

УДК 519.6

## ЗАДАЧА ОБ ОТРАЖЕНИИ ЦЕНТРИРОВАННОЙ ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ ОТ "МЯГКОГО" ПОРШНЯ

В. Н. Ногин

(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина", г. Снежинск Челябинской обл.)

Получено аналитическое решение задачи об отражении центрированной волны разрежения в идеальном газе от поршня, на котором задано постоянное давление. Волна разрежения отражается от поршня в виде волны сжатия, которая движется по спадающему профилю плотности и на некотором расстоянии от поршня превращается в ударную волну. Рассмотрена структура течения в отраженной волне для случаев, когда показатель адиабаты равен  $\gamma = \frac{2r+3}{2r+1}$ , где  $r$  — целое положительное число. Для значений  $r = 0, 1, 2$  решение представлено в виде аналитических формул. Найдены условия возникновения разрыва в решении. Показано, что в зависимости от значения давления на левой границе разрыв возникает либо в области общего решения, либо в отраженной простой волне. Полученное решение может быть использовано в качестве теста для численных методик.

*Ключевые слова:* центрированная волна разрежения, инвариант Римана, характеристика.

Хорошо известно решение задачи об отражении центрированной волны разрежения в идеальном газе от твердой стенки [1, 2]. В настоящей работе рассмотрена задача о взаимодействии центрированной волны разрежения в идеальном газе с поршнем, на котором задано постоянное давление (так называемый *мягкий* поршень). Эта задача интересна тем, что волна разрежения отражается в виде волны сжатия, которая движется по спадающему профилю плотности и на некотором расстоянии от поршня превращается в ударную волну.

Пусть в области  $0 < x < L$  начальная плотность вещества равна  $\rho_0$ , вещество покоится ( $u = 0$ ), начальное давление равно  $P_0$ . Уравнение состояния вещества — для идеального газа с показателем адиабаты  $\gamma = \frac{2r+3}{2r+1}$ , где  $r$  — целое положительное число. На правой границе задано постоянное давление  $P_0$  (мягкий поршень). В момент времени  $t = 0$  на левой границе давление скачком уменьшается до  $0 \leq P_1 < P_0$  и в дальнейшем поддерживается постоянным. Схематически картина течения для случая  $r = 0$  представлена на рис. 1.

На левой границе образуется центрированная волна разрежения I

$$x = (u + c)t = \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}c - \frac{2}{\gamma - 1}c_0 \right)t.$$

Головная характеристика этой волны движется с начальной скоростью звука  $c = \left( \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \right)^{1/2}$ , в момент  $t_0 = L/c_0$  она приходит на поршень и возникает отраженная волна сжатия II. Граница между центрированной волной разрежения и волной сжатия является  $C_-$ -характеристикой AB, траектория которой описывается уравнением [1]

$$x = -\frac{2}{\gamma - 1}c_0t + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}c_0t_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma+1}}. \quad (1)$$

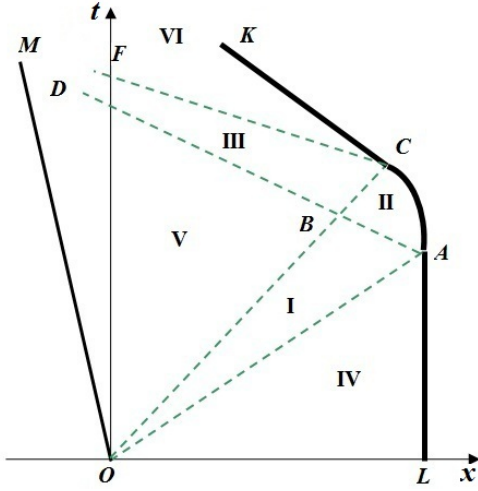


Рис. 1.  $(x, t)$ -диаграмма процесса отражения центрированной волны разрежения от поршня:  $LACK$  — траектория поршня;  $OM$  — левая граница; I — падающая центрированная волна разрежения; II — простая волна сжатия; III — область покоя; IV — область общего решения; V, VI — области постоянного течения

