УДК 519.6+537.8

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ ГАММА-КВАНТОВ

А. А. Соловьёв*
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Рассмотрена задача об электромагнитных полях, которые генерируются сторонними объемными токами, моделирующими токи комптоновских электронов, возникающих при рассеянии гамма-квантов от точечного источника в однородной непроводящей атмосфере. Токи задаются в факторизованном виде с определенными угловой и временной зависимостями, в то время как зависимость от расстояния до источника может быть практически произвольной. Получено точное решение в виде однократных квадратур для всех трех компонент электрического поля. Оно может быть использовано в качестве представительного теста для численных методик расчета нестационарных электромагнитных полей.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, объемные токи, комптоновские электроны, однородная непроводящая среда, тесты для численных методик.

Введение

Расчет характеристик электромагнитного импульса (ЭМИ), генерируемого в воздухе нестационарным точечным источником гамма-излучения [1], является достаточно непростой вычислительной задачей. Сложность ее численного решения обусловлена, в частности, существенной пространственно-временной разномасштабностью протекания различных фаз ЭМИ. Это обстоятельство необходимо учитывать при разработке соответствующих численных методик. Очевидно, что важным этапом при верификации подобных методик является их тестирование на представительных модельных задачах, для которых удается получить аналитическое решение.

В работах [2—4] были получены аналитические решения ряда задач о распространении радиоимпульса в непроводящей среде. При этом полагалось, что источниками электромагнитных полей являются сторонние объемные токи, моделирующие токи комптоновских электронов, возникающих при рассеянии гамма-квантов в атмосфере. Аналитические решения в упомянутых работах были получены лишь для некоторых модельных (и не всегда физически оправданных) видов зависимостей плотности стороннего тока от расстояния до источника гамма-квантов. Кроме того, в них рассматривались только так называемые ТМ-системы, в которых отличными от нуля являлись две компоненты электрического поля и одна компонента магнитного (магнитное поле поперечно).

В данной работе получено аналитическое (а точнее, в квадратурах) решение модельной задачи как для ТМ-, так и для ТЕ-систем (с поперечным электрическим полем) при практически произвольной зависимости источников от радиальной переменной. Благодаря тому, что решения представляются в виде однократных интегралов по r, они справедливы при любых зависимостях от радиуса, при которых эти интегралы сходятся. Именно это кардинально отличает данный тест от результатов работ [2—4].

*Соловьёв Александр Александрович, ведущий научный сотрудник,
e-mail: AASolovev@vniief.ru

Постановка задачи

В качестве тестовой рассмотрим задачу о взрыве в бесконечной однородной непроводящей атмосфере. В сферической системе координат (r,θ,φ) с центром в точке взрыва уравнения Максвелла для векторов напряженности электрического $\vec{E}=(E_r,E_\theta,E_\varphi)$ и магнитного $\vec{H}=(H_r,H_\theta,H_\varphi)$ полей в гауссовой системе единиц имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\frac{\partial E_r}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}J_r=\frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(H_\varphi\sin\theta\right)}{\partial\theta}-\frac{\partial H_\theta}{\partial\varphi}\right);\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial E_\theta}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}J_\theta=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial\left(rH_\varphi\right)}{\partial r}\right);\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial E_\varphi}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}J_\varphi=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rH_\theta\right)}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right);
\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\frac{\partial H_r}{\partial t}=-\frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(E_\varphi\sin\theta\right)}{\partial\theta}-\frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}\right);\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial H_\theta}{\partial t}=-\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial\left(rE_\varphi\right)}{\partial r}\right);\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}=-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rE_\theta\right)}{\partial r}-\frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right).
\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь c — скорость света в пустоте; t — время; $\vec{J}=(J_r,J_\theta,J_\varphi)$ — плотность сторонних токов комптоновских электронов. В начальный момент времени, очевидно, $\vec{E}=\vec{H}=0$.

