

ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ И КОНФОРМНЫЕ МОДЕЛИ ГРАВИТАЦИИ

С. Ю. Седов*, М. В. Горбатенко

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Делается критический обзор некоторых современных представлений о темной материи и приводятся аргументы в пользу развития альтернативных по отношению к общей теории относительности моделей гравитации, учитывающих свойство локальной масштабной инвариантности.

Для трех конформно-инвариантных моделей гравитации приведены соотношения, объясняющие чисто геометрическим образом феномен темной материи в галактиках. Рассмотрены конформная теория Вейля с уравнениями четвертого порядка, конформная геометродинамика Горбатенко–Романова и конформная гравитация Вейля–Дирака.

Кратко рассмотрено объединение геометрического подхода на основе конформной гравитации и подхода на основе частиц к проблеме темной материи. Такое объединение названо гибридным подходом.

Ключевые слова: конформные обобщения гравитации, гравитация Вейля–Дирака, темная материя.

1. Введение

Хорошо известен астрономический факт: если учитывать только массу видимой материи, то на галактических расстояниях закон Ньютона не выполняется [1, 2]. В связи с этим (но не только) была предложена концепция недостающей темной материи [3]. В современной космологии считается, что доля темной материи (ТМ – dark matter, DM), о которой пойдет речь в статье, в общем балансе энергии во Вселенной составляет ~22 %, в то время как на видимую материю приходится ~4 % от всей энергии во Вселенной [1]. Феномен ТМ состоит в том, что она проявляет себя только через гравитационные взаимодействия, не вступает с видимой материей ни в какие другие известные взаимодействия, в результате чего материальных носителей ТМ обнаружить пока не удалось.

Проблема ТМ является актуальным предметом в космологии и астрофизике. Широко распространена точка зрения на природу ТМ, согласно которой ее носителями являются материальные частицы, например:

- суперчастицы (зеркальные частицы),
- аксионы,
- WIMP различного типа (слабо взаимодействующие материальные частицы),
- фермионы, захваченные первичными черными дырами (модель ТМ В. П. Незнамова [4, 5]).

И хотя до сих пор не удалось экспериментально обнаружить ни один из видов перечисленных частиц, основное направление в поисках объяснения ТМ сводится к поиску частиц ТМ.

Мы, как и ряд других авторов (см. для примера работы [12–14, 16–18, 20–26]), предполагаем, что феномен ТМ на галактических масштабах можно объяснить в рамках конформных теорий гравитации как геометрический эффект. В связи с этим в статье рассмотрены некоторые подходящие модели.

В статье делается критический обзор некоторых современных представлений о темной материи и приводятся аргументы в пользу развития альтернативных по отношению к общей теории относительности (ОТО) моделей гравитации, учитывающих свойство локальной масштабной инва-

* Email: SerWhiteS@yandex.ru

риантности. Поскольку затронутая тема весьма обширна, выборка рассмотренных моделей гравитации и ссылки на статьи в этой небольшой публикации охватывают лишь очень малую часть имеющегося материала.

2. О темной материи в галактиках

В космологии и астрофизике общепринята гипотеза существования ТМ [1, 2], которая введена как для объяснения ротационных кривых звезд в галактиках, так и для объяснения динамики эволюции Вселенной. Эта материя вносит основной вклад в массу многих спиральных галактик, составляя иногда более 90 % массы, располагаясь в основном за пределами видимого галактического диска. Характерные радиусы распределения ТМ много больше радиусов светящихся квазисферических барионных сгустков в центре некоторых галактик. Эти сгустки называются балджами (bulges). Балдж – центральный яркий объект в наблюдениях спиральных и линзообразных галактик. Размер его колеблется от сотен парсек до нескольких килопарсек. Отметим, что перевод светимости галактики L в массу галактики M осуществляется по формуле:

$$(M/L)L = M = NM_{\odot}. \quad (1)$$

Здесь N – число звезд в галактике, M_{\odot} – масса Солнца. Зависимость масса–светимость (M/L) предполагается известной.

Поведение ТМ в галактиках пока не понято. Распределение ТМ достаточно равномерно в той области, где она находится. И концентрируется она в основном не там, где имеется барионное светящееся вещество, т. е. в не центре, а на периферии Галактики. Это следует из распределения скоростей вращения звезд около центра галактик. В литературе есть множество данных по ротационным кривым галактик, т. е. зависимостям $v(r)$, где v – скорость вещества в галактике, r – расстояние от центра галактики. См., например, [1–3, 6].

В расчетах обычно вводится оптический радиус галактики R_0 , который определяется как радиус, из которого излучается 83 % интегрального потока света [2]. Из наблюдений следует, что величина логарифма плотности ТМ $\lg \rho^{(DM)}$ – приблизительно линейная убывающая функция аргумента $\frac{r}{R_0}$ [1], и в центре галактик эта величина конечна.



Fig. 5.5. A V-band image of Sa galaxy M104, the ‘Sombrero’ (NGC 4594): this is a luminous galaxy with $L_V \approx 8 \times 10^{10} L_{\odot}$, about 10Mpc away. Note the large bulge and numerous globular clusters – A. Cole, WIYN telescope.

Рис. 1. Галактика M104 (из [3])

Общепринятое стандартное представление ТМ (так называемая модель темной холодной материи – CDM) в виде пыли из массивных нерелятивистских и не барионных частиц приводит к проблеме каспов (cusps). Каспы – это полученные в численном решении сингулярности $\sim \frac{1}{r}$ в радиальном распределении плотности темной материи $\rho^{(DM)}(r)$ ближе к центру [1, 6].

Продемонстрируем здесь простым примером, заимствованным из [1], появление каспа. Учтем гравитационное равновесие в галактике с учетом теплового давления среды:

$$p = \rho \sigma^2, \quad \sigma^2 = \langle v^2 \rangle, \quad (2)$$

где p – давление материи, v – скорость материи в галактике, ρ – плотность материи, σ – средний квадрат скорости. Тогда выполняется соотношение

$$\frac{dp}{\rho dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}. \quad (3)$$

Здесь $M = M(r)$ – масса сферической подсистемы галактики в зависимости от расстояния. Примем $\sigma(r) = \sigma_0 = \text{const}$ (изотермическое приближение) и обозначим

$$k_0 = \frac{4\pi G}{\sigma_0^2} = \text{const}. \quad (4)$$

Тогда из (2) и (3) получаем уравнение:

$$\frac{1}{\rho r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 d\rho}{\rho dr} \right) = -k_0. \quad (5)$$

Решение (5) легко находится:

$$\rho(r) = \frac{2}{k_0 r^2}, \quad (6)$$

то есть

$$\rho(r) \sim r^{-\delta}, \quad \delta = 2. \quad (7)$$

В центре получилась сингулярность плотности материи – касп. Сходные проблемы имеют место и в более сложных моделях холодной тёмной материи.

Однако, как сказано ранее, астрономические наблюдения не обнаруживают никаких каспов в своем распределении. Эта проблема, насколько нам известно, пока удовлетворительно не решена. Есть только различные предположения, что барионная материя как-то вытесняет холодную тёмную материю в ядрах галактик.

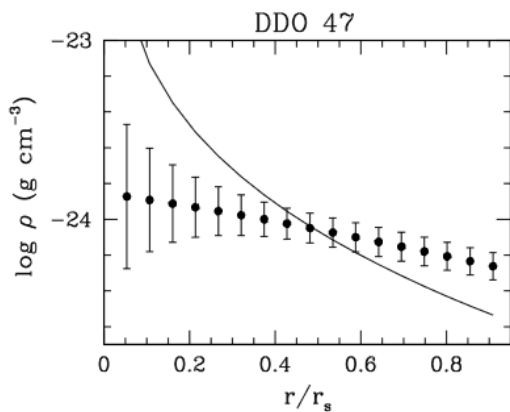


Рис. 2. Наблюдаемое (отрезки) и предсказанное (сплошная линия) распределения темной материи при $r < r_s$. Галактика DDO 47 (из [6])

Рисунок 2 – пример того, как должно себя вести распределение ТМ вблизи центра галактик и как оно себя ведет согласно численным расчетам. Видно резкое противоречие ожиданий и расчетов. Здесь r_s – это характерный радиус распределения материи в галактике, $r_s \approx 2,2R_0$. Таким образом, существует конфликт между численным моделированием и астрономическими наблюдениями. Некоторые авторы считают, что следует изменить свойства ТМ. Для этого предлагаются разновидности: тёплая тёмная материя, взаимодействующая сама с собой тёмная материя, смесь холодной и горячей тёмных материй в нужной пропорции и др. [7].

Решить проблему каспов можно, например, введя каким-то образом «разогрев» темной материи в центре галактик, т. е. увеличить дисперсию ско-

ростей частиц темной материи в центре галактики. Но наличие «теплой» темной материи либо «холодной», в которую в нужной пропорции подмешана «горячая» темная материя, является достаточно искусственной гипотезой, требующей «тонкой» подстройки начальных данных в космологии [1].

Итак, на масштабах галактик (и менее) гипотеза холодной тёмной материи сталкивается с существенными проблемами. Концепция ТМ, используемая для описания Вселенной на раннем этапе эволюции, содержит ряд предположений [1]:

- ТМ состоит из частиц, свойства которых не совпадают ни с какими из известных частиц;
- неясность относительно уравнений, которые описывают динамику ТМ. Вследствие этого – некоторый волюнтаризм в предсказании распределения ТМ во Вселенной;
- предположение о том, что ТМ не взаимодействует сама с собой;
- «прохладность» ТМ;
- скорости частиц в гравитационных потенциальных ямах, имеющих повышенную температуру, достаточно малы;
- несмотря на превышение массы ТМ над массой обычной материи в ~ 5 раз и на гравитационное взаимодействие, которому подвержена ТМ, отсутствует её коллапсирование (ни с собой, ни с обычной материей).

3. Три конформные модели гравитации

Поясним, что мы имеем здесь в виду под конформной гравитацией (КГ). Конформная теория гравитации (КТГ) в общем смысле – это теория, в которой соблюдается инвариантность уравнений относительно вейлевского (локального масштабного) преобразования метрики

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow \Omega^2(x)g_{\alpha\beta}(x). \quad (8)$$

Вводится такая инвариантность может различными способами, поэтому имеются разные конформные модели гравитации. Ниже мы рассмотрим всего три варианта.