где  $i = \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{(2r + 1)c^2}{2}$  — теплосодержание;  $i_0 = \frac{(2r + 1)c_0^2}{2}$ . При выводе соотношений (3) существенно использовался тот факт, что производящая функция  $\psi = \text{const}$  на границе с центрированной простой волной [2]. В результате решение зависит от аргумента

$$z = \sqrt{\frac{i}{i_0}} - \frac{u}{\sqrt{2(2r + 1)i_0}} - 1 = \frac{c}{c_0} - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u}{c_0} - 1,$$

являющегося функцией инварианта Римана  $J_-$ . На линии сопряжения (1) общего решения с центрированной простой волной  $z = 0$ .

Перейдем к безразмерным переменным  $y = \frac{i}{i_0}$ ;  $v = \frac{u}{\sqrt{2(2r + 1)i_0}}$ ;  $\tau = \frac{t}{t_0}$ ;  $\chi = \frac{x}{\sqrt{2(2r + 1)i_0 t_0}}$ . Тогда соотношения (3) примут вид

$$F = \frac{\psi}{t_0 i_0} = \frac{\partial^r}{\partial y^r} f(\sqrt{y} - v - 1); \quad \tau = \frac{\partial F}{\partial y}; \quad \chi = v\tau - \frac{1}{2(2r + 1)} \frac{\partial F}{\partial v}. \quad (4)$$

Легко показать, что после дифференцирования функция  $F(y, v)$  представляется в виде ряда

$$F = \sum_{k=1}^r \frac{a_{k,r}}{y^{r-0,5k}} \frac{d^k}{dz^k} f(z) = \sum_{k=1}^r \frac{a_{k,r}}{y^{r-0,5k}} f^k, \quad (5)$$

коэффициенты в котором вычисляются по рекуррентной формуле

$$a_{k,r} = 0,5a_{k-1,r-1} - (r - 0,5k - 1)a_{k,r-1}; \quad a_{r,r-1} = a_{0,r-1} = 0. \quad (6)$$

В момент  $t_B = t_0 \left(\frac{c_0}{c_1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$ , где  $c_1 = \left(\gamma \frac{P_1}{\rho_0}\right)^{1/2}$ , характеристика  $AB$  пересекается с задней характеристикой центрированной волны разрежения, после чего зарождается простая волна сжатия III

$$x = (u - c)t + \varphi(u) = \left(\frac{\gamma + 1}{2}u - 2c_1 + c_0\right)t + \varphi(u). \quad (2)$$

В области V  $c = c_1$ ,  $u = \frac{2}{\gamma - 1}(c_1 - c_0)$ ; в области VI  $c = c_0$ ,  $u = \frac{4}{\gamma - 1}(c_1 - c_0)$ .

Отметим, что при  $P_1 = 0$  задняя характеристика центрированной волны разрежения  $OB$  совпадает с контактной границей  $OM$ , поэтому области III, V, VI исчезают.

Волна сжатия II описывается общим решением [1, 2], которое может быть представлено в виде

$$\psi = t_0 i_0^{r+1} \frac{\partial^r}{\partial i^r} f\left(\sqrt{\frac{i}{i_0}} - \frac{u}{\sqrt{2(2r + 1)i_0}} - 1\right); \quad (3)$$

$$t = \frac{\partial \psi}{\partial i}; \quad x = ut - \frac{\partial \psi}{\partial u},$$

Так, например, треугольная матрица коэффициентов  $A = [a_{k,j}]$  для  $r \leq 4$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & & \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & & \\ -\frac{15}{16} & \frac{15}{16} & -\frac{6}{16} & \frac{1}{16} & \\ & & & & \end{pmatrix}.$$

С учетом представления (5) второе и третье соотношения (4) запишутся в виде

$$\tau = \sum_{k=1}^{r+1} \frac{a_{k,r+1}}{y^{r-0,5k+1}} f^k; \quad \chi = v\tau + \frac{1}{2(2r+1)} \sum_{k=1}^r \frac{a_{k,r}}{y^{r-0,5k}} f^{k+1}. \quad (7)$$