Далее будем полагать, что задача обладает аксиальной симметрией, а пространственно-временная зависимость плотности тока факторизована и имеет вид

$$\vec{J}=-J_*\varphi\left(r\right)f\left(\tau\right)\vec{j}\left(\theta\right),$$

где J_* — нормировочный множитель; $\varphi\left(r\right)$ — пространственная зависимость; $\vec{j}$ — угловая зависимость; $f\left(\tau\right)$ — зависимость от так называемого задержанного времени $\tau=t-r/c$. В качестве $f\left(\tau\right)$ используется достаточно естественная для задач расчета параметров ЭМИ "колоколообразная" зависимость с различной крутизной переднего и заднего фронтов:

$$f\left(\tau\right)=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha\tau}-e^{-\beta\tau}\right).$$

Именно такая форма зависимости (в виде суперпозиции экспонент) позволяет в явном виде проинтегрировать по времени уравнения Максвелла. Что касается угловой зависимости плотности тока, то она достаточно общепринята (см. [2—4]) и имеет вид

$$j_r=B_0-B_1\cos\theta;\qquad j_\theta=0;\qquad j_\varphi=A\sin\theta,$$

где A, B_0, B_1 — числовые коэффициенты. Небольшое отличие от упомянутых работ заключается в том, что в радиальную плотность тока добавлена изотропная составляющая.

Относительно пространственной зависимости пока никаких предположений делать не будем.

Для дальнейшего изложения удобнее перейти в уравнениях Максвелла (1), (2) к безразмерным переменным и функциям. Если за единицу времени принять некоторое значение t_0, а за единицу напряженности электромагнитного поля $E_0=H_0$, то координаты будут измеряться в единицах $r_0=$ $=ct_0$, а плотность тока — в $J_0=E_0/4\pi t_0$. Обезразмеренные уравнения Максвелла в задержанном времени с учетом аксиальной симметрии распадутся на две независимые системы:

– ТМ-система

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E_r}{\partial \tau} + J_r = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(H_\varphi \sin\theta\right)}{\partial\theta};\\
&\frac{\partial E_\theta}{\partial \tau} + J_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rH_\varphi\right)}{\partial r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial \tau};\\
&\frac{\partial H_\varphi}{\partial \tau} = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rE_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial E_\theta}{\partial \tau};
\end{aligned} \tag{3}$$

– ТЕ-система

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial H_r}{\partial \tau} = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(E_\varphi \sin\theta\right)}{\partial\theta};\\
&\frac{\partial H_\theta}{\partial \tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rE_\varphi\right)}{\partial r} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial \tau};\\
&\frac{\partial E_\varphi}{\partial \tau} + J_\varphi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rH_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \tau}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Решение ТЕ-системы

Рассмотрим сначала, как более простую, ТЕ-систему. Будем искать ее решение в виде

$$H_r = H\cos\theta; \qquad H_\theta = \frac{h}{r}\sin\theta; \qquad E_\varphi = \frac{e}{r}\sin\theta.$$

Тогда уравнения (4) перейдут в следующие:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = -\frac{2e}{r^2}; \qquad \frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{\partial e}{\partial \tau}; \qquad \frac{\partial e}{\partial \tau} = H + \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\partial h}{\partial \tau} - rj, \tag{5}$$

где введено обозначение $j = -AJ_*\varphi\left(r\right)f\left(\tau\right)$.

Для получения решения уравнений (5) применим к ним преобразование Лапласа по τ. Тогда для изображений функций (обозначены знаком "$\sim$") имеем

$$p\widetilde{H} = -\frac{2\widetilde{e}}{r^2}; \qquad p\widetilde{h} = \frac{\partial\widetilde{e}}{\partial r} - p\widetilde{e}; \qquad p\widetilde{e} = \widetilde{H} + \frac{\partial\widetilde{h}}{\partial r} - p\widetilde{h} - r\widetilde{j}. \tag{6}$$

Исключив из (6) $\widetilde{H}$, $\widetilde{h}$, получим уравнение второго порядка для $\widetilde{e}$

$$\frac{\partial^2\widetilde{e}}{\partial r^2} - 2p\frac{\partial\widetilde{e}}{\partial r} - \frac{2\widetilde{e}}{r^2} = pr\widetilde{j}. \tag{7}$$

Фундаментальные решения для соответствующего однородного уравнения имеют вид (см. п. 2.203 из [5])

$$\widetilde{e}_1 = \frac{pr+1}{r}; \qquad \widetilde{e}_2 = \frac{pr-1}{r}\exp\left(2pr\right),$$

а общее решение неоднородного уравнения —

$$\widetilde{e} = \Big(C_1^*\left(p\right) + C_1\left(r,p\right)\Big)\widetilde{e}_1\left(r,p\right) + \Big(C_2^*\left(p\right) + C_2\left(r,p\right)\Big)\widetilde{e}_2\left(r,p\right),$$

