

РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ СТАЦИОНАРНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ВДОЛЬ КАНАЛА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

В. М. Ктиторов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Рассмотрена задача распространения плоской стационарной ударной волны вдоль слабо выделенного канала. Рассчитана форма фронта УВ внутри и вне канала. Задача решена методом малых возмущений. Рассмотрены каналы круглого (двумерная задача) и прямоугольного (трехмерная) сечений. Проведено сравнение результатов, показано их взаимное согласие. Полученное решение является точным и может поэтому служить в качестве теста для верификации трехмерных гидродинамических программ.

Ключевые слова: плоская стационарная ударная волна, тонкий канал круглого и прямоугольного сечения, малые стационарные возмущения, искривление фронта, задача Неймана.

Ниже будем рассматривать движение плоской (в отсутствие канала), стационарной ударной волны, распространяющейся вдоль однородно заполненного канала. Следуя [1, 2], рассмотрим подробно задачу в приближении малых возмущений (в случае, когда динамические свойства вещества внутри канала мало отличаются от аналогичных свойств окружающей среды).

Интерес к этой задаче диктуется ее уникальностью. Если выбрать сечение канала в виде прямоугольника, то удастся получить точное аналитическое решение поставленной задачи. И это несмотря на сложный трехмерный характер течения. Такие решения, как правило, оказываются полезными при отладке трехмерных программ.

Постановка задачи

Предположим, что на покоящуюся ударную волну набегают слева стационарный поток вещества вдоль оси z . Параллельно направлению потока в среде выделен тонкий бесконечный канал с произвольным поперечным сечением такой, что динамические свойства вещества внутри канала и вещества вне канала слабо отличаются между собой.

В качестве примера таких веществ можно взять: 1) холодный идеальный газ, в котором канал будет выделен небольшой добавкой к начальной плотности, 2) конденсированное вещество с нулевым давлением, в котором канал выделен небольшим изменением ударной адиабаты.

Будем считать ударную волну сильной и, соответственно, пренебрегать противодействием. Свойства вещества внутри канала могут при этом произвольным образом изменяться по сечению канала, но они не зависят от координаты z .

Целью работы является построение решения, описывающего стационарные возмущения, возникающие в таком течении внутри и вне канала, с соответствующими искривлениями фронта ударной волны.

Условия существования стационарного решения задачи

Существует серьезное ограничение на существование стационарного случая движения ударной волны вдоль канала. Ограничение связано с уравнением Бернулли, справедливым для стационарного течения [3]. Согласно этому уравнению в стационарном течении вдоль линии тока сохраняется величина I (здесь за w обозначена энтальпия):

$$I = w + \frac{v^2}{2} = \varepsilon + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const}, \quad (1)$$

причем эта величина сохраняется и на фронте ударной волны.

В нашем случае константа равна $\text{const} = \frac{D^2}{2}$, где скорость набегающего потока D одинакова для всех точек.

В случае, когда давление на фронте внутри канала меньше, чем давление снаружи, стационарное решение может и не существовать. Действительно, вещество внутри канала в этом случае должно изэнтропически сжиматься до наружного давления. Энтальпия w при этом также растёт согласно формуле

$$dw = \frac{dP}{\rho}. \quad (2)$$

Если конечное значение энтальпии превосходит при этом заданное на фронте значение I , то стационарное течение в данной системе оказывается невозможным.

Легко оценить величину параметров такого критического течения. Заменяем в (2) дифференциалы приращениями. Тогда внутри канала

$$\Delta w = \frac{\Delta P}{\rho}.$$

Для критического течения

$$\Delta w = \frac{(D-u)^2}{2}, \quad \Delta P_{\text{crit}} = P_{\text{out}} - P_{\text{in}}. \quad (3)$$

Пусть сжатие на фронте внутри канала равно δ . Тогда из (3) следует:

$$\frac{\Delta P_{\text{crit}}}{P_{\text{out}}} = \frac{1}{2\delta - 1}. \quad (4)$$

Заметим, что при выводе формулы (4) никаких предположений об уравнениях состояния веществ в задаче не делалось. Это свидетельствует об универсальности формулы (4).