3.1. КТГ Вейля – Мангейма

В конформной гравитации Вейля четвертого порядка [8, 9] инвариантность относительно конформных преобразований достигается путем использования лагранжиана, квадратичного по тензору Вейля или тензору Римана. В КГ Вейля четвертого

порядка [9] основой является риманово многообразие в качестве пространства-времени, и задано действие для гравитационного поля в форме

$$S = -\alpha \int d^4x \sqrt{-g} C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (9)$$

где тензор Вейля $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ определяется через тензор Римана

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2} (g_{\alpha\mu} R_{\beta\nu} + g_{\beta\nu} R_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu} R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu} R_{\alpha\nu}) + \frac{1}{6} R (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}). \quad (10)$$

Уравнения для гравитационного поля без материи называются уравнениями Баха:

$$B_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}^{(1)} + B_{\alpha\beta}^{(2)} = 0, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta}^{(1)} &= -R_{\alpha\beta}{}^{;\nu}{}_{;\nu} + R^{\nu}{}_{\alpha;\beta\nu} + R^{\nu}{}_{\beta;\alpha\nu} - \\ &\quad - \frac{2}{3} R_{\alpha;\beta} + \frac{1}{6} g_{\alpha\beta} R^{;\nu}{}_{;\nu}, \\ B_{\alpha\beta}^{(2)} &= \frac{2}{3} R R_{\alpha\beta} - 2 R_{\alpha\nu} R^{\nu}{}_{\beta} - \\ &\quad - \frac{1}{6} R^2 g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (12)$$

Если ввести конформно-инвариантный тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$, то уравнения КТГ имеют вид

$$4\alpha B_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}, \quad (13)$$

где α – безразмерный коэффициент связи (параметр теории КТГ Вейля). Этот вариант КГ в литературе называется конформной вейлевской гравитацией четвертого порядка, но мы будем называть его для краткости КТГ Вейля–Маннгейма, так как Ф. Маннгейм внес значительный вклад в обоснование и популяризацию этой версии КГ начиная с работы [9], см. также [16–18, 20, 25]. Возможно, корректнее этот вариант было бы назвать КТГ Вейля–Баха–Маннгейма.

3.2. КТГ Горбатенко–Романова

В другой разновидности КГ, которую мы будем здесь называть конформной геометродинамикой Горбатенко–Романова [10], инвариантность относительно конформных преобразований достигается путем расширения геометрии Римана до геометрии Вейля. В КГ Горбатенко–Романова используется минимальный способ обеспечения конформной инвариантности с помощью включения в динамические уравнения в явном виде векторного

поля Вейля A_α . При конформных преобразованиях синхронно преобразуются метрика, вектор Вейля и лямбда-член следующим образом:

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow e^{2\sigma} g_{\alpha\beta}, \quad A_\alpha \rightarrow A_\alpha + \frac{\partial\sigma}{\partial x^\alpha}, \quad \lambda \rightarrow \lambda e^{-2\sigma}. \quad (14)$$

Если записать уравнения ОТО в обобщенном виде

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R &= -2A_\alpha A_\beta - g_{\alpha\beta} A^2 - \\ &\quad - 2g_{\alpha\beta} A^{\nu}{}_{;\nu} + A_{\alpha;\beta} + A_{\beta;\alpha} + g_{\alpha\beta} \lambda, \end{aligned} \quad (15)$$

то вид этих уравнений будет инвариантен относительно преобразований (8). Уравнения (15) и являются уравнениями КГ. Если ввести тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$, то уравнения КГ Горбатенко–Романова примут следующий вид

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R &= -2A_\alpha A_\beta - g_{\alpha\beta} A^2 - \\ &\quad - 2g_{\alpha\beta} A^{\nu}{}_{;\nu} + A_{\alpha;\beta} + A_{\beta;\alpha} + g_{\alpha\beta} \lambda + T_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (16)$$

3.3. КТГ Вейля–Дирака

В третьем варианте КГ, предложенной Дираком [11], инвариантность действия гравитационного поля относительно конформных преобразований достигается при совместном использовании скалярного поля ϕ и вектора Вейля k_μ . При этом пространство-время является многообразием Вейля. Этот вариант называется КТГ Вейля–Дирака. Здесь мы приведем модификацию теории Дирака [14]. Действие Вейля–Дирака записывается в виде:

$$\begin{aligned} S[\phi, k_\mu] &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + R\phi^2 + \alpha \phi_{;\mu} \phi^{;\mu} + \right. \\ &\quad \left. + (\alpha - 6)\phi^2 k_\mu k^\mu + 2 \cdot (\alpha - 6)\phi k^\mu \phi_{;\mu} + 6(\phi^2 k^\mu)_{;\mu} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнения поля выглядят так:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{\phi^2} \{ H_{\mu\nu} + E_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu} \},$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu k_\nu - \partial_\nu k_\mu, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} &= \left(-2 + \frac{\alpha}{2} \right) g_{\mu\nu} \phi_{;\alpha} \phi^{;\alpha} + (2 - \alpha) \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \\ &\quad - 2g_{\mu\nu} \phi \left(\phi^{;\alpha} \right)_{;\alpha} + 2\phi \phi_{\mu;\nu}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} g^{\alpha\beta}, \quad (20)$$

$$\Theta_{\mu\nu} = (\alpha - 6) \left\{ \varphi^2 (-k_\mu k_\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} k_\alpha k_\alpha) - \varphi (k_\mu \varphi_\nu + k_\nu \varphi_\mu - k_\alpha \varphi^\alpha g_{\mu\nu}) \right\}. \quad (21)$$

Если учесть и тензор материи $T_{\mu\nu}$, то уравнения поля имеют вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{\varphi^2} \{ H_{\mu\nu} + E_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu} + T_{\mu\nu} \}. \quad (22)$$

4. Аналог решения Шварцшильда в КГ

4.1. КТГ Вейля–Мангейма

Центрально-симметричное статическое решение (ЦСС решение) уравнений КТГ Вейля четвертого порядка впервые получено Мангеймом и Казанасом в работе [9]. Решение может быть записано в виде

$$ds^2 = -e^\gamma dt^2 + e^{-\gamma} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (23)$$

где

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (24)$$

Функция $e^\gamma \equiv B$ получена в виде

$$e^\gamma = B(r) = (1 - 3\beta\gamma) - \frac{\beta(2 - 3\beta\gamma)}{r} + \gamma r - \kappa r^2. \quad (25)$$

Входящие в решение параметры β , γ , κ имеют размерности см, 1/см, 1/см² соответственно. Если сравнить функцию (25) с той функцией, которая получается в решении Шварцшильда в пространстве де Ситтера, т. е. с функцией

$$\left(e^\gamma \right)_{\text{де Ситтер}} = 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{\lambda}{3} r^2, \quad (26)$$

то видны следующие отличия:

- первый член в функции (25) в общем случае не равен единице,
- в функции (25) появился линейный по радиальной переменной член,
- лямбда-член λ , который в решении Шварцшильда в пространстве де Ситтера является отрицательным, заменен на -3κ (при выбранных здесь сигнатуре и определениях тензора Риччи и тензора энергии-импульса).

4.2. КТГ Горбатенко–Романова

В работе [13] показано, что аналогичное выражение для метрики в центрально-симметричном случае получается при решении уравнений КТГ

Горбатенко–Романова [10], но полной эквивалентности решений КТГ Вейля четвертого порядка и КТГ Горбатенко–Романова нет. Решение уравнений КТГ Горбатенко–Романова имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} ds^2 = & - \left((BC - 1) - \frac{B(BC - 2)}{3r} - Cr + Dr^2 \right) dt^2 + \\ & + \frac{dr^2}{\left((BC - 1) - \frac{B(BC - 2)}{3r} - Cr + Dr^2 \right)} + \\ & + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \\ A = & \frac{1}{(B - r)}, \quad \lambda = \frac{-1 - BC + 3B^2 D}{(B - r)^2}. \end{aligned} \right. \quad (27)$$

Квадрат интервала в (27) при переобозначении констант интегрирования может быть сделан похожим на квадрат интервала для метрики (23)–(25). Для этого величины A , B , C , D свяжем с параметрами β , γ , κ соотношениями

$$A = \frac{1}{3\beta - \frac{2}{\gamma} - r}, \quad B = 3\beta - \frac{2}{\gamma}, \quad C = -\gamma, \quad D = -\kappa. \quad (28)$$

В выражение (27) включено выражение для вектора Вейля.

4.3. КТГ Вейля–Дирака

Теперь рассмотрим третью конформную теорию гравитации – теорию Вейля–Дирака [11, 12, 14]. В ней квадрат интервала записывается в виде:

$$ds^2 = -e^\nu d\tau^2 + e^\lambda dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad e^\nu = \frac{\varphi_\tau^2}{\beta^2 \varphi^4} e^{-\lambda}, \quad (29)$$

$$e^{-\lambda} = \frac{1}{2} - \frac{m}{\varphi r} + \Delta, \quad \Delta^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{\varphi r} \right)^2 + \beta^2 \varphi^2 r^2. \quad (30)$$

Здесь m – параметр, β – параметр, $c=1$. Скаляр φ – произвольная функция, зависящая только от времени τ в случае центрально-симметричной метрики.

Чтобы перейти к сравнению с астрономическими наблюдениями, нужно фиксировать калибровку измеряемых величин (времени, расстояния и массы). Для этого в [14] интервал времени dt выбран как

$$dt = \frac{d\varphi(\tau)}{\beta\varphi(\tau)} d\tau. \quad (31)$$

При этом фиксируется конкретная зависимость скаляров

$$\varphi(t) = \varphi_0 \exp(\beta t), \quad m = m_0 \varphi \quad (32)$$

и форма квадрата интервала

$$ds^2 = -e^{-\lambda} dt^2 + e^{2\beta t} \left(e^{\lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right),$$

$$e^{-\lambda} = \frac{1}{2} - \frac{m_0}{r} + \Delta, \quad \Delta^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{m_0}{r} \right)^2 + \beta^2 \varphi^2 r^2. \quad (33)$$

Величина m_0 при данной фиксированной калибровке становится наблюдаемой в экспериментах массой. Эмпирическая величина β выбирается из астрономических наблюдений. Ненулевое значение β в данной калибровке приводит к зависимости ньютоновской гравитационной «постоянной» от времени

$$G = G_0 \exp(-2\beta t). \quad (34)$$

При выборе эмпирического параметра $\beta = 0$ получаем совпадение с ОТО.