где $C_1^*\left(p\right)$ и $C_2^*\left(p\right)$ — пока не определенные коэффициенты. Зависимости $C_1\left(r,p\right)$ и $C_2\left(r,p\right)$ можно найти методом вариации постоянных. Они должны (см., например, [6]) удовлетворять условиям $C_1'\widetilde{e}_1 + C_2'\widetilde{e}_2 = 0$ и $C_1'\widetilde{e}\,'_1 + C_2'\widetilde{e}\,'_2 = pr\widetilde{j}$ (здесь штрихом обозначено дифференцирование по r). Проделав соответствующие вычисления, нетрудно получить

$$C_1' = -\frac{pr-1}{2p^2}\widetilde{j}; \qquad C_2' = \frac{pr+1}{2p^2}\widetilde{j}\exp\left(-2pr\right).$$

Таким образом, общее решение уравнения (7) можно записать в виде

$$\widetilde{e}\,(r,p) = \left(C_1^*\,(p) - \int^{r} \frac{px-1}{2p^2}\widetilde{j}\,(p,x)\,dx \right) \frac{pr+1}{r} + \\ + \left(C_2^*\,(p) + \int^{r} \frac{px+1}{2p^2}\widetilde{j}\,(p,x)\,\exp\,(-2px)\,dx \right) \frac{pr-1}{r}\,\exp\,(2pr)\,. \tag{8}$$

При $r \to \infty$ $\exp\,(2pr)\,/r \to \infty$, поэтому константу $C_2^*\,(p)$ необходимо положить равной нулю. Второе интегральное слагаемое в (8) с учетом наличия множителя $\exp\,(2pr)$ будет сходиться лишь при $x \geq r$, поэтому нижний предел интегрирования в нем следует положить равным $+\infty$. Нижний предел в первом интеграле можно взять равным нулю, а константу $C_1^*\,(p)$ определить из условия $\widetilde{e}\,(r=0,p) = 0$. Тогда

$$C_1^*\,(p) = -\int\limits_{\infty}^{0} \frac{px+1}{2p^2}\widetilde{j}\,(p,x)\,\exp\,(-2px)\,dx,$$

и окончательно получаем

$$\widetilde{e}\,(r,p) = -\Bigg[(pr+1)\int\limits_{0}^{r}(px-1)\,\widetilde{j}\,(p,x)\,dx + (pr-1)\int\limits_{r}^{\infty}(px+1)\,\widetilde{j}\,(p,x)\,\exp\Big(-2p\,(x-r)\Big)dx + \\ + (pr+1)\int\limits_{0}^{\infty}(px+1)\,\widetilde{j}\,(p,x)\,\exp\,(-2px)\,dx\Bigg]\frac{1}{2p^2r}. \tag{9}$$

Изображение Лапласа для временной зависимости $f\,(\tau) = \left(e^{-\alpha\tau} - e^{-\beta\tau}\right)$ есть $\widetilde{f}\,(p) = (p+\alpha)^{-1} - (p+\beta)^{-1}$. При подстановке этого выражения в (9) в первом слагаемом появляется функция $\widetilde{F}_\alpha^{(1)}\,(p) = \dfrac{(pr+1)\,(px-1)}{p^2\,(p+\alpha)}$ (и аналогичная ей функция $\widetilde{F}_\beta^{(1)}\,(p)$), обратным преобразованием Лапласа для которой будет (см. [7], п. 5.2.8)

$$F_\alpha^{(1)}\,(\tau) = \frac{\alpha\,(x-r)+1-\alpha\tau}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2 xr - \alpha\,(x-r) - 1}{\alpha^2}e^{-\alpha\tau}. \tag{10}$$

В остальных слагаемых возникают содержащие p выражения, с точностью до перемены знаков совпадающие с $\widetilde{F}_\alpha^{(1)}\,(p)$, но умноженные на $\exp\,(-bp)$, что эквивалентно сдвигу аргумента у оригинала с изменением его области определения. Таким образом, функции $\widetilde{F}_\alpha^{(2)}\,(p) = \dfrac{(pr-1)\,(px+1)}{p^2\,(p+\alpha)} \times \exp\Big(-2\,(x-r)\,p\Big)$ будет соответствовать оригинал

$$F_\alpha^{(2)}\,(\tau) = \frac{\alpha\,(r-x)+1-\alpha\tau_2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2 xr + \alpha\,(x-r) - 1}{\alpha^2}e^{-\alpha\tau_2}, \tag{11}$$

где $\tau_2 = \tau - 2\,(x-r) \geq 0$. Аналогичным образом, функции $\widetilde{F}_\alpha^{(3)}\,(p) = \dfrac{(pr+1)\,(px+1)}{p^2\,(p+\alpha)}\exp\,(-2xp)$ соответствует оригинал

$$F_\alpha^{(3)}\,(\tau) = \frac{\alpha\,(r+x)-1+\alpha\tau_3}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2 xr - \alpha\,(x+r) + 1}{\alpha^2}e^{-\alpha\tau_3}, \tag{12}$$

где $\tau_3 = \tau - 2x \geq 0$.

