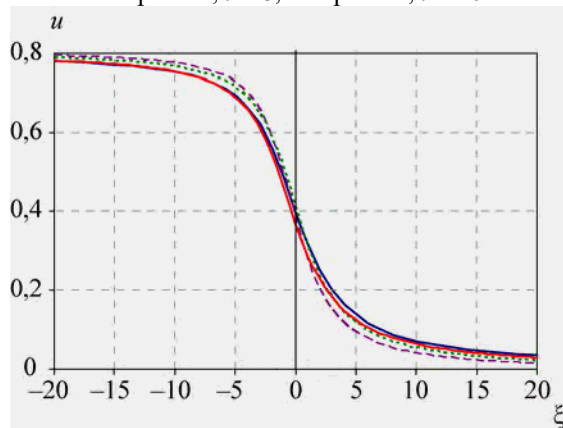


Рис. 7. Профили массовой скорости ударной волны с амплитудой  $u_F = 0,8$  в расчете со вторым набором параметров ( $C_L = C_K = 0$ ,  $\varphi_{\max} = 9$ ): — стационарное решение; --- расчет,  $t = 1$ ; ..... расчет,  $t = 2$ ; — расчет,  $t = 6$

Для первого набора параметров стационарная структура существует только для ударных волн с амплитудой  $u_F < u_F^* \approx 0,7125$  (рис. 4,а). Стационарных структур для ударных волн с большей амплитудой не существует, так как в этом случае функция  $V'_\xi(V)$  становится многозначной. Для модифицированного набора параметров стационарная структура существует для всех амплитуд ударных волн, так как для этих параметров функция  $(\mu\dot{\zeta})'_\xi$  строго положительна и уравнение (14) однозначно разрешается относительно производной  $V'_\xi$  (рис. 4,б).

Вывод о наличии ограничений на параметры модели при моделировании стационарных волн подтверждается численными расчетами. Для первого набора параметров стационарная структура существует для ударной волны с амплитудой  $u_F = 0,6$  (рис. 5, см. также цв. вкл.) и численное решение с течением времени приближается к этому автомодельному стационарному решению. Однако в численном расчете ударной волны с амплитудой  $u_F = 0,8$  стационарная структура отсутствует (рис. 6, см. также цв. вкл.), и положение разрыва с течением времени отклоняется от стационарного значения  $m_F = \rho_0 Dt$ . Для второго набора параметров ( $\varphi_{\max} = 9$ ) ограничений на параметры ударных волн нет – стационарная структура существует для всех амплитуд. Пример такой структуры в численном расчете ( $u_F = 0,8$ ) представлен на рис. 7 (см. также цв. вкл.).

При исследовании допустимости разрывов в расчетах, использующих физическую и математическую вязкости, необходимо учитывать, что псевдовязкость зависит от размера ячеек сетки  $\Delta m = \rho_0 X / N_s$  ( $X = 50$  – размер счетной области,  $N_s$  – число узлов). Графики функций  $V'_\xi(V)$  с использованием псевдовязкости и сетки с  $N_s = 25000$  приведены на рис. 8 (см. также цв. вкл.).