5. Объяснение ротационных кривых звезд в галактиках на основе КГ

5.1. КТГ Вейля–Маннгейма

В своих работах [16, 17] Маннгейм и соавторы вычисляли ротационную скорость, пользуясь следующими тремя формулами:

1) выражением для $g_{00} = -e^\gamma$ в форме

$$e^\gamma = \left(1 - 3\beta\gamma \right) - \frac{\beta(2 - 3\beta\gamma)}{r} + \gamma r - \kappa r^2. \quad (35)$$

Это точное решение уравнений Баха для КТГ Вейля, впервые полученное Маннгеймом и Казанасом [9], см. (23)–(25);

2) выражением, связывающим потенциал слабого гравитационного поля U с компонентой g_{00} (см. формулу (87.12) в [15]):

$$-g_{00} = \exp(\gamma) = 1 + \frac{2U}{c^2}; \quad (36)$$

3) выражением для ньютоновского центростремительного ускорения

$$\frac{v^2}{r} = \frac{dU}{dr}; \quad (37)$$

В КТГ Вейля–Маннгейма [9, 16, 17] источник тяготения в виде массы приводит к такому гравитационному потенциалу в нерелятивистском случае на окраине галактики:

$$U(r) \approx -\frac{N\beta^* c^2}{r} + \frac{N\gamma^* c^2 r}{2}. \quad (38)$$

Здесь учтено, что $3\beta\gamma \ll 1$, $\kappa r^2 \ll \gamma r$ для галактических расстояний. «Звездочка» означает, что приведена величина на единицу солнечной массы.

Величина $\beta^* = \frac{M_0 G}{c^2} = 1,475 \cdot 10^5$ см, M_0 – масса

Солнца, $\gamma^* = 5,42 \cdot 10^{-41}$ 1/см, $\gamma_0 = 3,06 \cdot 10^{-30}$ 1/см,

$\kappa = 9,54 \cdot 10^{-54}$ см⁻². Приведенные параметры подобраны в нескольких работах Маннгейма и соавторов, см. для примера [16, 17]. В КТГ Вейля–Маннгейма различают два линейных потенциала: локальный, связанный с материей, находящейся в галактике, и глобальный, отвечающий за космологический фон. Данный способ был введен Маннгеймом и соавторами (см. [26] и ссылки там же). Величина γ – линейная функция для произвольной галактики, масса N этой галактики выражена в солнечных массах M_\odot :

$$\gamma = \gamma_0 + N\gamma^*, \quad 1/\text{см} \quad \text{и} \quad \beta = N\beta^*, \quad \text{см}. \quad (39)$$

При этом должно быть $\beta^* \gamma^* \ll 1$. При фиксации зависимостей β , γ и κ калибровка в уравнениях КТГ Маннгейма фиксируется и далее не должна меняться.

Пусть частица находится вдали от основной массы звезд, т. е. на краю галактики.

Из (35), (36) находим, что

$$U = \frac{c^2}{2} \left[-3\beta\gamma - \frac{\beta(2 - 3\beta\gamma)}{r} + \gamma r - \kappa r^2 \right]. \quad (40)$$

Подставляя (40) в (37), получаем:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{c^2}{2} \frac{d}{dr} \left[-3\beta\gamma - \frac{\beta(2 - 3\beta\gamma)}{r} + \gamma r - \kappa r^2 \right] =$$

$$= \frac{c^2}{2} \left[\frac{\beta(2 - 3\beta\gamma)}{r^2} + \gamma - 2\kappa r \right]. \quad (41)$$

Из (41) следует, что

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{\beta(2 - 3\beta\gamma)}{2r} + \frac{\gamma}{2} r - \kappa r^2}. \quad (42)$$

Численные оценки сделаем для приводимых ниже значений параметров галактик, которые будем называть типичными. Будем считать, что галактики имеют массу, равную 10^{11} солнечных масс,

$$\beta = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ см}. \quad (43)$$

Рассматриваем звезды, находящиеся на расстоянии порядка 10 кпк от центра галактики, т. е. полагаем

$$r = 3 \cdot 10^{22} \text{ см.} \quad (44)$$

Для оценки ротационной скорости звезд на окраине галактик с указанными выше типичными значениями параметров галактик в формулу (42) подставляем значения (43)–(44), получаем:

$$v \approx (3 \div 4) \cdot 10^7 \text{ см/с.} \quad (45)$$

Это разумные значения. В следующем разделе будет дана более точная формула для вычислений скоростей звезд в спиральных галактиках.

5.2. Формализм Маннгейма вычисления ротационных кривых

Чтобы сравнить результаты расчетов с астрономическими данными, Маннгейм разработал математический формализм [18]. Дело в том, что при расчете ротационных кривых внутри галактик надо учитывать усредненное влияние других звезд.

Следуя Маннгейму [18], изложим метод вычисления гравитационного поля спиральной галактики как гравитационного поля очень тонкого плоского диска с осесимметричным распределением плотности массы. В общем случае решение задачи Кеплера мы не можем использовать, так как пробная частица находится внутри галактики. Плотность диска аппроксимируется зависимостью вида

$$\rho(R, z', \varphi) = \Sigma(R)\delta(z'). \quad (46)$$

Тогда масса диска

$$M_{\text{disk}} = \int_0^{\infty} 2\pi\Sigma(R)RdR. \quad (47)$$

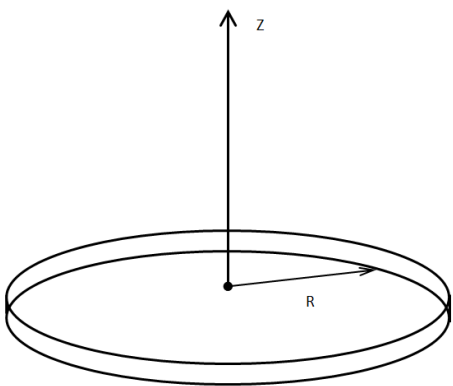


Рис. 3. Схематическое изображение спиральной галактики в виде диска

Зависимость $U_{\text{disk}}(r, z, \varphi)$ следует найти. Для этого рассмотрим осесимметричную задачу в цилиндрических координатах. Плотность материи

$$\rho = \rho(R, z, \varphi) \quad (48)$$

связана с гравитационным потенциалом посредством уравнения Пуассона

$$\Delta U_{\text{disk}} = 4\pi\rho. \quad (49)$$

Задана зависимость нерелятивистского потенциала для точечной массы:

$$U(r) = -\frac{\beta}{r} + \frac{\gamma r}{2} = U^\beta(r) + U^\gamma(r), \quad U^\beta(r) = -\frac{\beta}{r},$$

$$U^\gamma(r) = \frac{\gamma r}{2}. \quad (50)$$

Поэтому

$$U_{\text{disk}}(r, z) = \int U^\beta \rho dV + \int U^\gamma \rho dV. \quad (51)$$

В цилиндрических координатах

$$U_{\text{disk}}^\beta = \int U^\beta \rho dV =$$

$$= -\beta \int_0^{\infty} dR \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{R\rho(R, z')}{\sqrt{(r^2 + R^2 - 2rR \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2)}}. \quad (52)$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} = \frac{1}{\sqrt{(r^2 + R^2 - 2rR \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2)}} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk J_m(kr) J_m(kR) \exp(im(\varphi - \varphi') - k|z - z'|). \quad (53)$$

Здесь радиус-векторы выделены жирным шрифтом и имеют компоненты

$$\mathbf{R} = (R, \varphi', z'), \quad \mathbf{r} = (r, z, \varphi = 0). \quad (54)$$

Отсюда при подстановке (53) в (52) получается следующее соотношение ([18]):

$$U_{\text{disk}}^\beta(r, z) = -2\pi\beta \int_0^{\infty} dk \int_0^{\infty} dR \int_{-\infty}^{\infty} dz' R\rho(R, z') \times$$

$$\times J_0(kr) J_0(kR) \exp(-k|z - z'|). \quad (55)$$

В это выражение подставляем зависимость (46). Таким образом,

$$U_{\text{disk}}^\beta(r) = U_{\text{disk}}^\beta(r, z = 0) =$$

$$= -2\pi\beta \int_0^{\infty} dk \int_0^{\infty} dR R \Sigma(R) J_0(kr) J_0(kR). \quad (56)$$

Аналогично

$$U_{\text{disk}}^\gamma(r, z) = \frac{\gamma}{2} \int_0^{\infty} dR \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-\infty}^{\infty} dz' R \frac{\rho(R, z') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R})^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}. \quad (57)$$

Подставляя в (57) выражение (53), получаем

$$U_{disk}^{\gamma}(r, z) = \pi\gamma \int_0^{\infty} dk \int_0^{\infty} dR \int_{-\infty}^{\infty} dz' R \rho(R, z') \times \\ \times \left[(r^2 + R^2 + (z - z')^2) J_0(kr) J_0(kR) - \right. \\ \left. - 2rR J_1(kr) J_1(kR) \right] \exp(-k|z - z'|). \quad (58)$$

При $z = 0$ получается следующее выражение:

$$U_{disk}^{\gamma}(r) = \pi\gamma \int_0^{\infty} dk \int_0^{\infty} dR R \Sigma(R) \left[(r^2 + R^2) J_0(kr) J_0(kR) - \right. \\ \left. - 2rR J_1(kr) J_1(kR) \right]. \quad (59)$$

Радиальная плотность массы диска часто аппроксимируется экспоненциальной зависимостью вида

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \exp\left(-\frac{R}{R_0}\right). \quad (60)$$

Тогда

$$M_{disk} = \int_0^{\infty} 2\pi \Sigma(R) R dR = 2\pi R_0^2 \Sigma_0. \quad (61)$$

Отсюда получается формула Фримана [19] для ньютоновского потенциала в галактике:

$$U_{disk}^{\beta}(r) = -2\pi\beta \Sigma_0 \int_0^{\infty} dk \frac{\alpha J_0(kr)}{(\alpha^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ = -\pi\beta \Sigma_0 r \left[I_0(\alpha r/2) K_1(\alpha r/2) - I_1(\alpha r/2) K_0(\alpha r/2) \right]. \quad (62)$$

Аналогично после некоторых вычислений, детали которых здесь опущены, но приведены в [18], получается формула для линейного потенциала:

$$U_{disk}^{\gamma}(r) = \pi\gamma \Sigma_0 \left\{ \left(r/\alpha^2 \right) \left[I_0(\alpha r/2) K_1(\alpha r/2) - \right. \right. \\ \left. \left. - I_1(\alpha r/2) K_0(\alpha r/2) \right] + \left(r^2/\alpha^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \left[I_0(\alpha r/2) K_0(\alpha r/2) + I_1(\alpha r/2) K_1(\alpha r/2) \right] \right\}. \quad (63)$$

Скорость звезды в диске $v_{disk}(r)$ при $z = 0$ определяется по соотношению:

$$v_{disk}^2(r) = r \frac{d}{dr} U_{disk}(r). \quad (64)$$

Отсюда следует, что

$$v_{disk}^2(r) = c^2 \left(N\beta^* \alpha^3 r^2 / 2 \right) \left[I_0(\alpha r/2) K_0(\alpha r/2) - \right. \\ \left. - I_1(\alpha r/2) K_1(\alpha r/2) \right] + c^2 \left(N\gamma^* r^2 \alpha / 2 \right) \times \\ \times I_1(\alpha r/2) K_1(\alpha r/2). \quad (65)$$

Спиральная галактика в рассмотренной модели характеризуется всего тремя эмпирическими параметрами: α , N , R_0 , которые определяются из независимых астрономических наблюдений и не зависят от параметров используемой КТГ.