С учетом этих замечаний окончательное решение для E_φ можно записать в виде

$$E_\varphi(r,\theta,\tau) = \frac{AE_* \sin\theta}{r^2}\left(I_1 + I_2 + I_3\right), \tag{13}$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^r \varphi(x)\left(F_\alpha^{(1)} - F_\beta^{(1)}\right)dx; \quad I_2 = \int\limits_r^{r+\tau/2} \varphi(x)\left(F_\alpha^{(2)} - F_\beta^{(2)}\right)dx; \quad I_3 = \int\limits_0^{\tau/2} \varphi(x)\left(F_\alpha^{(3)} - F_\beta^{(3)}\right)dx; \tag{14}$$

$E_* = \dfrac{\alpha\beta}{2(\beta-\alpha)}J_*$; зависимости $F_\alpha^{(k)}$ задаются формулами (10)—(12), функции $F_\beta^{(k)}$ аналогичны $F_\alpha^{(k)}$ с заменой α на β.

Это решение имеет вполне понятный физический смысл. Первый интеграл в (14) описывает прямую волну (распространяющуюся в положительном направлении оси r), сгенерированную на интервале $(0,\ r)$ и достигшую к моменту времени $\tau = t - r/c$ точки наблюдения. Второму интегралу соответствует обратная волна, сгенерированная на интервале $(r,\ r+\tau/2)$ и распространяющаяся в отрицательном направлении оси r. Третий интеграл тоже описывает обратную волну, но сгенерированную на интервале $(0,\ \tau/2)$ и отразившуюся от начала координат $r = 0$. Можно также трактовать его и как описание прямой волны, пришедшей с "отрицательного" интервала $(-\tau/2,\ 0)$ оси r.

Решение ТМ-системы

Решение ТМ-системы (3) будем искать в виде

$$E_r = E_0 + E_1\cos\theta; \qquad E_\theta = \frac{e}{r}\sin\theta; \qquad H_\varphi = \frac{h}{r}\sin\theta. \tag{15}$$

Тогда для изотропной составляющей E_r имеем уравнение

$$\frac{\partial E_0}{\partial\tau} = -J_r^0 = B_0 J_*\varphi(r) f(\tau) = 2B_0 E_*\varphi(r)\left(e^{-\alpha\tau} - e^{-\beta\tau}\right),$$

решение которого, очевидно, есть

$$E_0 = 2B_0 E_*\varphi(r)\left(\frac{1-e^{-\alpha\tau}}{\alpha} - \frac{1-e^{-\beta\tau}}{\beta}\right). \tag{16}$$

Остальные составляющие (15) удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial E_1}{\partial\tau} = \frac{2h}{r^2} - J_r^1; \qquad \frac{\partial e}{\partial\tau} = \frac{\partial h}{\partial\tau} - \frac{\partial h}{\partial r}; \qquad \frac{\partial h}{\partial\tau} = \frac{\partial e}{\partial\tau} - \frac{\partial e}{\partial r} - E_1, \tag{17}$$

где $J_r^1 = B_1 J_*\varphi(r) f(\tau)$.

Применяя к (17) преобразование Лапласа, для изображений функций имеем

$$p\widetilde{E}_1 = \frac{2\widetilde{h}}{r^2} - \widetilde{J}_r^1; \qquad p\widetilde{e} = p\widetilde{h} - \frac{\partial\widetilde{h}}{\partial r}; \qquad p\widetilde{h} = p\widetilde{e} - \frac{\partial\widetilde{e}}{\partial r} - \widetilde{E}_1. \tag{18}$$

Исключая из (18) $\widetilde{E}_1$, $\widetilde{e}$, получаем уравнение второго порядка для $\widetilde{h}$

$$\frac{\partial^2\widetilde{h}}{\partial r^2} - 2p\frac{\partial\widetilde{h}}{\partial r} - \frac{2\widetilde{h}}{r^2} = -J_r^1,$$

которое лишь правой частью отличается от уравнения (7). Его решение будет иметь вид

$$\widetilde{h}\,(r,p) = \Bigg[(pr+1)\int\limits_0^r (px-1)\,\frac{\widetilde{J}_r^1\,(p,x)}{x}dx + (pr-1)\int\limits_r^\infty (px+1)\,\frac{\widetilde{J}_r^1\,(p,x)}{x}\exp\Big(-2p\,(x-r)\Big)dx +$$

$$+\,(pr+1)\int\limits_0^\infty (px+1)\,\frac{\widetilde{J}_r^1\,(p,x)}{x}\exp\left(-2px\right)dx\Bigg]\frac{1}{2p^3r}. \tag{19}$$