Проверим ее для случая идеального газа без противодавления, когда формула приводит к появлению критического отношения значений начальной плотности внутри и вне канала:

$$\frac{\rho_{\text{in}}}{\rho_{\text{out}}}\Big|_{\text{crit}} = \frac{P_{\text{in}}}{P_{\text{out}}}\Big|_{\text{crit}} = \frac{2\delta - 2}{2\delta - 1}. \quad (5)$$

Получим:

В центре канала сразу за фронтом энтальпия равна

$$w = \frac{D^2}{2} - \frac{(D-u)^2}{2} = \frac{2\gamma}{(\gamma+1)^2} D^2.$$

После дожатия w становится равно $\frac{D^2}{2}$, т. е.

увеличивается в $\frac{(\gamma+1)^2}{4\gamma}$ раз. Давление, соответ-

ственно, увеличивается в $\left(\frac{(\gamma+1)^2}{4\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ раз. В то же

время оно должно увеличиться в $\frac{1}{\rho}$ раз. Отсюда

получаем:

$$\frac{\rho_{\text{in}}}{\rho_{\text{out}}}\Big|_{\text{crit}} = \left(\frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (6)$$

$$\frac{\rho_{\text{in}}}{\rho_{\text{out}}}\Big|_{\text{crit}} = 0.85 \text{ для } \gamma = \frac{5}{3},$$

$$\frac{\rho_{\text{in}}}{\rho_{\text{out}}}\Big|_{\text{crit}} = 0.91 \text{ для } \gamma = 1.4.$$

Для сравнения по формуле (5) получаем:

$$\frac{\rho_{\text{in}}}{\rho_{\text{out}}}\Big|_{\text{crit}} = \frac{2*4-2}{2*4-1} = \frac{6}{7} = 0.86 \text{ для } \gamma = \frac{5}{3},$$

$$\frac{\rho_{\text{in}}}{\rho_{\text{out}}}\Big|_{\text{crit}} = \frac{2*6-2}{2*6-1} = \frac{10}{11} = 0.91 \text{ для } \gamma = 1.4 -$$

в согласии с точным значением (6).

Суммируя, заметим, что когда давление на фронте внутри канала больше давления снаружи (ударная волна в канале «отстает» от основной), всегда реализуется стационарное течение. В противоположных случаях (когда ударная волна в канале опережает основную) может реализоваться [4] нестационарное течение с образованием растущего во времени конуса (или клина), опережающего основную ударную волну. Критические значения параметров задачи, определяющие тип решения, определяются универсальной формулой (4).

Стационарное решение задачи о течении вблизи канала в приближении малых возмущений

Запишем систему уравнений гидродинамики в системе координат, связанной с фронтом (c – скорость звука):

$$\begin{aligned}(\bar{v}\nabla)\bar{v} + \frac{\nabla P}{\rho} &= 0, \\ (\bar{v}\nabla)P - c^2(\bar{v}\nabla)\rho &= 0, \\ (\bar{v}\nabla)\rho + \rho(\nabla\bar{v}) &= 0.\end{aligned}\quad (7)$$

В отсутствие возмущений решение имеет вид:

$$\begin{aligned}v_z = v = D - u &= \text{const}, \\ v_x = v_y &= 0, \\ P = P_0 &= \text{const}, \\ \rho = \rho_0 &= \text{const}.\end{aligned}\quad (8)$$

Линеаризуем уравнения (7) вблизи решения (8) – представляем переменные в виде суммы и оставляем в уравнениях члены первого порядка малости. Получаем (здесь $v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}, P_1, \rho_1$ – малые возмущения соответствующих величин, не зависящие от времени):

$$\begin{aligned}(D - u)\frac{\partial}{\partial z}v_{1x} + \frac{\partial P_1}{\rho\partial x} &= 0, \\ (D - u)\frac{\partial}{\partial z}v_{1y} + \frac{\partial P_1}{\rho\partial y} &= 0, \\ (D - u)\frac{\partial}{\partial z}v_{1z} + \frac{\partial P_1}{\rho\partial z} &= 0, \\ (D - u)\frac{\partial}{\partial z}\rho_1 + \rho\left(\frac{\partial}{\partial z}v_{1x} + \frac{\partial}{\partial z}v_{1y} + \frac{\partial}{\partial z}v_{1z}\right) &= 0, \\ (D - u)\left(\frac{\partial}{\partial z}P_1 - c^2\frac{\partial}{\partial z}\rho_1\right) &= 0.\end{aligned}\quad (9)$$