В данном формализме можно учесть другие, более сложные, варианты распределения плотности материи, например сферическое ядро в центре с тонким диском, см. [18].

При $r \gg R_0$ (на окраине галактики):

$$v_{disk}^2(r) = r \frac{dU_{disk}(r)}{dr} \rightarrow c^2 \frac{N\beta^*}{r} + \\ + c^2 \frac{N\gamma^* r}{2} - c^2 \frac{3N\gamma^* R_0^2}{4r}. \quad (66)$$

Отметим, что последним членом в (66) можно пренебречь. Член, содержащий γ_0 , здесь опущен. Поэтому выражение (66) согласуется с (38).

Отметим также, что Маннгейм и соавторы учли влияние и космологических расстояний, приведя такое выражение для скоростей звезд [20]:

$$v_{tot}^2(r) = v_{disk}^2(r) + c^2 \frac{\gamma_0 r}{2} - c^2 \kappa r^2 \rightarrow \\ \rightarrow c^2 \frac{N\beta^*}{r} + c^2 \frac{N\gamma^* r}{2} + c^2 \frac{\gamma_0 r}{2} - c^2 \kappa r^2. \quad (67)$$

5.3. КТГ Горбатенко–Романова

Мы отмечали в разделе 4.2, что при выборе определенной калибровки компонента g_{00} в ЦСС решении совпадает в КТГ Вейля и КТГ Горбатенко–Романова. Поэтому после фиксирования такой калибровки результаты анализа Маннгейма и соавторов для скоростей звезд в галактиках можно просто перенести на случай КТГ Горбатенко–Романова. Действительно совпадение выражений (23) и (27) при условии (28) дает такую возможность. Тем не менее, чтобы осветить здесь вопрос о ротационной скорости с другой стороны, приведем полезные общие соотношения, справедливые для движения пробной частицы в метрике вида (23), см., к примеру, работу [21].

Так как спиральная геометрия имеет геометрию диска, звезды движутся по геодезическим линиям в экваториальной плоскости. Пусть метрика задана соотношением:

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + r^2 d\Omega, \\ d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (68)$$

В нашем случае

$$A(r) = B(r) = (1 - 3\beta\gamma) - \frac{\beta(2 - 3\beta\gamma)}{r} + \gamma r - \kappa r^2. \quad (69)$$

Рассмотрим движение звезды в экваториальной плоскости, где $\theta = \frac{\pi}{2}$. Деля ds^2 на квадрат аффинного параметра

$$d\tau^2 = -g_{00}dt^2 > 0, \quad (70)$$

получаем соотношение

$$1 = A(r)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{B(r)}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2. \quad (71)$$

Для круговой траектории

$$\frac{dr}{d\tau} = 0, \quad (72)$$

поэтому

$$1 = A(r)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2. \quad (73)$$

Дифференцируя это выражение по радиусу r , получаем

$$0 = \frac{dA}{dr}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 2r\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2. \quad (74)$$

Скорость вращения по орбите v получается из соотношения (см. [15]):

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{rd\phi}{\sqrt{-g_{00}}dt}. \quad (75)$$

С учетом (74) выводится выражение

$$v^2 = \frac{r}{2} \frac{\frac{dA}{dr}}{A(r)} = \frac{r\gamma'(r)}{2}, \quad (76)$$

полученное, например, в [22, 23]. Для слабого поля оно переходит в (37).

Чтобы получить наблюдаемые скорости в спиральных галактиках v_{disk} , следует применить анализ из раздела 5.2. Поскольку выражение (69) совпадает с (27) при соответствующей калибровке, здесь достаточно просто сослаться на результаты Маннгейма и соавторов [18].

5.4. КТГ Вейля–Дирака

В приближении слабого гравитационного поля потенциал КТГ Вейля–Дирака [14] в калибровке (34) представляется в виде

$$g_{00} = -1 - 2U, \quad U(r) \approx -\frac{m_0 G}{r} + 4\left(\frac{m_0 G}{c^2}\right)^3 \frac{\beta^2}{r} + 2\left(\frac{m_0 G}{c^2}\right)^2 \beta^2 + \left(\frac{m_0 G}{c^2}\right) \beta^2 r + \frac{\beta^2 r^2}{2}. \quad (77)$$

На галактических расстояниях ~ 10 кпс можно ограничиться следующим выражением для потенциала

$$U(r) \approx -\frac{m_0 G}{r} + \frac{\beta^2 r^2}{2}. \quad (78)$$

Полезно сравнить выражение (78) с формулой (38). Видно, что если в КТГ Вейля–Маннгейма [17] в потенциале присутствует линейный член по r , то в КТГ Вейля–Дирака присутствует квадратичный член по r^2 .

Чтобы сравнить формулы с наблюдениями, авторы [14] рассматривают галактики либо шаровидной формы, либо рассматривают только сферическую подсистему галактик. Для этого они используют результаты работы [24], в которой дана эмпирическая формула распределения массы от радиуса в сферической подсистеме:

$$M(r) = M_{\text{sphere}} \left(\frac{r}{r+r_c}\right)^{3\nu}, \quad \nu = \begin{cases} 1, & \text{HSB galaxies} \\ 2, & \text{LSB and dwarf galaxies} \end{cases}. \quad (79)$$

Здесь M_{sphere} – масса всей сферической подсистемы, ν – показатель степени, который равен 1 для ярких галактик и 2 для тусклых и карликовых галактик.

Для звезд внутри сферической подсистемы потенциал модифицируется:

$$U_{\text{sphere}}(r) = \int U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \rho dV = \int U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \rho(r') 4\pi r'^2 dr'. \quad (80)$$

Здесь ρ находится из (79):

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM(r)}{dr}. \quad (81)$$

Вычисления [14] дают следующий результат:

$$U_{\text{sphere}}(r) = -\frac{GM(r)}{r} + \frac{\beta^2 M_{\text{sphere}}}{2M_{\odot}} r^2 + \frac{\beta^2 I_{cm}}{2M_{\odot}}. \quad (82)$$

Здесь I_{cm} – момент инерции материи относительно центра масс. При $r > r_c$, пользуясь формулой (37), получаем для скоростей звезд v_{sphere} на краю сферической подсистемы выражение:

$$v_{\text{sphere}}^2(r) \approx \frac{GM(r)}{r} + \frac{M_{\text{sphere}}}{M_{\odot}} \beta^2 r^2 = \frac{M}{M_{\odot}} \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r+r_c} \right)^{3\gamma} + \frac{M}{M_{\odot}} \beta^2 r^2. \quad (83)$$

Величина β находится из наблюдений. По данным авторов [14], это значение находится в пределах $\beta = (5,72 \div 6,38) \cdot 10^{-14} \text{ год}^{-1}$.

Отметим здесь, что работа по вычислению скоростей звезд на окраине спиральных галактик в рамках КТГ Вейля–Дирака авторами [14] не проведена, что может являться предметом исследований.

6. Результаты вычислений в КТГ и сравнение с наблюдениями

6.1. КТГ Вейля–Маннгейма

Имеется ряд работ Маннгейма и соавторов (см., например, [16–18, 20, 25, 26]), в которых сис-

тематическим образом произведена обработка данных наблюдений по ротационным скоростям звезд в галактиках различного типа. Обработка производилась с целью проверки соответствия предсказаний КТГ Вейля наблюдательным данным. В обобщенном виде часть результатов представлены в работе [25].

В первой части были взяты 3 галактики различных типов: карликовая спиральная галактика DDO 154, спиральная галактика UGC 128 типа LSB с низкой поверхностной светимостью и спиральная галактика NGC 3198 типа HSB с высокой поверхностной светимостью. В каждой из этих галактик рассмотрен весь объем наблюдательных данных по тем звездам, по которым такие данные имеются. Результаты представлены на рис. 4–6 из [25].

Рис. 4–6 с очевидностью свидетельствуют о том, что КТГ Вейля–Маннгейма [9, 16–18, 20, 25] хорошо описывает ротационные скорости звезд в галактиках.

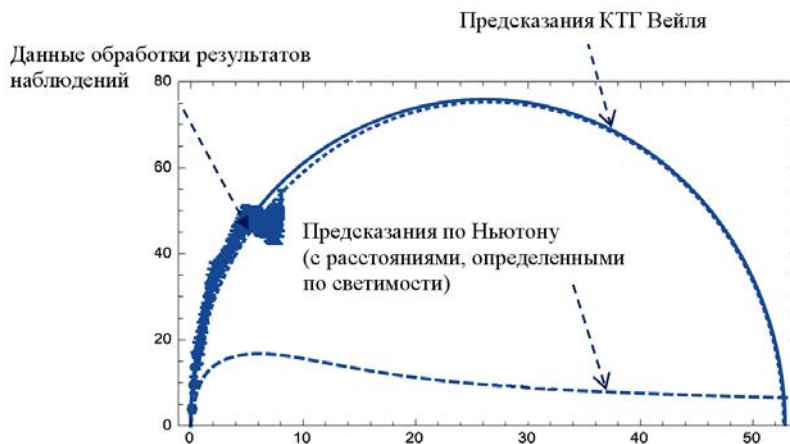


Рис. 4. Кривая данных по ротационным скоростям звезд (км/с) в зависимости от расстояния R (кпк) для карликовой спиральной галактики DDO 154. Сплошная верхняя кривая соответствует предсказаниям КТГ Вейля–Маннгейма с параметрами для данной галактики [25]. Спадающая нижняя штриховая линия – предсказания по Ньютону. Наблюдения показаны точками