При подстановке в (19) явного выражения для $\widetilde{J}_r^1\,(p,x)$ в первом слагаемом появляется функция $\widetilde{G}_\alpha^{(1)}\,(p) = \dfrac{(pr+1)\,(px-1)}{p^3\,(p+\alpha)} \equiv \dfrac{1}{p}\widetilde{F}_\alpha^{(1)}\,(p)$. Деление изображения преобразования Лапласа на параметр p эквивалентно интегрированию оригинала. Поэтому обратным преобразованием для этой функции будет

$$G_\alpha^{(1)}\,(\tau) = \int\limits_0^\tau d\tau' F_\alpha^{(1)}\,(\tau') = \frac{\alpha\,(x-r)+1}{\alpha^2}\tau - \frac{\tau^2}{2\alpha} + \frac{\alpha^2 xr - \alpha\,(x-r)-1}{\alpha^3}\left(1-e^{-\alpha\tau}\right). \tag{20}$$

Аналогичным образом вычисляются функции

$$\begin{gathered} G_\alpha^{(2)}\,(\tau) = \int\limits_0^\tau d\tau' F_\alpha^{(2)}\,(\tau') = \frac{\alpha\,(r-x)+1}{\alpha^2}\tau_2 - \frac{\tau_2^2}{2\alpha} + \frac{\alpha^2 xr + \alpha\,(x-r)-1}{\alpha^3}\left(1-e^{-\alpha\tau_2}\right); \\ G_\alpha^{(3)}\,(\tau) = \int\limits_0^\tau d\tau' F_\alpha^{(3)}\,(\tau') = \frac{\alpha\,(x+r)-1}{\alpha^2}\tau_3 + \frac{\tau_3^2}{2\alpha} + \frac{\alpha^2 xr - \alpha\,(x+r)+1}{\alpha^3}\left(1-e^{-\alpha\tau_3}\right). \end{gathered} \tag{21}$$

Тогда решение можно представить в следующем виде:

$$H_\varphi\,(r,\theta,\tau) = \frac{h}{r}\sin\theta = \frac{B_1 E_* \sin\theta}{r^2}\left(J_1+J_2+J_3\right), \tag{22}$$

где

$$J_1 = \int\limits_0^r \frac{\varphi\,(x)}{x}\left(G_\alpha^{(1)} - G_\beta^{(1)}\right)dx;\;\; J_2 = \int\limits_r^{r+\tau/2} \frac{\varphi\,(x)}{x}\left(G_\alpha^{(2)} - G_\beta^{(2)}\right)dx;\;\; J_3 = \int\limits_0^{\tau/2} \frac{\varphi(x)}{x}\left(G_\alpha^{(3)} - G_\beta^{(3)}\right)dx. \tag{23}$$

Получив решение для азимутальной компоненты магнитного поля, с помощью уравнений (17), (18) нетрудно вычислить и компоненты электрического поля. Как следует из первого уравнения (17), радиальная компонента электрического поля имеет две составляющие — потенциальную и вихревую. Ее потенциальная составляющая, очевидно, есть

$$E_1^{pot} = -\cos\theta\int\limits_0^\tau J_r^1 d\tau' = -2B_1 E_* \varphi(r)\,\cos\theta\left(\frac{1-e^{-\alpha\tau}}{\alpha} - \frac{1-e^{-\beta\tau}}{\beta}\right). \tag{24}$$

Вихревую составляющую можно представить в виде, аналогичном (22), (23):

$$E_1^{vor} = \frac{2\cos\theta}{r^2}\int\limits_0^\tau h\left(r,\tau'\right)d\tau' = \frac{2B_1 E_* \cos\theta}{r^3}\left(K_1+K_2+K_3\right), \tag{25}$$

где

$$K_1 = \int\limits_0^r \frac{\varphi(x)}{x}\left(H_\alpha^{(1)} - H_\beta^{(1)}\right)dx;\;\; K_2 = \int\limits_r^{r+\tau/2} \frac{\varphi(x)}{x}\left(H_\alpha^{(2)} - H_\beta^{(2)}\right)dx;\;\; K_3 = \int\limits_0^{\tau/2} \frac{\varphi(x)}{x}\left(H_\alpha^{(3)} - H_\beta^{(3)}\right)dx. \tag{26}$$