На поршне выполняется условие  $c = c_0$ ;  $i = i_0 = \frac{(2r+1)c_0^2}{2}$ ;  $y = 1$ . Тогда из (7) следует, что координата  $X$  и скорость  $U$  поршня связаны уравнениями

$$\tau = \sum_{k=1}^{r+1} a_{k,r+1} f^k (-V); \quad \chi_p = \frac{X}{\sqrt{2(2r+1)i_0 t_0}} = V\tau + \frac{1}{2(2r+1)} \sum_{k=1}^r a_{k,r} f^{k+1} (-V); \quad (8)$$

$$V = \frac{U}{\sqrt{2(2r+1)i_0}}.$$

Дифференцируя второе уравнение (8) по  $\tau$ , получаем

$$\frac{d\chi_p}{d\tau} = V = V + \tau \frac{dV}{d\tau} - \frac{1}{2(2r+1)} \frac{dV}{d\tau} \sum_{k=1}^r a_{k,r} f^{k+2} (-V),$$

откуда, считая, что  $\frac{dV}{d\tau} \neq 0$ , имеем уравнение

$$\tau = \frac{1}{2(2r+1)} \sum_{k=1}^r a_{k,r} f^{k+2} (-V). \quad (9)$$

Комбинируя первое уравнение (8) и (9), получаем линейное однородное уравнение с вещественными коэффициентами для функции  $f(z)$

$$\sum_{k=1}^{r+2} \left( \frac{a_{k-2,r}}{\sqrt{2(2r+1)}} - a_{k,r+1} \right) f^k = 0. \quad (10)$$

Решение (10) будем искать в виде  $f'(z) = \exp(\lambda z)$ , при этом для величины  $\lambda$  получаем характеристическое уравнение

$$\sum_{k=1}^{r+2} \left[ \frac{a_{k-2,r}}{2(2r+1)} - a_{k,r+1} \right] \lambda^{k-1} = 0. \quad (11)$$

После нахождения корней уравнения (11) для функции  $f'$  получим выражение

$$f'(z) = \sum_{m=1}^{r+1} A_m \exp(\lambda_m z), \quad (12)$$

где  $A_m = \text{const}$ . Если имеются комплексные сопряженные корни уравнения (11)  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ , то соответствующие члены в (12) имеют вид

$$(A \cos \beta z + B \sin \beta z) \exp(\alpha z).$$

Для нахождения  $r + 1$  неизвестного значения  $A_m$  используем тот факт, что на сопряженной характеристике (1)  $z = 0$ , функция  $F(y, v) = 0$  [2]. Из вида соотношения (5) следует, что при этом должны выполняться условия  $f^k(0) = 0$  для всех  $1 \leq k \leq r$ . Кроме того, из условия на поршне  $U = 0$  при  $t = t_0$  получаем уравнение  $a_{r+1, r+1} f^{r+1}(0) = 1$ . Таким образом, для нахождения коэффициентов в (12) имеем линейную систему из  $r + 1$  уравнения, решение которой находится стандартными методами. Подстановка полученных коэффициентов в соотношения (7) завершает решение задачи.

Построив решение для области II, достаточно получить решение для простой волны сжатия в области III (см. рис. 1). На характеристике  $BC$  решения (2) и (3) должны совпадать. Для удобства представим уравнение (2) в безразмерном виде

$$\chi = \left( v - \frac{\sqrt{y}}{2r+1} \right) \tau + \varphi(v). \quad (13)$$

Из сравнения соотношений (4) и (13) следует

$$\varphi(v) = \frac{1}{2r+1} \left( \sqrt{y} \tau - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial v} \right) \Big|_{y=(2\frac{c_1}{c_0}-1-v)^2}. \quad (14)$$

После подстановки в (14) соотношений (7) получаем формулу для функции  $\varphi(v)$ :