Возмущения предполагаются малыми:

$$\left|\frac{P_1}{P_0}\right| \ll 1, \left|\frac{\rho_1}{\rho_0}\right| \ll 1, \left|\frac{v_1}{u}\right| \ll 1.\quad (10)$$

Вводя возмущение координаты фронта $R_1(x, y)$, запишем граничные условия для возмущений на фронте:

$$\begin{aligned}\frac{P_1}{P_0}\Big|_{z=R_1} &= \frac{P_1}{P_0}\Big|_{z=+0} = \mu(x, y), \\ \frac{v_{1x}}{u}\Big|_{z=R_1} &= \frac{v_{1x}}{u}\Big|_{z=+0} = \frac{\partial R_1}{\partial x}, \\ \frac{v_{1y}}{u}\Big|_{z=R_1} &= \frac{v_{1y}}{u}\Big|_{z=+0} = \frac{\partial R_1}{\partial y}.\end{aligned}\quad (11)$$

Граничные условия на бесконечности:

$$\begin{aligned}\frac{P_1}{P_0}\Big|_{z=+\infty} &= \frac{P_1}{P_0}\Big|_{x=\infty} = \frac{P_1}{P_0}\Big|_{y=\infty} = 0, \\ \frac{v_{1x}}{u}\Big|_{z=+\infty} &= \frac{v_{1x}}{u}\Big|_{x=\infty} = \frac{v_{1x}}{u}\Big|_{y=\infty} = 0, \\ \frac{v_{1y}}{u}\Big|_{z=+\infty} &= \frac{v_{1y}}{u}\Big|_{x=\infty} = \frac{v_{1y}}{u}\Big|_{y=\infty} = 0.\end{aligned}\quad (12)$$

Уравнения (9) вместе с граничными условиями позволяют ввести потенциал $\Phi_1(x, y, z)$ такой, что

$$\frac{v_{1x}}{u} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}, \quad \frac{v_{1y}}{u} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}, \quad \frac{P_1}{P_0} = -\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}.\quad (13)$$

Заметим, что Φ_1 не является потенциалом скоростей, поскольку

$$\frac{v_{1z}}{u} \neq \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}.\quad (14)$$

Другими словами, мы не предполагаем, что течение в целом является потенциальным (потенциальность течения, как известно [3], может нарушаться ударными волнами). Мы предполагаем только отсутствие вихрей, вращающихся вокруг оси z .

Тогда система уравнений (9) сводится к задаче Неймана для полупространства $z \geq 0$.

$$\begin{aligned}\left(\left(1 - \frac{(D-u)^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi_1 &= 0, \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\Big|_{z=+0} &= -\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\Big|_{z=+0} = \mu,\end{aligned}\quad (15)$$

$$\Phi_1\Big|_{z=+\infty} = \Phi_1\Big|_{x=\infty} = \Phi_1\Big|_{y=\infty} = 0.$$

Обозначим

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{(D-u)^2}{c^2}}.\quad (16)$$

Тогда решение задачи Неймана записывается в виде потенциала простого слоя:

$$\Phi_1(x, y, z \geq 0) = \frac{\beta}{2\pi} \iint \frac{\mu(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}}.\quad (17)$$

Возмущение z -координаты фронта записывается в виде:

$$\begin{aligned}R_1(x, y) = \Phi_1(x, y, z=0) &= \\ = \frac{\beta}{2\pi} \iint \frac{\mu(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}.\end{aligned}\quad (18)$$

Решение (17), (18) не предполагает какого-то определенного распределения свойств забивки канала в плоскости (x, y) – функция $\mu(x, y)$ может быть в значительной степени произвольной. Ограничения на ее вид – поведение на бесконечности – накладывает только требование сходимости интеграла.

Ниже мы детально рассмотрим частные случаи распределения свойств вещества внутри канала. А именно, мы рассмотрим случаи, когда канал является однородным. При этом сечение канала представляет собой: 1) круг радиусом a , 2) прямоугольник со сторонами $2a, 2b$.