Функции $H_{\alpha(\beta)}^{(k)}$ в (26) есть интегралы по времени от выражений (20), (21) для $G_{\alpha(\beta)}^{(k)}$

$$H_\alpha^{(1)}(\tau) = \int_0^\tau d\tau' G_\alpha^{(1)}(\tau') = \frac{\alpha(x-r)+1}{2\alpha^2}\tau^2 - \frac{\tau^3}{6\alpha} + \frac{\alpha^2 xr - \alpha(x-r) - 1}{\alpha^4}\left(\alpha\tau - 1 + e^{-\alpha\tau}\right);$$

$$H_\alpha^{(2)}(\tau) = \int_0^\tau d\tau' G_\alpha^{(2)}(\tau') = \frac{\alpha(r-x)+1}{2\alpha^2}\tau_2^2 - \frac{\tau_2^3}{6\alpha} + \frac{\alpha^2 xr + \alpha(x-r) - 1}{\alpha^4}\left(\alpha\tau_2 - 1 + e^{-\alpha\tau_2}\right);$$

$$H_\alpha^{(3)}(\tau) = \int_0^\tau d\tau' G_\alpha^{(3)}(\tau') = \frac{\alpha(x+r)-1}{2\alpha^2}\tau_3^2 + \frac{\tau_3^3}{6\alpha} + \frac{\alpha^2 xr - \alpha(x+r) + 1}{\alpha^4}\left(\alpha\tau_3 - 1 - e^{-\alpha\tau_3}\right).$$

Для азимутальной компоненты $\widetilde{e}$ с учетом (18), (19) имеем

$$\widetilde{e} = \widetilde{h} - \frac{1}{p}\frac{\partial\widetilde{h}}{\partial r} = \widetilde{h} - \frac{pr-1}{p^3 r}\int_r^\infty (px+1)\frac{\widetilde{J}_r^1(p,x)}{x}\exp\Big(-2p(x-r)\Big)dx + \left[\int_0^r (px-1)\frac{\widetilde{J}_r^1(p,x)}{x}dx - \right.$$
$$\left. - \int_r^\infty (px+1)\frac{\widetilde{J}_r^1(p,x)}{x}\exp\Big(-2p(x-r)\Big)dx + \int_0^\infty (px+1)\frac{\widetilde{J}_r^1(p,x)}{x}\exp(-2px)\,dx\right]\frac{1}{2p^4 r^2}. \qquad (27)$$

Обратное преобразование первых двух слагаемых в (27) с точностью до знака J_2 можно представить в виде, аналогичном (22):

$$E_\theta^{(1)}(r,\theta,\tau) = \frac{e_1}{r}\sin\theta = \frac{B_1 E_* \sin\theta}{r^2}(J_1 - J_2 + J_3). \qquad (28)$$

Последующие три слагаемых в (27) содержат члены вида $\widetilde{E}_\alpha^{(4)}(p) = \dfrac{px \pm 1}{p^4(p+\alpha)}$. Оригиналом функции $\widetilde{E}_\alpha^{(1)}(p) = \dfrac{px \pm 1}{p^1(p+\alpha)}$ является (см. п. 5.25 из [7])

$$E_\alpha^{(1)}(\tau) = \pm\frac{1}{\alpha} - \frac{\pm 1 - \alpha x}{\alpha}e^{-\alpha\tau}. \qquad (29)$$

Соответственно оригиналом для функции $\widetilde{E}_\alpha^{(4)}(p)$ будет трехкратный интеграл от (29) по времени. Тогда окончательно азимутальную компоненту электрического поля можно представить в виде $E_\theta = E_\theta^{(1)} + E_\theta^{(2)}$, где $E_\theta^{(1)}$ дается формулой (28), а $E_\theta^{(2)}$ — формулой

$$E_\theta^{(2)}(r,\theta,\tau) = \frac{B_1 E_* \sin\theta}{r^3}(L_1 - L_2 + L_3), \qquad (30)$$