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \frac{1}{2r+1} \left( \sum_{k=1}^{r+1} \frac{a_{k, r+1}}{y^{r-0,5k+0,5}} f^k(z) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \frac{a_{k, r}}{y^{r-0,5k}} f^{k+1}(z) \right), \\ y &= \left( 2\frac{c_1}{c_0} - 1 - v \right)^2, \quad z = 2 \left( \frac{c_1}{c_0} - 1 - v \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Так как отраженная от поршня волна является волной сжатия, в некоторый момент времени  $\tau_r$  характеристики пересекаются и решение становится неоднозначным. Очевидно, что в зависимости от значения давления  $P_1$  разрыв может образоваться как в области общего решения II, так и в простой волне сжатия III. Сделаем предположение, что разрыв в решении образуется на фронте волны сжатия на характеристике  $ABD$  (см. рис. 1). Это предположение выполняется для случая  $r = 0$  (см. далее) и подтверждается результатами численных расчетов. При этом должны выполняться условия [2]

$$\left( \frac{d\chi}{dv} \right)_{\tau} = 0; \quad z = 0.$$

Пусть разрыв возникает на участке характеристики  $AB$ . Дифференцируя второе и третье уравнения в (4), получаем

$$\left( \frac{d\tau}{dv} \right)_{\tau} = 0 = y' \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial y}; \quad \left( \frac{d\chi}{dv} \right)_{\tau} = 0 = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{1}{2(2r+1)} \left( y' \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right).$$

Исключая из этих уравнений производную  $y' = \frac{dy}{dv}$ , имеем уравнение

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial y} \right)^2 = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - 2(2r+1) \frac{\partial F}{\partial y} \right]. \quad (16)$$

Подставляя в (16) соотношения (5), получаем

$$\left( \sum_{k=1}^{r+1} \frac{a_{k, r+1}}{y^{r-0,5k+1}} f^{k+1} \right)^2 = \sum_{k=1}^{r+2} \frac{a_{k, r+2}}{y^{r-0,5k+2}} f^k \left[ \sum_{k=1}^r \frac{a_{k, r}}{y^{r-0,5k}} f^{k+2} - 2(2r+1) \sum_{k=1}^{r+1} \frac{a_{k, r+1}}{y^{r-0,5k+1}} f^k \right]. \quad (17)$$

Так как  $f^k(0) = 0$  для всех  $1 \leq k \leq r$ ,  $a_{r+1,r+1}f^{r+1}(0) = 1$ , формула (17) несколько упрощается:

$$\begin{aligned} \left( \frac{a_{r+1,r+2}}{a_{r+1,r+1}} + a_{r+2,r+2}f^{r+2}y^{0,5} \right) \left[ \frac{a_{r-1,r}}{a_{r+1,r+1}} - 2(2r+1) + a_{r,r}f^{r+2}y^{0,5} \right] = \\ = \left( \frac{a_{r,r+1}}{a_{r+1,r+1}} + a_{r+1,r+1}f^{r+2}y^{0,5} \right)^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя рекуррентные соотношения (6), можно получить решение уравнения (18) в виде

$$\sqrt{y} = \frac{c}{c_0} = \frac{(3r+1)a_{r,r} - 2a_{r-1,r}}{a_{r,r}^2 f^{r+2}(0)}. \quad (19)$$

Время и координата точки образования разрыва в решении определяются путем подстановки (19) в соотношения (7):

$$\tau_r = \frac{1}{y^{0,5(r+1)}}; \quad \chi_r = \frac{2r+2}{(2r+1)y^{0,5r}} - \frac{1}{y^{0,5(r+1)}}. \quad (20)$$

В случае, когда разрыв решения возникает в простой волне сжатия, момент разрыва определяется по формуле

$$\tau_r = - \left[ \frac{2r+1}{2(r+1)} \frac{d\varphi(v)}{dv} \right] \Bigg|_{v=\frac{c_1}{c_0}-1}. \quad (21)$$

После подстановки в (21) формулы (15), получаем

$$\tau_r = \frac{1}{r+1} \left( \frac{c_0}{c_1} \right)^r \left[ \frac{c_0}{c_1} \left( \frac{a_{r-1,r}}{a_{r,r}} - 2r \right) + a_{r,r}f^{r+2}(0) \right]. \quad (22)$$

Рассмотрим частные случаи.