Цилиндрический канал

Рассмотрим случай [1, 2], когда канал представляет собой однородный аксиально-симметричный цилиндр радиусом a . В этом случае мы подставляем в интеграл (18) выражение

$$\mu \equiv \mu(r) = \begin{cases} \mu_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}, \quad \mu_0 \ll 1. \quad (19)$$

Тогда вводим полные эллиптические интегралы $K(k), E(k)$:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sqrt{1-k^2 \sin^2 t}. \quad (20)$$

Получаем (18) в виде:

$$\frac{R_1}{\beta \mu_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{r' dr'}{r+r'} K\left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'}\right). \quad (21)$$

И окончательно:

$$\frac{R_1}{\beta a \mu_0} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} E\left(\frac{r}{a}\right), & r < a, \\ \frac{2}{\pi}, & r = a, \\ \frac{2}{\pi} \left(\frac{r}{a} E\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{r^2 - a^2}{ra} K\left(\frac{a}{r}\right) \right), & r > a. \end{cases} \quad (22)$$

Замечание о знаках: в нашей постановке ударная волна направлена противоположно направлению оси z , поэтому отрицательное значение R_1 (при $\mu_0 < 0$) соответствует опережению ударной волны внутри канала, положительное – отставанию.

На рис. 1 представлена величина возмущения z – координаты фронта, рассчитанная согласно (22). Единицей измерения радиуса является радиус канала a , для величины возмущения единицей служит $\beta a \mu_0$.

Рисунок представлен в виде, удобном для сравнения с численными расчетами. Ось z направлена вправо горизонтально, начало координат помещено в точку пересечения фронта с осью цилиндра. Мы учитываем, что в гидродинамических численных расчетах счетные области не являются неограниченными – всегда есть границы областей и соответствующие граничные условия, которые искажают значения возмущения «на бесконечности» – там, где в других условиях естественно было бы положить значение потенциала равным нулю. Поэтому в численных расчетах от нуля на бесконечности удобно отказаться и принять за нуль величину возмущений в другом месте (например, в центре канала, где эта величина экстремальна).

На два значения величины возмущения следует обратить внимание при анализе рисунка – на максимальное (в нашем случае это единица) и на его значение на границе канала (в нашем случае это $\frac{\pi - 2}{\pi} = 0.363$).

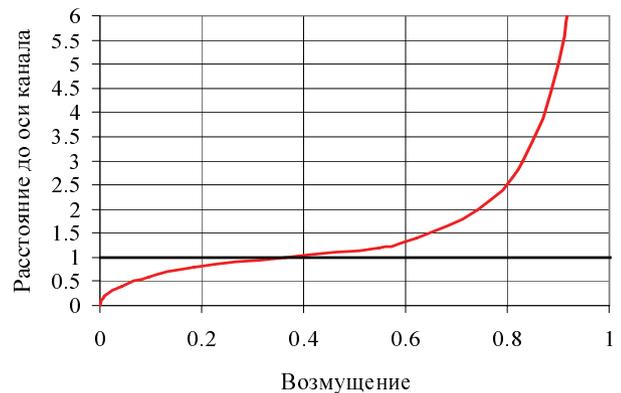


Рис. 1. Величина возмущения координаты фронта

Канал с сечением в виде прямоугольника

Пусть канал в сечении имеет вид прямоугольника, имеющего размер $2a$ по оси x и $2b$ – по оси y .

Тогда интеграл (18) имеет вид:

$$\frac{R_1(x, y)}{\beta \mu_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}. \quad (23)$$

Имеем тождество:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(x \operatorname{arsh} \frac{y}{x} + y \operatorname{arsh} \frac{x}{y} \right) = \\ = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Учитывая, что $F(x, 0) = F(0, y) = F(0, 0) = 0$ (25)

и подынтегральное выражение положительно и четно по x и по y , получаем при $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$:

$$F(\alpha, \beta) = \iint_{00}^{\alpha\beta} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (26)$$

Это означает, что двойной интеграл

$$I = \iint \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

по произвольной прямоугольной области сводится к алгебраической сумме значений функции $F(|x|, |y|)$, взятых в вершинах прямоугольника. Необходимо только правильно выбрать знаки значений $F(|x|, |y|)$.