где

$$L_1 = \int_0^r \frac{\varphi(x)}{x}\left(E_\alpha^{(4,1)} - E_\beta^{(4,1)}\right)dx; \qquad L_2 = \int_r^{r+\tau/2} \frac{\varphi(x)}{x}\left(E_\alpha^{(4,2)} - E_\beta^{(4,2)}\right)dx;$$
$$L_3 = \int_0^{\tau/2} \frac{\varphi(x)}{x}\left(E_\alpha^{(4,3)} - E_\beta^{(4,3)}\right)dx; \qquad (31)$$

$$E_\alpha^{(4,1)}(\tau) = -\frac{\tau^3}{6\alpha} + \frac{1+\alpha x}{\alpha^4}\left(\frac{\alpha^2\tau^2}{2} - \alpha\tau + 1 - e^{-\alpha\tau}\right);$$
$$E_\alpha^{(4,k)}(\tau) = \frac{\tau_k^3}{6\alpha} - \frac{1-\alpha x}{\alpha^4}\left(\frac{\alpha^2\tau_k^2}{2} - \alpha\tau_k + 1 - e^{-\alpha\tau_k}\right), \qquad (k=2,3). \qquad (32)$$

Таким образом, для данной тестовой задачи удается получить в виде однократных квадратур решение для всех трех компонент электрического поля. Подчеркнем еще раз, что полученные решения справедливы при любых зависимостях $\varphi(r)$ от радиуса, при которых соответствующие интегралы сходятся. В частности, они справедливы для практически важного случая точечного изотропного моноэнергетического источника гамма-квантов, когда

$$\varphi(r) = \frac{\exp(-r/\lambda)}{r^2}\chi(r)\,. \tag{33}$$

Здесь λ — пробег гамма-квантов, а $\chi(r)$ — *демпфирующая* функция, устраняющая нефизическую расходимость в нуле. Ее можно взять, например, в виде $\chi(r) = 1 - \exp\left(-\gamma\,(r/r_*)^3\right)$. Как видно из этой формулы, при малых r плотность тока будет пропорциональна r. Если значение параметра γ положить равным $\gamma = 2\ln 10 \approx 4{,}6$, то при $r = r_*$ (33) с 1 %-ной погрешностью аппроксимирует пространственную зависимость от точечного источника.

Трехмерный тест

Рассмотренное выше решение обладает аксиальной симметрией и поэтому является двумерным. Однако можно представить ситуацию, когда аксиальной симметрией будет обладать решение не в исходной системе координат, а в некоторой вспомогательной, повернутой относительно исходной на некий угол θ_H. Такой, например, может быть система координат, ориентированная по направлению локального геомагнитного поля. Решение же в исходной системе координат окажется существенно трехмерным, поэтому рассмотренный выше тест можно использовать и как трехмерный.

Итак, предположим, что в сферической системе координат (r', θ', φ'), наклоненной на угол θ_H по сравнению с исходной, решение описывается формулами, полученными в предыдущих разделах. Задача нахождения трехмерного аналитического решения сводится к определению формул пересчета из одной координатной системы в другую. По мнению автора, проще всего это сделать, вводя дополнительно две вспомогательные декартовы системы координат, связанные с соответствующими сферическими.

Пусть точка наблюдения в исходной сферической системе координат, полярная ось которой направлена вертикально вверх, а центр совпадает с источником гамма-квантов, имеет координаты (r, θ, φ). Тогда в декартовой системе координат (x, y, z), с началом в этой же точке и осью z, направленной вверх, будем иметь

$$x = r\sin\theta\,\cos\varphi; \qquad y = r\sin\theta\,\sin\varphi; \qquad z = r\cos\theta.$$

Во второй декартовой системе координат (x', y', z'), повернутой на угол θ_H вдоль оси y относительно первой, координаты этой точки будут таковы:

$$x' = x\cos\theta_H - z\sin\theta_H; \qquad y' = y; \qquad z' = x\sin\theta_H + z\cos\theta_H.$$

Наконец, в сферической системе координат (r', θ', φ') имеем

$$r' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} \equiv r; \qquad \sin\theta' = \frac{\rho'}{r}; \qquad \cos\theta' = \frac{z'}{r},$$

где $\rho' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$.

В этой системе координат, в соответствии с выводами предыдущих разделов, будут отличны от нуля компонента $E_{r'}$ электрического поля, описываемая формулами (16), (24)—(26), компонента $E_{\theta'}$, задаваемая формулами (28), (30)—(32), и компонента $E_{\varphi'}$ (формулы (13), (14)). В декартовой системе координат (x', y', z') будем соответственно иметь

$$E_{x'} = E_{r'}\frac{x'}{r} + E_{\theta'}\frac{z'}{r}\frac{x'}{\rho'} - E_{\varphi'}\frac{y'}{\rho'}; \qquad E_{y'} = E_{r'}\frac{y'}{r} + E_{\theta'}\frac{z'}{r}\frac{y'}{\rho'} + E_{\varphi'}\frac{x'}{\rho'}; \qquad E_{z'} = E_{r'}\frac{z'}{r} - E_{\theta'}\frac{\rho'}{r}. \tag{34}$$