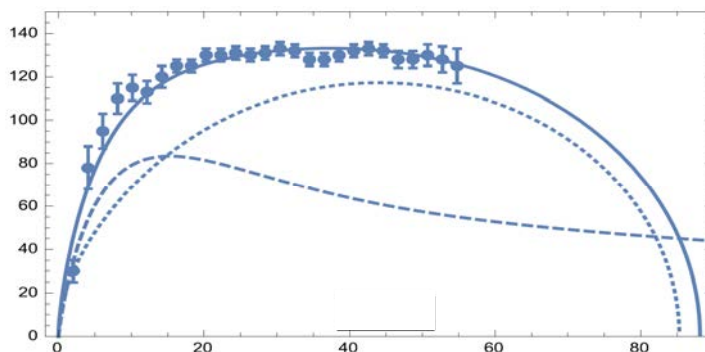


Рис. 5. То же, что на рис. 4, но для галактики UGC 128 с низкой поверхностной светимостью [25]

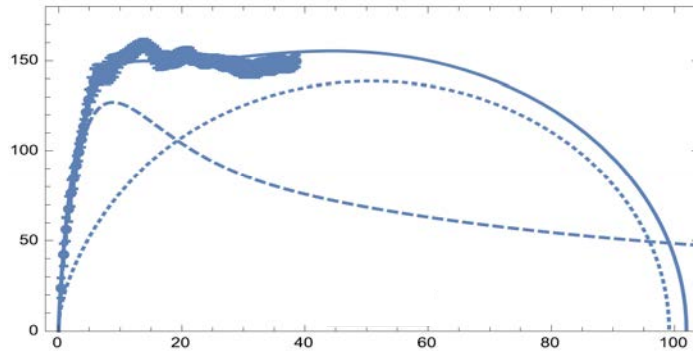


Рис. 6. То же, что на рис. 4, но для галактики NGC 3198 с высокой поверхностной светимостью [25]

6.2. КТГ Вейля–Дирака

Авторами [14] проделана работа по проверке соотношения (83) и астрономических наблюдений скоростей звезд в галактиках. На рис. 7–9 показаны некоторые результаты из [14] по вычислению скоростей вращения в галактиках. Видно хорошее согласие с астрономическими данными. Отметим, что в отличие от рис. 4–6 с расстояниями 50–100 кпк, на рис. 7–9 показаны только сферические подсистемы галактик с расстояниями 7–10 кпк. Поэтому вопрос об описании КТГ Вейля–Дирака больших расстояний пока открыт (для данной калибровки (31)).

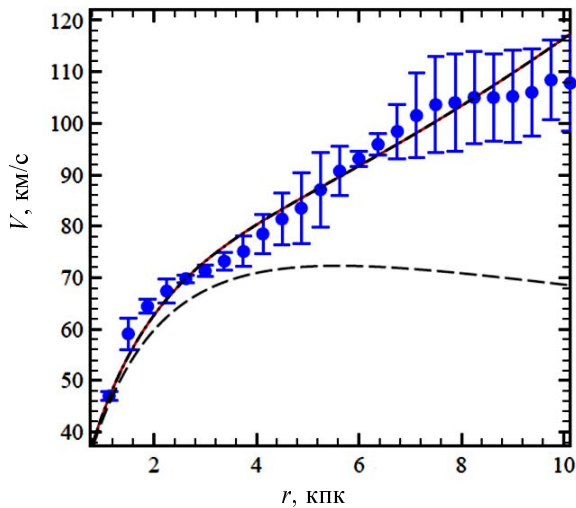


Рис. 7. Кривая данных по ротационным скоростям звезд (км/с) в зависимости от расстояния R (кпк) для эллиптической галактики NGC 274. Сплошная верхняя кривая соответствует предсказаниям КТГ Вейля–Дирака с параметрами для данной галактики [14]. Нижняя штриховая кривая – предсказания по Ньютону. Наблюдения показаны точками

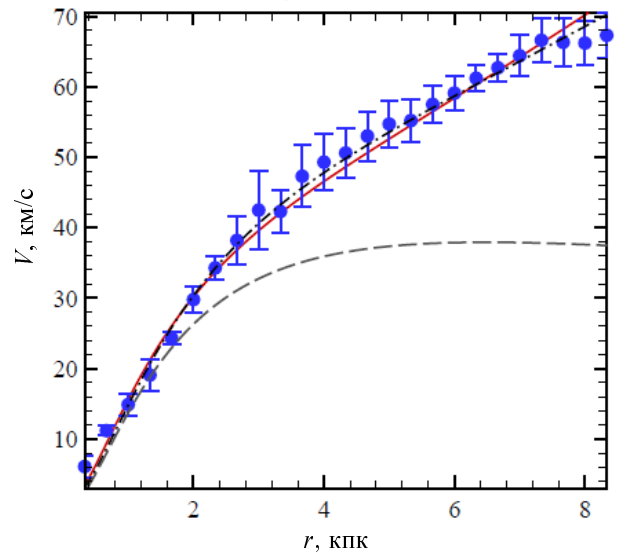


Рис. 8. То же, что на рис. 7, но для спиральной галактики NGC 3109

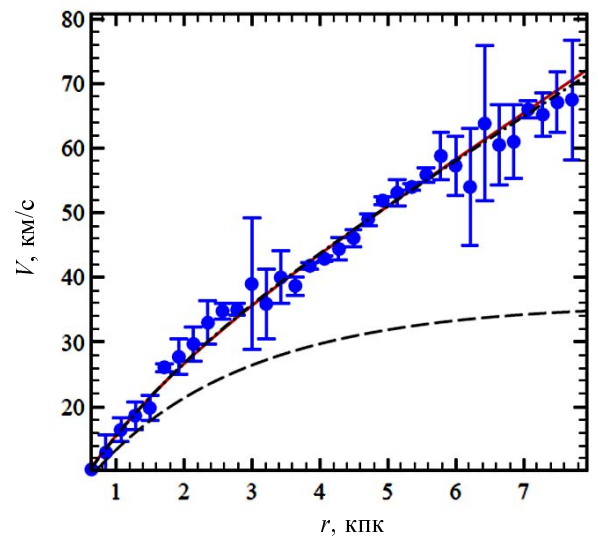


Рис. 9. То же, что на рис. 7, но для спиральной галактики IC 2574

По представленным материалам раздела 6 можно сделать следующие выводы.

Вывод 1. В последние десятилетия благодаря усилиям Маннгейма и других исследователей достигнут значительный прогресс по геометрическому объяснению феномена ТМ в рамках КТГ Вейля [9, 16–20, 25, 26]. Значения скоростей вращения звёзд вокруг галактик удалось объяснить в рамках геометрии Римана при условии замены уравнений Эйнштейна на уравнения Баха четвертого порядка. Утверждение базируется на обработке достаточно представительной выборки галактик и звёзд.

Вывод 2. Аналогичное геометрическое объяснение феномена ТМ может быть проведено и в рамках других КТГ. Но в некоторых теориях уравнения Эйнштейна не только заменяются на уравнения КТГ, но и геометрия Римана заменяется на геометрию Вейля (см., например, [12–14]). Основой геометрического объяснения скоростей вращений звезд в КТГ является наличие линейного и квадратичного членов в потенциале (38), (77) в выбранной калибровке.

7. Замечания и ответы по поводу геометрического объяснения ТМ

Для полноты изложения материала по взглядам на природу ТМ приведем некоторые критические замечания в адрес геометрического объяснения феномена ТМ и ответы на эти замечания.

Замечание 1. Проблемы описания нарушения вейлевской инвариантности. «Ручная» калибровка – фиксирование параметров моделей КГ свидетельствует о неполноте и феноменологическом характере существующих моделей КГ.

Ответ. Видимо, некие более общие теории должны иметь динамическое нарушение вейлевской симметрии вида (8). Тем не менее, на данном этапе исследований полезны и такие простые феноменологические подходы. Способы нарушения вейлевской инвариантности кратко упомянуты в нашей публикации [27]. См. также статью [30]. В ней на основе конформной $N = 1$ супергравитации формулируется модель со спонтанным нарушением вейлевской (локальной масштабной) инвариантности. В рамках этой модели удается получить космологическое решение, описывающее инфляцию.

Замечание 2. Альтернативные теории гравитации предлагаются со времен Эйнштейна. Но классическая теория стоит как скала, будучи самой стройной. Альтернативные же теории нуждаются

во всяких «подпорках» и валятся одна за другой при появлении новых данных [29].

Ответ. Общая теория относительности (ОТО) заведомо не стоит как «скала» в точках сингулярностей. Есть много и других проблем в ОТО. Например, проблема существования замкнутых времениподобных геодезических в некоторых моделях. Отметим, что многие варианты конформных теорий гравитации появились относительно недавно. Конформные теории продемонстрировали предсказательную способность при описании ротационных скоростей. К тому же, у них есть хороший потенциал развития. Кроме того, ОТО является частным случаем некоторых КТГ. В частности, полагая в (17) $\varphi = 1$, $\alpha = 6$, получаем обычный лагранжиан ОТО.

Наконец, объединение КТГ и физики частиц (об этом будет сказано в следующем разделе) заметно повышает предсказательную способность КТГ.

Замечание 3. Поскольку темная материя взаимодействует с барионной только через гравитацию и поскольку темной материи в 5 раз больше барионной, то черные дыры должны образовываться в основном из темной материи. Кроме того, в центре галактик есть гало темной материи и плотность темной материи к центру по расчетам сильно увеличивается. Следовательно, черные дыры в центре галактик должны содержать в основном черную материю.

Ответ. По некоторым причинам темная материя не скапливается в центре галактики, а имеет большое рассеяние в пространстве, заполняя значительно большие области галактики (гало), чем обычное вещество. И, хотя ее масса больше в пять раз, она значительно более разрежена по плотности в объеме галактик, чем обычная. Но почему темная материя не собирается в плотные комки и не образует сингулярность в центрах галактик – в рамках теории частиц не ясно. Иллюстрацией является рис. 10 (см. [28]). По поводу возможного подхода к объяснению этого эффекта (влияние фоновой энтропии) см. [1]. С другой точки зрения на ТМ, как на проявление только гравитации, проблемы отсутствия черных дыр, состоящих из ТМ, нет.

Замечание 4. Квантовые поправки нарушают конформную инвариантность КТГ.

Ответ. Даже как приближенная симметрия вейлевская инвариантность КТГ имеет важное значение для построения модели перенормируемой квантовой гравитации из-за наличия безразмерного параметра связи. В то же время ОТО при попытках квантования перенормируема, и появляющиеся расходимости в ОТО преодолеть не удастся.

Замечание 5. КТГ Вейля–Маннгейма не описывает на самом деле ротационные кривые звезд, так как, выбрав другую калибровку в решении КТГ Вейля–Маннгейма (25), можно получить обычную метрику Шварцшильда без линейного члена.