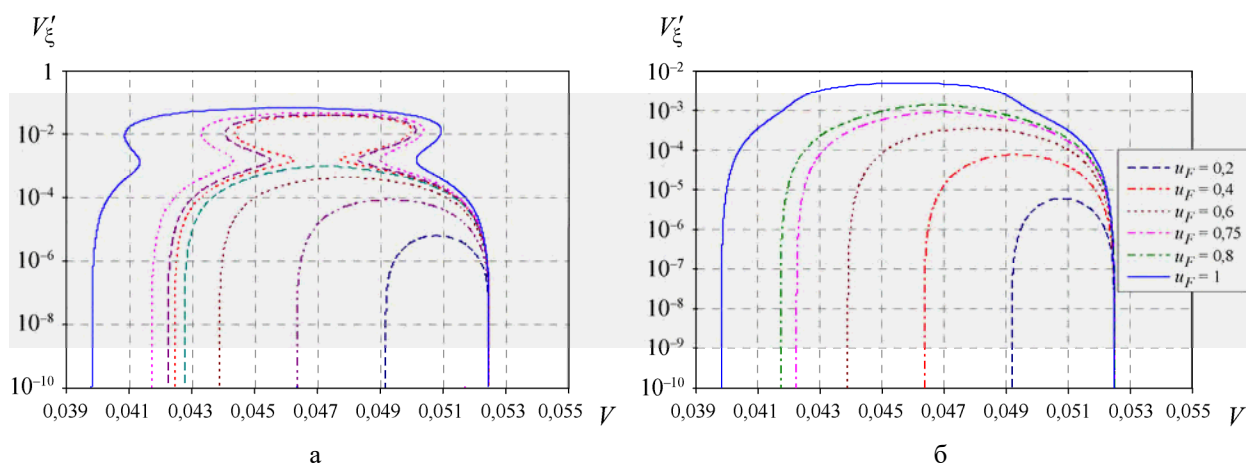


Рис. 8. Графики функций  $V'_\xi(V)$ , удовлетворяющих условию  $\Omega(V, V'_\xi) = 0$  ( $C_L = 0,5$ ,  $C_K = 3$ ,  $\varphi_{\max} = 4000$ ): а –  $N_s = 25000$ ; б –  $N_s = 2500$

Из анализа рисунка следует, что, как и ранее, графики функций  $V'_\xi(V)$  для различных амплитуд ударных волн можно разделить на две группы топологически эквивалентных кривых, а именно: 1) для которых каждому значению удельного объема  $V$  из области определения  $V_F < V < V_0$  соответствует одно значение производной  $V'_\xi(V)$ ; 2) для которых данное условие однозначной разрешимости не выполнено. Отметим, что по сравнению с расчетами в отсутствие псевдовязкости

в данном случае несколько увеличивается пороговое значение амплитуды волны  $u_F^*$ . Так, для амплитуды волны  $u_F = 0,72$  стационарного решения не существует, что подтверждается численными расчетами (см. рис. 9,а). В данном случае стабилизирующая роль псевдовязкости оказывается недостаточной для получения устойчивого численного решения. В расчетах с уменьшенным числом узлов сетки ( $N_s = 2500$ ) имеет место однозначная разрешимость уравнения  $\Omega(V, V'_\xi) = 0$  относительно производной  $V'_\xi$  (рис. 8,б), что означает существование стационарных решений для амплитуд волн из интервала  $U_F < 1$  км/с (рис. 9,б).

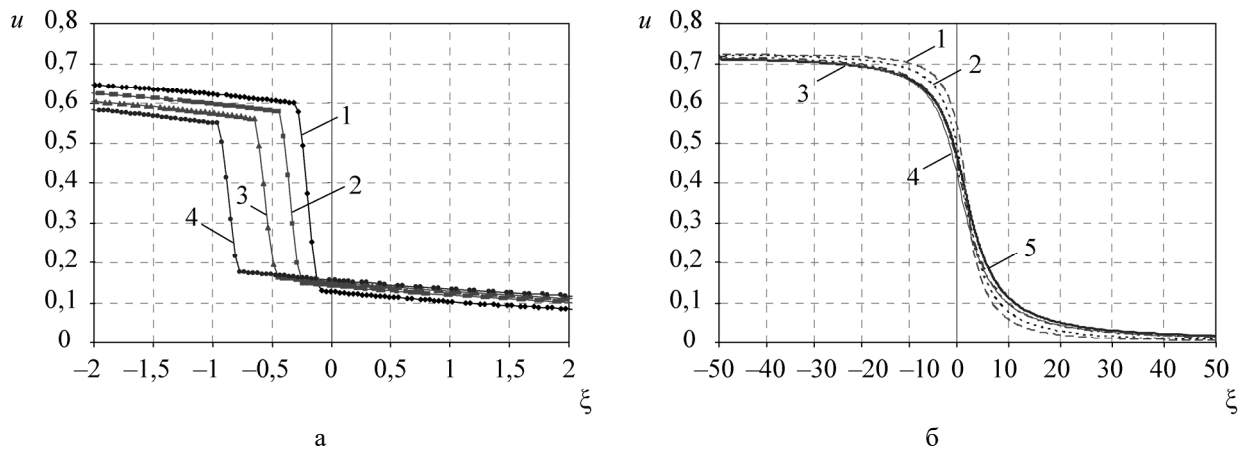


Рис. 9. Профили массовой скорости ударной волны с амплитудой  $u_F = 0,72$  в расчете с параметрами  $C_L = 0,5$ ,  $C_K = 3$ ,  $\varphi_{\max} = 4000$ ; а –  $N_s = 25000$ , б –  $N_s = 2500$ : 1 – расчет,  $t = 1$ ; 2 – расчет,  $t = 2$ ; 3 – расчет,  $t = 4$ ; 4 – расчет,  $t = 10$ ; 5 – стационарное решение

Таким образом, псевдовязкость играет стабилизирующую роль и при определенных условиях (размерах ячеек сетки  $\Delta t$ ) уравнение  $\Omega(V, V'_\xi) = 0$  не будет иметь особых точек даже тогда, когда условие  $(\mu \dot{\zeta})'_\xi > 0$  не выполнено.