В декартовой системе координат, ориентированной по вертикали,

$$E_x = E_{x'} \cos\theta_H + E_{z'} \sin\theta_H; \qquad E_y = E_{y'}; \qquad E_z = -E_{x'} \sin\theta_H + E_{z'} \cos\theta_H, \tag{35}$$

а в исходной сферической системе координат окончательно получаем

$$\begin{aligned} E_r &= E_x \sin\theta\, \cos\varphi + E_y \sin\theta\, \sin\varphi + E_z \cos\theta; \\ E_\theta &= E_x \cos\theta\, \cos\varphi + E_y \cos\theta\, \sin\varphi - E_z \sin\theta; \\ E_\varphi &= -E_x \sin\varphi + E_y \cos\varphi. \end{aligned} \tag{36}$$

Такими же формулами (34)—(36) следует руководствоваться и для задания угловой зависимости плотности тока в исходной системе координат, исходя из того, что в повернутой системе она должна иметь вид

$$j_{r'} = B_0 - B_1 \cos\theta'; \qquad j_{\theta'} = 0; \qquad j_{\varphi'} = A \sin\theta'.$$

Заключение

Получено точное решение модельной задачи об электромагнитных полях, генерируемых точечным источником гамма-квантов в однородной непроводящей атмосфере. Оно может быть использовано в качестве представительного теста для численных методик расчета нестационарных электромагнитных полей. Решение содержит ряд параметров, характеризующих пространственно-временную зависимость плотности объемных токов. Вариация этих параметров позволяет моделировать различные фазы протекания ЭМИ.

Список литературы

1. *Longmair C. L.* On the electromagnetic pulse produced by nuclear explosions // IEEE Trans. Ant. Prop. 1978. Vol. AP-26, No 1. P. 3—13.

2. *Козлов Н. И.* Точное решение одной задачи о распространении радиоимпульса в непроводящей среде // Численные методы решения задач математической физики. М.: Наука, 1966. С. 80—85.
Kozlov N. I. Tochnoye resheniye odnoy zadachi o rasprostranenii radioimpulsa v neprovodyashchey srede // Chislennye metody resheniya zadach matematicheskoy fiziki. M.: Nauka, 1966. S. 80—85.

3. *Козлов Н. И., Соколова Л. Н.* Получение ряда тестов для задачи о распространении радиоимпульса в непроводящей среде: Препринт № 53. М.: ИПМ АН СССР, 1985.
Kozlov N. I., Sokolova L. N. Poluchenie ryada testov dlya zadachi o rasprostranenii radioimpulsa v neprovodyashchey srede: Preprint № 53. M.: IPM AN SSSR, 1985.

4. *Голубев А. И., Исмаилова Н. А., Терёхин В. А.* Тесты для двумерных методик расчета нестационарных электромагнитных полей, создаваемых источниками гамма-излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1991. Вып. 1. С. 66—70.
Golubev A. I., Ismailova N. A., Teryekhin V. A. Testy dlya dvumernykh metodik raschyeta nestatsionarnykh elektromagnitnykh poley, sozdavaemykh istochnikami gamma-izlucheniya // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsesov. 1991. Vyp. 1. S. 66—70.

5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965.
Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam. M.: Nauka, 1965.

6. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.
Elsgolts L. E. Differentsialnye uravneniya i variatsionnoe ischislenie. M.: Nauka, 1969.

7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969.
Beytmen G., Erdeyi A. Tablitsy integralnykh preobrazovaniy. T. 1. Preobrazovaniya Furye, Laplasa, Mellina. M.: Nauka, 1969.

Статья поступила в редакцию 09.06.20.

THE EXACT SOLUTION TO ONE MODEL PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC FIELDS GENERATED BY A POINT SOURCE OF GAMMAS / A. A. Solovyev* (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region).

The problem of electromagnetic fields generated by outside volume currents simulating currents of Compton electrons due to the scattering of gammas from a point source in a homogeneous non-conducting atmosphere is considered. These currents are prescribed to be factorized with the specified angular and time dependences, while the dependence on the distance to the source may be practically arbitrary. The exact solution was found in the form of singlefold quadratures for each of the three electric field components. It can be used as a representative benchmark to verify the numerical techniques for nonstationary electromagnetic fields.

Keywords: Maxwell's equations, volume currents, Compton electrons, a homogeneous non-conducting medium, benchmarks for numerical techniques.

*Solovyev Aleksandr Aleksandrovich, leading scientist,
e-mail: AASolovev@vniief.ru