1.  $r = 0$  ( $\gamma = 3$ ). Для этого случая описанная выше схема решения не подходит, поэтому он рассматривается отдельно. Из соотношений (4) имеем

$$F = \frac{\psi}{t_0 i_0} = f(\sqrt{y} - v - 1); \quad \tau = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad \chi = v\tau - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Из условий на поршне следует уравнение  $f''(-V) = f'(-V)$ , решение которого записывается в виде  $f(z) = A \exp(z) + B$ , где  $A$  и  $B$  — постоянные величины. Так как общее решение зависит только от производных функции  $f$ , можно приписать  $B$  значение  $B = 0$ . Значение  $A$  найдем из условия  $U = 0$  при  $t = t_0$  ( $A = 2$ ). Таким образом, общее решение для области II имеет вид

$$f = 2 \exp(\sqrt{y} - 1 - v); \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{y}} \exp(\sqrt{y} - 1 - v); \quad \chi = v\tau + \exp(\sqrt{y} - 1 - v),$$

или в переменных  $c, u$

$$\psi = t_0 c_0^2 \exp\left(\frac{c-u}{c_0} - 1\right); \quad \frac{t}{t_0} = \frac{c_0}{c} \exp\left(\frac{c-u}{c_0} - 1\right); \quad x = ut + t_0 c_0 \exp\left(\frac{c-u}{c_0} - 1\right) = (u+c)t. \quad (23)$$

Отметим, что из второго соотношения (23) при  $c = c_0$  следует логарифмическая зависимость скорости поршня от времени  $\frac{U}{c_0} = \ln \frac{t_0}{t}$ .

Для иллюстрации на рис. 2 построены в безразмерных переменных зависимости скорости звука от расстояния для нескольких моментов времени. Видно, что для достаточно больших значений времени происходит "опрокидывание" профиля отраженной волны, т. е. теряется непрерывность решения. Найдем момент образования разрывов в решении.

Из условия  $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_t = 0$  получаем  $\left(\frac{\partial c}{\partial u}\right)_t = -1$ ;  $\frac{c}{c_0} = \frac{1}{2}$ . Второе условие  $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial^2 u}\right)_t = 0$  не выполняется, поэтому разрыв образуется на фронте отраженной волны, являющемся характеристикой (1). Отсюда легко вычисляются время и координата точки, в которой образуется разрыв ( $t_r = 2t_0$ ,  $x_r = 0$ ), т. е. ударная волна образовалась в том же месте, где и падающая централизованная волна разрежения.

Проведенное рассмотрение справедливо в случае, если разрыв в решении происходит раньше момента образования простой волны сжатия ( $t_r < t_B$ ). Если  $t_r > t_B$  (при этом  $c_1 > c_0/2$ ), то течение в области общего решения гладкое, разрыв возникает в образовавшейся простой волне сжатия. Течение в простой волне сжатия III описывается уравнением (2), где  $c = 2c_1 - c_0 - u$ ;  $\varphi(u) = 2c_0 t_0 \exp\left(2\frac{c_1 - c_0 - u}{c_0}\right)$ .

Легко показать, что разрыв в простой волне возникает на границе с областью V (см. рис. 1), причем ударная волна образуется в тот же момент и в той же точке, что и в случае общего решения ( $t = 2t_0, x = 0$ ). Для иллюстрации на рис. 3 построены в безразмерных переменных зависимости скорости звука от расстояния для нескольких моментов времени в случае  $c_1 = 3/4c_0$ .