### **Численное моделирование зависимости скорости свободной поверхности ударно-нагруженных плоских образцов от времени**

Вязкоупругопластическая модель использовалась для численного моделирования опытов Баркера [15, 16]. В этих опытах с помощью лазерной интерферометрии регистрировалась скорость свободной поверхности и тем самым определялась структура переднего фронта ударной волны. В серии экспериментов варьировалась начальная скорость ударника, а следовательно, и амплитуда ударной волны в мишени.

Экспериментальные данные указывают на резкое уменьшение ширины ударной волны (а, следовательно, и коэффициента вязкости) при увеличении ее интенсивности. Для большинства металлов (Cu, Al, Be, U и др.) зависимость скорости деформирования в ударной волне от давления ударного сжатия определяется эмпирическим законом четвертой степени  $\dot{\zeta}_{\max} \sim P_F^4$  [15, 16].

Попытка согласовать эти экспериментальные данные с результатами расчетов и определила выбор формулы (3) для коэффициента вязкости [6].

Схема расчетов соответствовала постановке экспериментов [16] для урановых ударника ( $\Delta_{уд} = 0,4$  см) и мишени ( $\Delta_M = 0,8$  см). Использовалась модель Мизеса [17] и уравнение состояния Ми – Грюнайзена [18].

Для учета вязких свойств материала выбраны два набора параметров модели вязкости – с выполнением и без выполнения условий выпуклости диссипативной функции (табл. 2). Первый вариант соответствует стандартному набору параметров модели вязкости с модифицированным параметром  $\mu_0$ . Условию эволюционности (6) удовлетворяет второй набор параметров, в котором изменен параметр  $m^*$ . Так как в качестве пластического элемента выбрана модель Мизеса, то структура переднего фронта в расчетах определяется исключительно моделью вязкости.

Таблица 2

Параметры модели вязкости

Номер набора параметров	$\mu_0$	$m^*$	$\Phi_{max}$	$\zeta'_0$	$\zeta'_s$
1	382,5	2	4000	0,0007	100
2	382,5	1	4000	0,0007	100

Экспериментальные данные представлены в виде зависимости максимальной скорости деформирования в ударной волне от амплитуды давления (рис. 10). В расчетах скорость деформирования  $\dot{\zeta}_{max}$  вычислялась в момент выхода ударной волны на свободную поверхность мишени. Численные расчеты проведены на серии сгущающихся сеток с общим числом ячеек  $N_s = 3000; 6000; 8000$ . Неудовлетворительные результаты получены в расчетах с использованием первого набора параметров (рис. 10,а). Для этого набора параметров относительное согласие с экспериментом наблюдается в расчетах на сетке с  $N_s = 3000$  и только в области высоких амплитуд нагружения. При измельчении сетки наблюдается сильный рост расчетной скорости деформирования: она начинает превосходить экспериментально зафиксированную скорость деформирования более чем на порядок. Таким образом, при использовании неэволюционной модели отсутствует предельный переход получаемого решения при измельчении сетки, а структура переднего фронта не соответствует экспериментальным данным. Здесь, как и ранее, стабилизирующая роль псевдовязкости при измельчении сетки становится недостаточной для получения устойчивого численного решения.

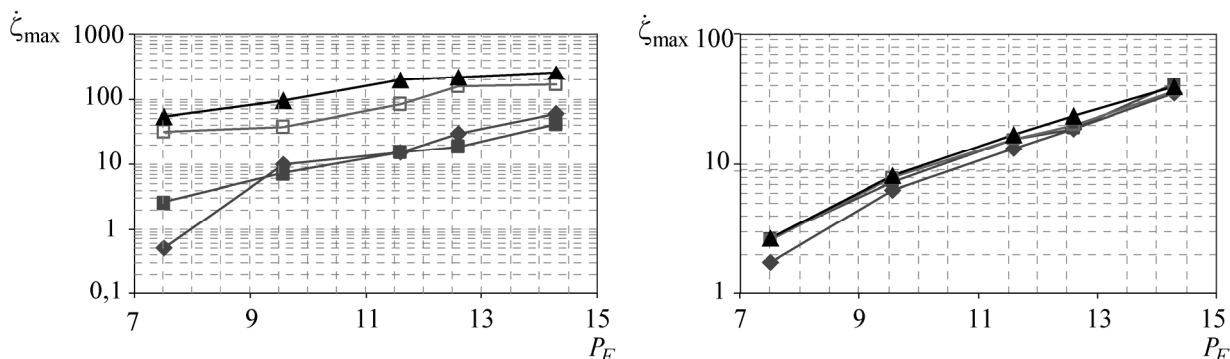


Рис. 10. Экспериментальные и расчетные зависимости скорости деформирования от амплитуды ударной волны, выполненные с первым (а) и вторым (б) набором параметров:

◆ –  $N_s = 3000$ ; □ –  $N_s = 6000$ ; ▲ –  $N_s = 8000$ ; ■ – эксперимент

При использовании эволюционной модели (второй набор параметров) наблюдается хорошая согласованность расчетных и экспериментальных данных. Для данного набора параметров удается описать экспериментально полученную структуру ударной волны (см. рис. 10,б). Отклонения расчетных и экспериментальных значений скорости деформирования укладываются в рамки погрешности экспериментальных данных.