Ответ. Выбрав калибровку один раз, т. е. зафиксировав зависимость (8) в КТГ Вейля–Маннгейма [17], мы теряем после этого возможность менять эту калибровку, когда имеем дело с обычной барионной массой. То есть КТГ после выбора калибровки параметров с целью соответствия наблюдениям становится теорией с нарушенной вейлевской инвариантностью. Точно так же дело обстоит и с КТГ Вейля–Дирака [11].



Рис. 10. Галактическое скопление Cluster Cl 0024+17 из пассивных спиральных галактик. Рисунок из коллекции NASA ([28]). Распределение темной материи, полученное на основе гравитационного линзирования, показано в виде кольца голубым цветом



Рис. 11. Скопление галактик Пуля 1E 0657-558. Обработанные данные телескопа Чандра. Википедия. Темная материя синего цвета. Обычная материя из горячего галактического газа розового цвета

Замечание 6. Скопление галактик Пуля (1E 0657-558) выдвигается как важное доказательство «материальности» частиц темной материи (см., например, [29]). В этом скоплении темная материя и основная масса видимой барионной материи в виде газа оказались разделены в результате столкновения двух галактик. Газ остался в месте столкновения, а темная материя улетела вместе со звездами (рис. 11).

Ответ. Отметим, что скопление галактик Абе́ля (Abell 520) дает противоположный результат, так что ситуация с объяснением поведения ТМ в сталкивающихся галактиках неоднозначна. При столкновении галактик темная материя как бы частично прилипла в месте столкновения, а галактики со звездами разлетелись (рис. 12). Здесь нужны дополнительные наблюдения и анализ. Другой, более значимый пример, который можно привести как раз не в пользу гипотезы ТМ как проявления модифицированной гравитации – это наблюдения ультрадиффузной галактики NGC 1052-DF2. По данным обсерватории У. М. Кека [33], шаровые скопления внутри галактики движутся со скоростью, соответствующей массе обычной материи. Интересно было бы проделать вычисления скоростей звезд в этой галактике на основе КТГ Вейля–Маннгейма и Вейля–Дирака, чтобы понять масштаб различия и какие члены в метриках (25), (27), (33) существуют для описания движения звезд в этом случае.



Рис. 12. Скопление галактик Abell 520. Изображение NASA, ESA, CFHT, CXO, М. J. Jee (University of California, Davis), А. Mahdavi (San Francisco State University). Википедия

Темная материя сине-зеленого цвета в центре столкновения галактик. Обычная материя оранжевого и розового цвета по краям.

8. Гибридный подход к темной материи

Кратко рассмотрим объединение геометрического подхода на основе конформной гравитации

тации и подхода на основе частиц к проблеме ТМ. Такое объединение мы назвали здесь гибридным подходом.

По современным космологическим представлениям, энергия вакуума связана с скалярным полем [1, 30, 31]. Это поле используется для описания фазовых переходов вакуума при расширении Вселенной. При этих переходах происходило нарушение симметрий фундаментальных взаимодействий. Различные области пространства могли испытывать фазовый переход независимо, в результате чего образовывались области с определенной конфигурацией скалярного или векторного поля. Из-за различной ориентации могли образоваться и топологические дефекты: частицы, космические струны, доменные стенки [31]. Все эти объекты могут давать вклад в темную материю. Какие же поля испытывают фазовый переход с нарушением вейлевской симметрии КТГ? В качестве кандидатуры можно рассмотреть скалярное и векторное поля теорий КГ на основе многообразия Вейля [12, 27]. Обычная материя приобретает массу при динамическом нарушении симметрии, когда бозоны Хиггса приобретают массу. Аналогично появление массы у скалярного поля и вектора Вейля приводит к возникновению материальных частиц. Это вещество может быть и «темной материей». Если фазовый переход происходил во Вселенной неравномерно, то могут быть области, в которых поля приобрели значительную массу, но могут быть области, содержащие мало массы.

После нарушения вейлевской симметрии и генерации массы за счет механизма Хиггса в уравнения КГ включается тензор обычной барионной материи. Конечно, вследствие такой добавки конформной инвариантности уравнений КГ совместно с барионной материей с ненулевым следом тензора энергии-импульса уже не будет. Появляется фиксированный масштаб расстояний.

Отметим, что теории подобного типа широко распространены в литературе, но в силу ограниченного объема данной публикации мы не можем их здесь рассмотреть сколько-нибудь подробно, несмотря на их актуальность. Поэтому ограничимся здесь некоторыми отдельными примерами. Ранние исследования на эту тему освещены в [32].

8.1. КТГ Вейля–Маннгейма

Маннгейм предложил использовать конформно-инвариантный лагранжиан материи и действие в виде [26, 34]

$$L_M = -\frac{\sigma}{2} \left(S^i{}_{;\alpha} S^j{}_{;\alpha} - \frac{R}{6} S^2 \right) - \lambda S^4 - \bar{\psi} (\not{D} - \mu S) \psi, \quad (84)$$

$$I_M = \int L_M \sqrt{-g} d^4x,$$

где

$$\not{D} = i\gamma^\mu(x) (\partial_\mu + \Gamma_\mu(x)) \quad (85)$$

– оператор Дирака в римановом пространстве, $S(x)$ – безмассовое конформное скалярное поле, $\psi(x)$ – спинорное поле, σ и μ – безразмерные параметры. Отметим, что при вейлевских преобразованиях метрики:

$$\sqrt{-g} d^4x \rightarrow \Omega^4(x) \sqrt{-g} d^4x, \quad L_M \rightarrow L_M \Omega^{-4}(x),$$

$$S \rightarrow S \Omega^{-1}, \quad \psi \rightarrow \psi \Omega^{\frac{3}{2}}. \quad (86)$$

Вариация действия I_M по ψ дает уравнение Дирака

$$\not{D}\psi = \mu S \psi \quad (87)$$

со связью типа Юкавы скалярного поля S и спинорного ψ . Вариация действия I_M по S дает уравнение для поля Хиггса второго порядка

$$S^i{}_{;\alpha}{}^{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} S_{;\beta} \right)_{;\alpha} = -\frac{R}{6} S + \frac{4\lambda}{\sigma} S^3 - \frac{\mu}{\sigma} \bar{\psi} \psi =$$

$$= \frac{d}{dS} V(S) - \frac{\mu}{\sigma} \bar{\psi} \psi, \quad (88)$$

Здесь введен потенциал скалярного поля Хиггса S :

$$V(S) = -\frac{R}{12} S^2 + \frac{\lambda}{\sigma} S^4. \quad (89)$$

Допустим, что мы фиксировали калибровку поля S , т. е. положили

$$S_0 = \Omega^{-1}(x) S(x) = \text{const}. \quad (90)$$

Тогда у фермиона появляется фиксированная масса

$$m_0 = \mu S_0. \quad (91)$$

Вопрос о выборе величины S_0 в рамках подхода [34] не ставится.

Рассмотрим далее произвольное конформное поле $S(x)$ в рамках работы [34]. Вариация действия I_M по метрике дает конформный тензор энергии-импульса

$$T_\mu^\mu = \frac{2}{\sqrt{-g}} g^{\mu\alpha} \frac{\delta I_M}{\delta g^{\alpha\nu}} = T_\nu^\mu(\psi) + \sigma T_\nu^\mu(S), \quad (92)$$

где

$$T_v^\mu(S) = \frac{2}{3} S^{;\mu} S_{;v} - \frac{1}{3} S S_{;v}^{;\mu} - \frac{1}{6} S^2 R_v^\mu - \delta_v^\mu \left(\frac{1}{6} S^{;\alpha} S_{;\alpha} - \frac{1}{3} S S_{;\alpha}^{;\alpha} - \frac{1}{12} R S^2 + \frac{\lambda}{\sigma} S^4 \right). \quad (93)$$

Отметим, что тензор энергии-импульса выбран Маннгеймом так, чтобы след его был равен нулю, что требуется для вейлевской инвариантности:

$$T_\alpha^\alpha = \bar{\psi} \not{D} \psi + \sigma \left(S S_{;\alpha}^{;\alpha} + \frac{1}{6} R S^2 \right) - 4\lambda S^4 = 0. \quad (94)$$

Для сферически-симметричного фермионного поля макроскопический тензор энергии-импульса выглядит так:

$$T_v^\mu(\psi) = \text{diag}(-\rho, p_r, p_\theta, p_\theta), \quad (95)$$

где ρ – плотность, p_r – радиальная компонента напряжения, p_θ – азимутальная компонента тензора энергии-импульса.

Уравнение Дирака (87) приводит к соотношению:

$$T_\alpha^\alpha(\psi) = p_r + 2p_\theta - \rho = \bar{\psi} \not{D} \psi = \mu S \bar{\psi} \psi. \quad (96)$$

Отметим, что след тензора энергии-импульса (93) равен нулю либо только в отсутствии фермионов, либо в присутствии как фермионов, так и скалярного поля S вместе.

Если задан источник гравитации $f(r)$, то в КТГ Вейля–Маннгейма он удовлетворяет уравнению Пуассона четвертого порядка

$$\frac{1}{r} \frac{d^4}{dr^4} (rB(r)) = \frac{3}{4\alpha_G B(r)} (T_0^0 - T_r^r) \equiv f(r), \quad (97)$$

где функция $B(r)$, входящая в метрику МК, определена в (25), α_g – безразмерный параметр связи материи с гравитацией [9].

С учетом скалярного поля $S(r, t)$ функцию $f(r)$ можно записать как [34]:

$$4\alpha_g f(r) = -\frac{3}{B} (\rho + p_r) - \sigma S^3 \left(\frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{S} \right) + \frac{1}{B^2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{S} \right) \right). \quad (98)$$

Вклад от $S(r, t)$ в $f(r)$ будет отсутствовать, если положить

$$S(r, t) = S(r) = S_0 \frac{a}{a+r}. \quad (99)$$

Рассмотрев эти уравнения в МК-картине, автор [34] переходит к хиггсовской картине, делая локальное масштабное преобразование метрики

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(r) g_{\mu\nu} = \frac{S^2(r)}{S_0^2} g_{\mu\nu}, \quad (100)$$

и уже в этой метрике следует находить скорости вращения звезд на краю галактик v по соотношениям

$$v^2 = \frac{d \ln(|\tilde{g}_{00}|)}{d \ln(|\tilde{g}_{\theta\theta}|)}, \quad (101)$$

где с учетом выражения (99):

$$|\tilde{g}_{00}| = \left(\frac{a}{r+a} \right)^2 B(r) = 1 - \frac{2M}{\tilde{r}} - K\tilde{r}^2, \quad (102)$$

$$\tilde{r} = \sqrt{|\tilde{g}_{\theta\theta}|} = \frac{ra}{r+a}.$$

Почему, по мнению автора [34], для нахождения скоростей звезд в галактиках надо делать преобразование (100)? Дело в том, что тогда масса в соотношениях (90) и (91) получает фиксированное значение, и, следовательно, пробная материальная частица движется по геодезическим линиям. Оказывается (см. [34]), что при этом в соответствии с выражением (102), в нерелятивистском приближении ньютоновский потенциал имеет вид

$$U(\tilde{r}) = -\frac{M}{\tilde{r}} - \frac{K\tilde{r}^2}{2}, \quad K = -2\lambda S_0^2, \quad (103)$$

то есть линейный член метрики Маннгейма–Казанаса (38) исчезает.