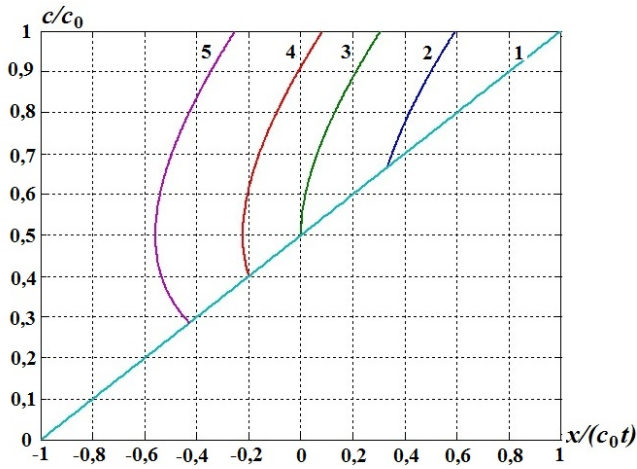


Рис. 2. Зависимость скорости звука от расстояния в отраженной волне,  $c_1 < c_0/2$ : 1 — падающая волна,  $t/t_0 = 1$ ; 2 —  $t/t_0 = 1,5$ ; 3 —  $t/t_0 = 2$ ; 4 —  $t/t_0 = 2,5$ ; 5 —  $t/t_0 = 3,5$

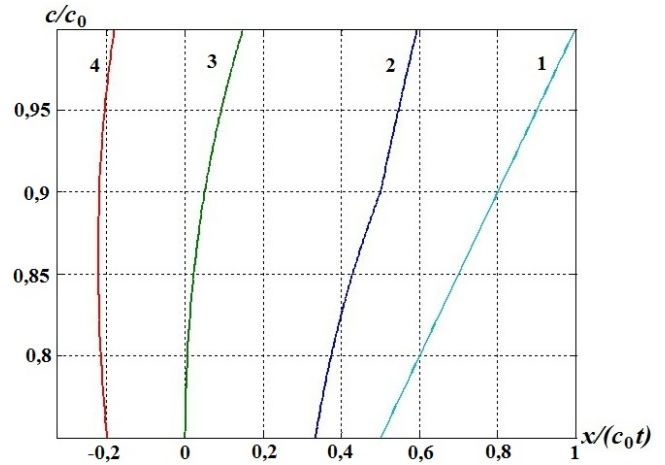


Рис. 3. Зависимость скорости звука от расстояния в отраженной волне,  $c_1 = 3/4c_0$ : 1 — падающая волна,  $t/t_0 = 1$ ; 2 —  $t/t_0 = 1,5$ ; 3 —  $t/t_0 = 2$ ; 4 —  $t/t_0 = 2,5$

2.  $r = 1$  ( $\gamma = 5/3$ ). Производя вычисления по алгоритму, изложенному выше, получаем характеристическое уравнение (11) в виде уравнения  $\lambda^2 - 3\lambda + 3 = 0$ , имеющего комплексные корни  $\lambda_1 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}$ . Соответственно решение (12) представляется в виде

$$f'(z) = \exp\left(\frac{3z}{2}\right) \left( A_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) + A_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) \right).$$

Из условий на граничной характеристике получаем  $f'(0) = 0$ ;  $\frac{1}{4}f''(0) = 1$ , откуда следует  $A_1 = 0$ ;  $A_2 = \frac{8}{\sqrt{3}}$ , т. е.

$$f'(z) = \frac{8}{\sqrt{3}} \exp\left(\frac{3z}{2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right),$$

где  $z = \sqrt{\frac{i}{i_0}} - \frac{u}{\sqrt{6i_0}} - 1 = \frac{c}{c_0} - \frac{u}{3c_0} - 1$ .