### *Заключение*

Общеизвестно, что сходимость разностных схем возможна только при решении корректно поставленной задачи. По этой причине модели, нарушающие условие эволюционности, должны быть исключены из рассмотрения.

Неприятной особенностью моделей с невыпуклой функцией диссипативности является то, что приемлемые результаты могут быть получены на условно грубых сетках вследствие стабилизирующей роли искусственной либо аппроксимационной вязкости. Более того, могут быть сделаны ошибочные выводы о существовании предельного перехода при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Однако в определенный момент (при измельчении сетки с  $\Delta t$  ниже порогового значения) может произойти катастрофическое изменение расчетных профилей, что является следствием неэволюционности таких моделей.

### Список литературы

1. Фомин В. М., Хакимов Э. М. Численное моделирование волн сжатия и разрежения в металлах // Журнал прикл. механики и техн. физики. 1989. № 5. С. 118–122.
2. Мержиевский Л. А., Реснянский А. Д. О выборе модели для описания затухания ударных волн в металлах // Физика горения и взрыва. 1983. Т. 19, № 1. С. 99–105.
3. Мержиевский Л. А. Модели деформирования при интенсивных динамических нагрузках (обзор) // Физика горения и взрыва. 2015. Т. 52, № 2.
4. Огородников В. А., Садовой А. А., Софронов В. Н., Тюнькин Е. С. Роль диссипативных процессов при обжати цилиндрических оболочек взрывом // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 1993. Вып. 3. С. 97–101.
5. Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н. Нелинейные уравнения переменного типа. – Новосибирск: Наука, 1983.
6. Игнатова О. Н., Раевский В. А., Соколов С. С., Чайка Т. И. Роль вязкости металлов в формировании ударных волн и волн разрежения // Материалы XIII Международного семинара «Фундаментальные свойства плутония». – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013.
7. Садовский В. М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. – М.: Физматлит, 1997.
8. Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жесткопластических сред. – М.: Наука, 1981.
9. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // Успехи матем. наук. 1959. Т. XIV. Вып. 2(86).
10. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001.

11. Бондаренко Ю. А., Софронов В. Н., Копышев В. П., Хрусталеv В. В. Влияние вязкости, дисперсии и кинетики фазовых переходов на параметры ударных волн разрежения // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2005. Вып. 9. С. 6–29.

12. Бондаренко Ю. А., Софронов В. Н., Дудник Ю. Е. Влияние вязкости и дисперсии на параметры ударных волн разрежения для невыпуклого уравнения состояния общего вида // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2013. Вып. 1. С. 3–17.

13. Шульц У. Д. Двумерные конечно-разностные уравнения гидродинамики в переменных Лагранжа // Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. С. 9–54.

14. Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – Ижевск: Ижевская республ. типография, 2000.

15. Jonson J. N., Barker L. M. Dislocation and steady plastic wave profiles in 6061-T6 aluminum // J. Appl. Phys. 1969. Vol. 40, N 2. P. 4321–4334.

16. Swegle J. W., Grady D. E. Shock viscosity and the prediction of shock wave rise times // J. Appl. Phys. 1985. Vol. 58, N 2. P. 692–701.

17. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Под ред. М. Э. Эглит. – М.: Мир, 1974.

18. Глушак Б. Л., Гударенко Л. Ф., Стяжкин Ю. М., Жеребцов В. А. Полуэмпирическое уравнение состояния металлов с переменной электронной теплоемкостью // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 1991. Вып. 1. С. 32–37.

## **On Correctness of Visco-Elasto-Plasticity Models with Non-Newtonian Viscosity**

M. A. Desyatnikova, V. N. Sofronov

*Problems arising in the numerical implementation of visco-elasto-plasticity models are considered. In this type of models, von Mises model has been taken for a plastic component and non-Newtonian medium has been taken for a viscous component, for which the viscosity coefficient depends not only on the thermodynamic parameters, but on the reduced velocity of shear strains as well. An attempt has been made to give an answer to the question concerning the extent of arbitrariness of such dependence.*