Так, если точка $(0, 0)$ находится внутри прямоугольника, то для всех вершин выбирается знак плюс и т. д.

Используя это, приводим интеграл в (23) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi R_1(x, y)}{\beta \mu_0} &= \int_{-a-b}^a \int_{-b}^b \frac{dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = \\ &= \begin{cases} a > x > -a, & b > y > -b \\ F(a+x, b+y) + F(a-x, b+y) + F(a+x, b-y) + F(a-x, b-y), \end{cases} \\ &= \begin{cases} a > x > -a, & y > b \\ F(a+x, y+b) - F(a+x, y-b) + F(a-x, y+b) - F(a-x, y-b), \end{cases} \\ &= \begin{cases} x > a, & b > y > -b \\ F(x+a, b+y) + F(x+a, b-y) - F(x-a, b+y) - F(x-a, b-y), \end{cases} \\ &= \begin{cases} x > a, & y > b \\ F(x+a, y+b) - F(x-a, y+b) - F(x+a, y-b) + F(x-a, y-b). \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

Учитываем, что интеграл в (21) есть четная функция от x и y . Поэтому без ограничения общности можно положить: $x > 0, y > 0$.

Тогда все случаи в (21) можно объединить одной формулой:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi R_1(x, y)}{\beta \mu_0} &= F(x+a, y+b) + \\ &+ \operatorname{sgn}(a-x)F(|x-a|, y+b) + \\ &+ \operatorname{sgn}(b-y)F(x+a, |y-b|) + \\ &+ \operatorname{sgn}(a-x)\operatorname{sgn}(b-y)F(|x-a|, |y-b|). \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом, удается получить полное решение поставленной трехмерной задачи.

Следует заметить, что поставленная задача является линейной, и в силу этого решение ее является аддитивным – возмущение при движении вдоль двух каналов равно сумме возмущений, полученных при движении вдоль каждого из каналов в отдельности. Поэтому, когда поперечное сечение канала можно представить как комбинацию прямоугольных областей (например, сечение канала представляет собой крест или уголок), решение должно строиться аналогично (28) – как алгебраическая сумма значений $F(\alpha, \beta)$, взятых в соответствующих вершинах многоугольника (не обязательно выпуклого) с координатами $\alpha > 0, \beta > 0$.

Форма фронта в плоскости xz

Рассмотрим подробно величину возмущения в плоскости $y = 0$. Сравним полученный результат со случаем цилиндрического канала, для которого величина возмущения определяется формулой, которая следует из (22).

Примем, что $a = 1$, x и b измеряются в единицах a , R_1 – в единицах $\beta a \mu_0$.

Тогда из формул (28) следует, что фронт в плоскости $y = 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} R_1(0, 0) &= -\frac{2}{\pi} \left(\operatorname{arsh} b + b \operatorname{arsh} \frac{1}{b} \right), \\ R_1(x < 1, 0) &= -\frac{1}{\pi} \left((1+x) \operatorname{arsh} \frac{b}{1+x} + (1-x) \operatorname{arsh} \frac{b}{1-x} + \right. \\ &\left. + b \operatorname{arsh} \frac{1+x}{b} + b \operatorname{arsh} \frac{1-x}{b} \right), \\ R_1(x = 1, 0) &= -\frac{1}{\pi} \left(2 \operatorname{arsh} \frac{b}{2} + b \operatorname{arsh} \frac{2}{b} \right), \\ R_1(x > 1, 0) &= -\frac{1}{\pi} \left((1+x) \operatorname{arsh} \frac{b}{1+x} - (x-1) \operatorname{arsh} \frac{b}{x-1} + \right. \\ &\left. + b \operatorname{arsh} \frac{1+x}{b} - b \operatorname{arsh} \frac{x-1}{b} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

При больших значениях b ($b = \infty$) канал трансформируется в щель. В этом случае получаем:

$$\begin{aligned} b = \infty \\ R_1(x) - R_1(0) &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \ln 2 = 0,441, & x = 1; \\ \frac{1}{\pi} (1+x) \ln(1+x) + \frac{1}{\pi} (1-x) \ln|1-x|, & x \neq 1; \\ \frac{2 \ln x + 2}{\pi}, & x \gg 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

На рис. 2 представлены результаты вычислений по формулам (29), (30) величины $R_1(x, 0) - R_1(0, 0)$ при различных значениях параметра b . Для сравнения приведена аналогичная зависимость для цилиндрического канала.