Используя формулы (7), получаем решение в переменных  $c, u$  в виде

$$\begin{aligned} \frac{t}{t_0} &= \frac{\sqrt{3}c_0^2}{c^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) + \left(1 - \frac{2c_0}{3c}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) \right] \exp\left(\frac{3}{2}z\right); \\ x &= ut + \frac{\sqrt{3}t_0c_0^2}{c} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) \right) \exp\left(\frac{3}{2}z\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Из первого уравнения (24) следует зависимость скорости поршня от времени

$$\frac{t}{t_0} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{U}{2\sqrt{3}c_0} + \frac{\pi}{6}\right) \exp\left(-\frac{U}{2c_0}\right).$$

Найдем момент образования разрыва в решении. Из (19) получаем

$$\sqrt{y} = \frac{c}{c_0} = \frac{4}{a_{1,1}f'''(0)} = \frac{2}{3}.$$

Из соотношений (20) находим время и координату разрыва:  $t = \frac{9}{4}t_0$ ;  $x = -\frac{3}{4}L$ .

Для простой волны сжатия по (15) получаем формулу для функции  $\varphi(v)$ :

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \frac{2}{\sqrt{3y}} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) + \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{y}}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) \right] \exp\left(\frac{3}{2}z\right), \\ y &= \left(2\frac{c_1}{c_0} - 1 - v\right)^2, \quad z = 2\left(\frac{c_1}{c_0} - 1 - v\right). \end{aligned}$$

В соответствии с (22) момент образования разрыва в решении определяется выражением

$$\tau_r = \frac{c_0}{2c_1} \left( a_{1,1}f'''(0) - 2\frac{c_0}{c_1} \right) = \frac{c_0}{c_1} \left( 3 - \frac{c_0}{c_1} \right).$$

3.  $r = 2$  ( $\gamma = 7/5$ ). Характеристическое уравнение (11) в данном случае имеет вид

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 15\lambda - 15 = 0.$$

Это уравнение имеет один действительный корень

$$\lambda_1 = 2 + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{1/3} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{1/3}$$

и два комплексных сопряженных корня

$$\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha = 2 - \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{1/3} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{1/3} \right], \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{1/3} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{1/3} \right].$$

Соответственно решение представляется в виде

$$f'(z) = A_1 \exp(\lambda_1 z) + \exp(\alpha z) \left( A_2 \cos(\beta z) + A_3 \sin(\beta z) \right).$$

Коэффициенты  $A_m$  определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0; \\ \lambda_1 A_1 + \alpha A_2 + \beta A_3 &= 0; \\ \lambda_1^2 A_1 + (\alpha^2 + \beta^2) A_2 &= 8. \end{aligned}$$

Окончательное решение представляется формулой

$$f'(z) = \frac{8 \left[ \exp(\lambda_1 z) + \exp(\alpha z) \left( \frac{\alpha - \lambda_1}{\beta} \sin(\beta z) - \cos(\beta z) \right) \right]}{\lambda_1^2 - \alpha^2 - \beta^2}.$$

Аналогичным образом можно получить решение для любого целого  $r$ . Однако корни характеристического уравнения (11) необходимо будет находить численно.

### Список литературы

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1955. *Stanjukovich K.P. Neustanovivshiesya dvizheniya sploshnykh sred. M.: Gostekhizdat, 1955.*
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. *Landau L. D., Lifshits E. M. Gidrodinamika. M.: Nauka, 1986.*

Статья поступила в редакцию 18.11.20.

THE PROBLEM OF A CENTERED RAREFACTION WAVE REFLECTED FROM A "SOFT" PISTON / V. N. Nogin (FSUE "Acad. E. I. Zababakhin RFNC-VNIITF", Snezhinsk, Chelyabinsk region).

An exact solution has been found for the problem of a centered rarefaction wave reflected in ideal gas from a piston with constant pressure on it. The rarefaction wave is reflected from the piston as a compression wave moving along the decreasing density profile and transforming into a shock wave at some distance to the piston. The flow structure in the reflected wave is considered for the ratio of specific heat  $\gamma = \frac{2r+3}{2r+1}$ , where  $r$  is a positive integer. For  $r = 0, 1, 2$  the solution is represented by analytical formulas. The conditions leading to a solution discontinuity have been found. It is shown that depending on the pressure at the left boundary such discontinuity occurs either in the general solution region, or in the reflected simple wave. The solution found can be used to test computational codes.

*Keywords:* a centered rarefaction wave, Riemann invariant, a characteristic.

---