Отметим здесь, что выражение (103) фактически совпадает с выражением для нерелятивистского потенциала, полученного в КТГ Вейля–Дирака, см. формулу (78). Таким образом, наличие скалярного хиггсовского поля $S(r)$, образующего гало галактики, приводит по результатам статьи [34] к сильному изменению вида нерелятивистского потенциала КТГ Вейля–Маннгейма [9, 18] и к исчезновению линейного члена в потенциале $U(r)$.

В литературе время от времени обсуждаются различные особенности КТГ Вейля–Маннгейма четвертого порядка. Отметим, что в КТГ Вейля–Маннгейма есть проблемы либо с экспериментами типа Кавендиша при непрерывном распределении масс $f(r)$ в выражении (97), либо с выполнением слабого принципа эквивалентности при наличии заряда у частиц и дискретном распределении масс [35].

8.2. КТГ Вейля–Дирака

В статьях [12, 36] рассматривается пространственно-замкнутая космологическая модель на основе теории Вейля–Дирака [11]. Предполагается,

что пространство-время вселенной после нарушения локальной масштабной симметрии имеет хаотическую вейлевскую микроструктуру, но на больших расстояниях описывается геометрией Римана. В начале времени Вселенная существует в сферически-симметричном состоянии без материи. Полный лагранжиан Дирака–Розена–Израэля (без учета обычной материи) выглядит так [36]:

$$L = -R\beta^2 + 6g^{\mu\nu}\beta_\mu\beta_\nu + 2\lambda\beta^4 + F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - 2k^2\beta^2(\beta_\mu - w_\mu\beta)(\beta^\mu - w^\mu\beta). \quad (104)$$

Космологическая метрика Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера имеет вид:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \right]. \quad (105)$$

Осциллирующая вселенная имеет начальный радиус размером порядка планковской длины, впоследствии сильно раздуваясь.

Первичная материя создается дираковской калибровочной функцией β . Эта функция фактически совпадает с функцией φ из (17). Отметим, что феноменологическая зависимость $\beta(t)$ подбирается так, чтобы описать основные космологические факты. На стадии создания материи, когда плотность $\rho_{\text{matter}} \approx 0$ и давление материи $p_{\text{matter}} \approx 0$, т. е. малы, материя создается вследствие уравнения:

$$\frac{d\rho_{\text{matter}}}{dt} = \frac{3\beta^2}{4\pi} \left(\frac{\dot{\beta}\ddot{\beta}}{\beta^2} - \frac{(\dot{\beta})^3}{\beta^3} + \frac{\ddot{\beta}}{a\beta} + \frac{\dot{a}(\dot{\beta})^2}{a\beta^2} \right) - 2\dot{\beta}\beta\Lambda. \quad (106)$$

Здесь $a(t)$ – масштабный фактор, Λ – космологическая постоянная.

Локальные поля вектора w_μ вейлевской связности после нарушения вейлевской инвариантности создают массивные бозоны со спином единица. В раннюю эпоху, когда температура вселенной разогревается от практически абсолютного нуля до максимума $T_{\text{max}} = 7,41 \cdot 10^{31}$ К, хаотически ориентированное поле векторов Вейля w_μ локализуется в микроячейках, создавая бозоны. Векторные бозоны перестают взаимодействовать с обычной материей при охлаждении вселенной ниже температуры $T_{\text{rad}} = 2,43 \cdot 10^{27}$ К. Розен и Израэлит предполагают, что эти бозоны, названные вейлонами, обеспечивают большую часть холодной темной материи во Вселенной. Масса вейлонов по оценке из [36] лежит в пределах $10^5 \text{ ГэВ} \geq m_w \geq 10 \text{ МэВ}$.

В эпоху доминирования пыли дираковская калибровочная функция β является источником темной энергии, впоследствии обуславливая космическое ускорение. Итак, все формы материи в подходе [12, 36] обусловлены геометрическими величинами теории Вейля–Дирака.

В [37] развита похожая в идейном смысле точка зрения, что «скалярное поле Дезера–Дирака существенно проявляет себя в условиях сверххранной Вселенной, видоизменяя стандартную теорию инфляции: оно определяет величину энергии физического вакуума (темной энергии), огромное значение которой в начальные моменты существования Вселенной резко экспоненциально спадает со временем к постоянному значению в современную эпоху, решая тем самым проблему космологической постоянной за счет динамики полей в сверххранной Вселенной. Поле Дезера–Дирака определяет момент спонтанного нарушения масштабной инвариантности и тем самым момент рождения масс покоя частиц и перехода от эры инфляции к фридмановской эре замедленного расширения Вселенной». Отметим здесь же, что в [37] «высказана гипотеза о том, что скалярное поле Дезера–Дирака представляет собой наряду с «темной энергией» также основную компоненту «темной материи», необходимость существования которой следует из космологических наблюдательных данных.»

В [27] мы рассмотрели другое возможное проявление свойств вектора Вейля в рамках КТГ Вейля–Дирака [11]. Чтобы продемонстрировать такую возможность, воспользуемся уравнением геодезической для частицы с массой m и импульсом p^λ

в поле вектора Вейля w^λ . По предположению, вектор w^λ используется уже после нарушения вейлевской инвариантности. Этот вектор описывает поле частиц с некоторой массой, названное в [36] вейлонами.

Учтем соотношения релятивистской гравитации; вейлевская связность обозначена выпуклой «шляпкой», обозначения из [27]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \check{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \delta_\mu^\lambda w_\nu + \delta_\nu^\lambda w_\mu - g_{\mu\nu} w^\lambda, \quad (107)$$

$$u^\lambda = \frac{dx^\lambda}{ds}, \quad u_\lambda u^\lambda = 1, \quad p_\lambda p^\lambda = m^2 c^2, \quad p^\lambda = m c u^\lambda. \quad (108)$$

Отсюда для геодезической линии имеем соотношение:

$$\frac{du^\lambda}{ds} = -\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda u^\mu u^\nu = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\mu u^\nu - 2u^\lambda (w_\nu u^\nu) + w^\lambda, \quad (109)$$

где $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ – символы Кристоффеля для связности Леви–Чивиты.

За счет выбора подходящей (локально инерциальной) системы отсчета положим в некоторой окрестности $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \approx 0$. Умножим соотношение (109) на mc :

$$\frac{dp^\lambda}{ds} = mcw^\lambda - \frac{2}{mc} p^\lambda (w_\nu p^\nu). \quad (110)$$

Следовательно, на частицу с массой m действует сила

$$f^\lambda = mcw^\lambda - \frac{2}{mc} p^\lambda (w_\nu p^\nu), \quad (111)$$

обусловленная вектором w^λ . Будем считать, что уравнение (110) предполагает переменность массы m при сохранении соотношений $u_\lambda u^\lambda = 1$ и $p_\lambda p^\lambda = m^2 c^2$ (после нарушения вейлевской симметрии). Тогда умножая уравнение (110) на p_λ , получаем:

$$\frac{d(p^\lambda p_\lambda)}{ds} = \frac{d(m^2 c^2)}{ds} = -mc (w_\nu p^\nu). \quad (112)$$

Изменение массы Δm на замкнутом контуре C выражается формулой:

$$\frac{m + \Delta m}{m} = \exp\left(-\frac{1}{2c} \oint_C w_\nu dx^\nu\right). \quad (113)$$

Итак, после нарушения вейлевской инвариантности, при условии наличия ненулевого вектора Вейля w^λ , частица с массой m , попавшая в область действия векторного поля w^λ , может менять массу. Массивное векторное поле w^λ , по предположению, имеет ненулевую напряженность

$$F_{\mu\nu} = w_{\mu,\nu} - w_{\nu,\mu}, \quad (114)$$

и характеризует оставшуюся после нарушения вейлевской симметрии вихревую часть вектора Вейля. При изменении массы частицы m по соотношению (113) напряженность вейлонного поля (114) должна изменяться так, чтобы в целом соблюдалось сохранение энергии. В [27] мы высказали некоторые аргументы, что такое поле может существовать в микроскопических масштабах и образовывать тонкие замкнутые трубки – вихревые вейлонные трубки. Такая любопытная, но экзотическая возможность может иметь отношение к образованиям типа струн особого типа и еще не

изучалась в литературе. Отметим, что Розен и Израэлит [36] полагали просто, что поле w^λ хаотично, так что средние значения его равны нулю:

$$\langle w_\lambda \rangle = 0, \quad \langle F_{\mu\nu} \rangle = 0. \quad (115)$$

Но очевидно, что такое усреднение должно иметь место на очень малых масштабах, иначе после нарушения локальной инвариантности мы столкнемся с наблюдаемым парадоксом типа «эффекта вторых часов» (second clock effect), который выдвигался еще Эйнштейном как контраргумент против теории Вейля (по этому поводу см., например, [38]). Если замкнутые вейлонные трубки имеют произвольную ориентацию, и их концентрация достаточна велика в малых масштабах, чтобы соблюдались соотношения (115), то наличие таких вейлонных трубок или петель может и не изменить среднюю массу частицы, а приведет к хаотичности движения материальной частицы. Можно сказать, что из-за вейлонных трубок произойдет турбулизация пространства-времени. Если масштаб расстояния для усреднения планковский, то какого-либо противоречия с имеющимися экспериментами в таком случае наблюдаться не будет. В связи с этим можно сформулировать вопросы. Могут ли такие сверхмассивные вейлоны как-то проявляться в наблюдениях? Можно ли сформулировать не противоречащую наблюдениям теорию так, чтобы масса вейлонов была на несколько порядков меньше и соответствовала массе бозонов Хиггса электрослабой теории? Можно ли ввести взаимодействие вейлонов и бозонов Хиггса?