При анализе кривых на рисунке обращает на себя внимание то, что для всех приведенных кривых форма фронта внутри канала практически одна и та же. Даже координаты пересечения фронта и границы канала почти совпадают. Так для цилиндрического канала величина возмущения на границе (см. формулу (22)) равна 0,363, для прямоугольного с $b = 1$ и $b = \infty$ – соответственно 0,356 и 0,441. В целом случай с $b \sim 1$ качественно не отличается от цилиндрического. Заметные отличия в форме фронта появляются только при больших значениях b ($b \sim \infty$, когда канал превращается в «щель»); в этом случае величина возмущения оказывается логарифмически расходящейся при больших значениях x .

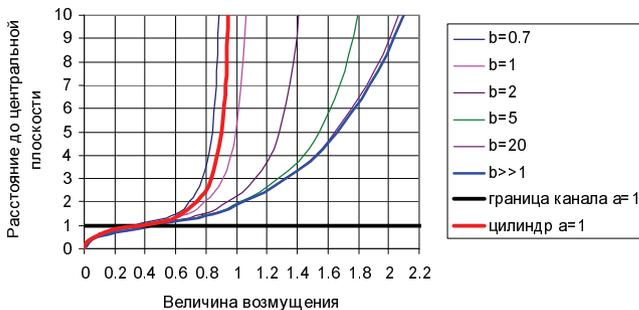


Рис. 2. Величина возмущения координаты фронта z . Единицей измерения расстояния до центральной плоскости является толщина канала a ; для величины возмущения единицей служит $\beta a c_0$

На рис. 3 представлены разрезы поверхности формы фронта плоскостями xz ($y = 0$) и yz ($x = 0$), позволяющие судить о трехмерности полученного решения. Разрезы, относящиеся к одному решению, окрашены одним цветом. При этом на рисунке

величина возмущения отложена по оси ординат и ноль величины возмущений соответствует бесконечному расстоянию от канала.

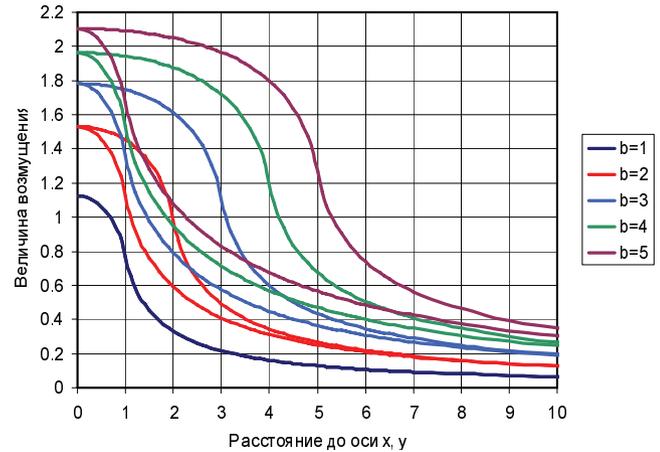


Рис. 3. Величина возмущения в плоскости xz, yz

В заключение заметим, что полученное решение трехмерной задачи является точным и может поэтому служить в качестве теста для верификации трехмерных гидродинамических программ.

Список литературы

1. Ктиторов В. М. Движение ударной волны в присутствии слабо выделенного канала // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1990. Вып. 2/2. С. 10–11.
2. Ктиторов В. М. Возмущения в стационарной ударной волне, распространяющейся вдоль канала // Хим. физика. 1995. Т. 14, № 2-3. С. 171–173.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
4. Артемьев В. И., Бергельсон В. И., Немчинов И. В. и др. Формирование новых структур газодинамических течений в тонких протяженных каналах перед фронтами ударных волн // Математическое моделирование. 1989. Т. 1, № 8. С. 1–11.

Статья поступила в редакцию 09.09.2020