Отметим, что в [39] рассмотрена массивная векторная частица, названная автором вектоном: «Вектон можно интерпретировать как некоторый вид темной материи, взаимодействующей только с гравитацией (или, в тахионном случае, как инфлатон)». Эффективный лагранжиан с учетом вектона записывается как [39]:

$$L_{eff} = R - 2\Lambda - k \left(\frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + m^2 w_\alpha w^\alpha \right). \quad (116)$$

В [40, 41] рассмотрены так называемые вейлевские мезоны, смысл которых тот же, что и вейлонов – это векторные частицы, которые обусловлены нарушенной вейлевской симметрией, причем существенным свойством данного векторного поля является ненулевая напряженность (114).

В [42] рассмотрен конформно-инвариантный вариант гравитации с целью объяснения особенности спектра флуктуаций плотности вещества во вселенной – плоского спектра Харрисона–Зельдовича. Плоский участок спектра Я. Б. Зельдович

объяснял тем, что относительные флуктуации плотности вещества в ранней Вселенной не зависят от длины волны возмущения, см. [43]. В [42] предполагается, что комплексное скалярное поле с отрицательным (таххионным) потенциалом $V(\phi)$, определяющее эволюцию ранней вселенной, было конформно-инвариантным до начала горячей стадии. Конформно-инвариантная стадия вселенной привела к плоскому спектру возмущений. После этой стадии конформной эволюции наступает разогрев вселенной. Действие из [42] имеет конформный вид Пенроуза–Черникова–Тагирова [44]:

$$S = \int d^4 \sqrt{-g} \left(\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + \frac{R}{6} \phi^* \phi - V(\phi) \right), \quad (117)$$

где

$$V(\phi) = -h^2 (\phi^* \phi)^2, \quad (118)$$

а метрика записывается для однородного изотропного и пространственно-плоского случая:

$$ds^2 = a^2(\eta) (d\eta^2 - d\vec{r}^2). \quad (119)$$

Итак, конформность гравитации в ранней вселенной успешно использована в [42] для объяснения конкретного астрофизического факта.

Заключение

Подходы на основе теорий темной материи, состоящей из частиц, имеют проблемы. В подходах на основе конформной гравитации некоторые проблемы находят решение.

А именно:

- 1) в них отсутствует проблема каспов;
- 2) они объясняют ротационные кривые звезд в галактиках экономным образом, вообще не требуя введения понятия ТМ.

Тем не менее, на основе КТГ не проделаны многие расчеты. В частности, желательны провести:

- 1) моделирование образования крупномасштабной структуры Вселенной с ньютоновским потенциалом;
- 2) моделирование столкновения галактик;
- 3) моделирование гравитационного линзирования галактик.

Вряд ли феноменологические теории конформной гравитации сами по себе способны решить все проблемы космологии. В конечном счете они могут быть следствием более фундаментальной теории.

Решение проблем происхождения темной материи и темной энергии заключается в развитии и объединении теории элементарных частиц и наиболее удачных моделей конформной гравитации. То есть, на наш взгляд, перспективен «гибридный» подход к решению проблем темной материи и темной энергии, в котором КТГ являются его частью.

Список литературы

1. Лукаш В. Н., Михеева Е. В. *Физическая космология*. М.: Физматлит, 2010.
2. Sparke L. S., Gallagher J. S. *Galaxies in the universe*. Cambridge. 2ed., CUP. 2007.
3. Freeman K.C. *On the Disks of Spiral and S0 Galaxies* // The Astrophysical Journal. 1970. Vol. 160. P. 811–830.
4. Незнамов В. П. *Неиспаряющиеся черные дыры, элементарные частицы, «темная» материя...* // ВАИТ. Сер. Теор. и прикл. физика. 2014. Вып. 1. С. 19–26.
5. Незнамов В. П. *Из чего может состоять темная материя* // ВАИТ. Сер. Теор. и прикл. физика. 2017. Вып. 3. С. 3–8.
6. Massimo Persic, Paolo Salucce and Fulvia Stee. *The universal rotation curve of spiral galaxies - I. The dark matter connection* // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1996. Vol. 281. P. 27–47.
7. McGaugh S. S. et al. *The rotation velocity attributable to dark matter at intermediate radii in disk galaxies* // The Astrophysical Journal. 2007. Vol. 659. P. 149–161.
8. Weyl H. *Raum, Zeit, Materie*. Berlin. Springer. 1923.
9. Mannheim Ph.D. and Kazanas D. *Exact vacuum solution to conformal Weyl gravity and galactic rotation curves* // The Astrophysical Journal. 1989. Vol. 342. P. 635–638.
10. Горбатенко М. В., Романов Ю. А. *Уравнения конформно инвариантной геометродинамики* // ВАИТ. Сер. Теор. и прикл. физика. 2005. Вып. 1-2, С. 65–73.
11. Dirac, P.A.M. *Long range forces and broken symmetries* // Proceedings of Royal Society London A. 1973, N 333. P. 403–418.
12. Israelit, Mark; Rosen, Nathan. *Weyl-Dirac geometry and dark matter* // Foundations of Physics. 1992, N 22. P. 555–568.
13. Горбатенко М. В., Седов С. Ю. *Решение Мангейма–Казанаса, конформная геометродинамика и темная материя* // ВАИТ. 2017. Сер. Теор.

и прикл. физика. Вып. 3. С. 14–22. ArXiv:1711.06189 [gr-qc].

14. Mirabotalebi S., Jalalzadeh S., M. Sadegh Movahedand H. R. Sepangi. *Weyl-Dirac theory predictions on galactic scales* // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2008. Vol. 385, Issue 2. P. 986–994. ArXiv: 0504117v3 [gr-qc].

15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.. *Теория поля*. М.: Наука, 1988.

16. O'Brien J. G., Mannheim P. D. *Fitting dwarf galaxy rotation curves with conformal gravity* // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2012. Vol. 421, Issue 2. P. 1273–1282.

17. Philip D. Mannheim and James G. O'Brien. *Galactic rotation curves in conformal gravity* // arXiv:1211.0188v1 [astro-ph] 1 Nov 2012.

18. Philip D. Mannheim. *Linear potentials and galactic rotation curves – formalism* // ArXiv: 9307004v1 [astro-ph] 2 Jul 1993.

19. Freeman K. C. 1970, Ap. J. 160, 811.

20. Philip D. Mannheim and James G. O'Brien. *Impact of a global quadratic potential on galactic rotation curves* // ArXiv:1007.0970v2 [astro-ph] 22 Nov 2010.

21. Cemsinan Deliduman, Oguzhan Kasikci and Baris Yapiskan. *Flat Galactic Rotation Curves from Geometry in Weyl Gravity* // ArXiv:1511.07731v3 [gr-qc] 30 Aug 2017.

22. Sobouti Y. *An $f(r)$ gravitation instead of dark matter* // ArXiv:0704.3345 [astro-ph]. 2007.

23. Tonatiuh Matosa, Dario Nunjez, F. Siddhartha Guzman, Erandy Ramirez. *Geometric conditions on the type of matter determining the flat behavior of the rotational curves in galaxies* // ArXiv: 0005528v2 [astro-ph] 22 May 2002.

24. Brownstein J. R. and Moffat J. W. *Galaxy Rotation Curves Without Non-Baryonic Dark Matter* // ArXiv: 0506370v4 [astro-ph] 22 Sep 2005.

25. Mannheim Ph. D. *Is dark matter fact or fantasy? – clues from the data* // ArXiv: 1903.11217v2 [astro-ph.GA] 5 May 2019.

26. Mannheim Ph. D. *Alternatives to Dark Matter and Dark Energy* // ArXiv: 9810028v4 [gr-qc] 7 Nov 1999.

27. Седов С. Ю. *Вейлевская гравитация и вейлоны* // ВАНТ. Сер. Теор. и прикл. физика. 2019. Вып. 4. С. 14–24.

28. Jee M. J. et. al. *Discovery of a Ringlike Dark Matter Structure in the Core of the Galaxy Cluster Cl 0024+17* // The Astrophysical Journal. 2007. V. 661, № 2. P. 728.

29. Рубаков В., Штерн Б. *Во славу тёмной материи* // Троицкий вариант, № 19 (263), 25 сентября 2018 г.

30. Брандышев П. Е., Фролов Б. Н. *Космологическая инфляция в конформной теории супергравитации* // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018, № 3. С. 4–18.

31. Vilenkin A., Shellard E. P. S. *Cosmic Strings and Other Topological Defects*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994.

32. Станюкович К. П., Мельников В. Н. *Гидродинамика, поля и константы в теории гравитации*. М.: Энергоатомиздат, 1983.

33. Shany Danieli, Pieter van Dokkum, Charlie Conroy, Roberto Abraham and Aaron J. Romanowsky. *Still Missing Dark Matter: KCWI High-resolution Stellar Kinematics of NGC1052-DF2* // The Astrophysical Journal Letters. 2019. Vol. 874, Number 2.

34. Keith Horne. *Conformal Gravity rotation curves with a conformal Higgs halo* // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2016. Volume 458. P. 4122–4128.

35. Горбатенко М. В., Седов С. Ю. *Сравнение конформных теорий гравитации по аналогам решений Райсснера–Нордстрема* // ВАНТ. 2019. Сер. Теор. и прикл. физика. Вып. 1. С. 51–59.

36. Mark Israelit. *A Weyl-Dirac cosmological model with DM and DE* // ArXiv: 1008.0767 [gr-qc]. 2009.

37. Бабурова О. В., Фролов Б. Н. *Математические основы современной теории гравитации: Монография*. М.: Прометей, 2012.

38. Pauli W. *Theory of relativity*. Pergamon Press. 1958.

39. Филиппов А. Т. *Аффинная гравитация Вейля–Эддингтона–Эйнштейна в контексте современной космологии* // ТМФ, 2010. Т. 163, № 3, С. 430–448.

40. Smolin, Lee. *Towards a theory of spacetime structure at very short distances*. Nuclear Physics B. 1979. N 160. P 253–268.

41. Cheng, Hung. *Possible existence of Weyl's vector meson*. Physical Review Letters 1988. N 61. P 2182–2184.

42. Rubakov V. A. *Harrison_Zeldovich spectrum from conformal invariance* // JCAP, 2009. 0909, 030. ArXiv:0906.3693.

43. Клапдор–Клайнротхаус Г. В., Цюбер К. *Астрофизика элементарных частиц*. М.: УФН, 2000.

44. Penrose R. In *Relativity, Groups and Topology*. Gordon and Breach. London, 1964;

Статья поступила в редакцию 27.05.2021