

ПРИМЕНЕНИЕ НЕОТРАЖАЮЩИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Д. А. Уткин, Е. С. Тятюшкина, А. С. Козелков, В. В. Курулин

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров

В статье представлены способы реализации неотражающих граничных условий для задач со свободной поверхностью, моделируемых системой уравнений Навье – Стокса и методом VOF. Приводится описание двух подходов реализации неотражающих граничных условий – за счет вычисления интегральных выражений и за счет формирования демпфирующего слоя. Данные подходы сравниваются на примере решения задачи распространения солитона.

Ключевые слова: неотражающие граничные условия, метод VOF, уравнения Навье – Стокса, течение со свободной поверхностью.

Введение

Решение задач вычислительной гидродинамики зачастую требует использования неотражающих граничных условий, имитирующих бесконечное пространство за пределами расчетной области. Использование неотражающих граничных условий особенно актуально для задач со свободной поверхностью. Типичная задача – распространение волн цунами на расчетных областях с открытыми границами. Существуют некоторые методы и алгоритмы введения в математическую модель неотражающих граничных условий.

Распространенным является метод, основанный на использовании интегральных выражений, полученных, например, через характеристики [1, 2], либо через схемы высокого порядка [3–5], в дальнейшем применяемых для неотражающих границ. Метод используется для математических моделей распространения волн, основанных на уравнениях мелкой воды. Опыт применения данного подхода изложен, например, в [1, 2, 4]. Такая методика требует, чтобы расчетная область была разбита на структурированные счетные ячейки. В докладе приводится обобщение этого метода на трехмерные неструктурированные сетки. Так, в [2] авторы демонстрируют результат применения данного метода на задачи со свободной поверхностью, демонстрируя способность реализованной процедуры имитировать открытую границу. Однако, для демонстрации эффективности метода авторами не приведено информации об интенсивности отраженных волн по сравнению с набегающими.

Широко применяется подход, заключающийся в формировании зоны демпфирования волн в приграничной подобласти [1, 6–8]. Он удобен в реализации и заключается в добавлении дополнительного источника импульса, который действует в установленной приграничной области и функционирует как поглотитель волн. В литературе данный метод часто именуется «пористым слоем» (sponge layer) [9] и доступен в современных коммерческих пакетах для решения задач со свободной поверхностью по методике VOF.

В докладе представлена реализация данных двух методов и их сравнительное применение для задачи о распространении волн.

1. Численный метод

1.1. Математическая модель

Рассматривается математическая модель для решения задач распространения волн, основанная на системе уравнений Навье – Стокса совместно с методикой VOF [10]. Предполагается, что течение изотермическое, а поле скорости общее для всех фаз. Учитывая данные допущения, получим систему уравнений, состоящую из уравнения сохранения массы, уравнения сохранения импульса и уравнения переноса объемной доли, которая в декартовых координатах имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \rho g_i, \\ \frac{\partial \alpha_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \alpha_w) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где i, j – нижние индексы, указывающие на принадлежность векторных компонент к декартовым координатам, $i, j = \{x, y, z\}$, ρ – средняя плотность, вычисляемая как $\rho = (\rho_w \alpha_w + \rho_a \alpha_a)$, w – (water) нижний индекс, указывающий на принадлежность к фазе «вода», a – (air) нижний индекс, указывающий на принадлежность к фазе «воздух», α_w – объемная доля воды, u_i – компонента вектора скорости, $i = \{x, y, z\}$, t – время, p – давление, x_i – компонента вектора декартовых координат, $i = \{x, y, z\}$, τ_{ij} – тензор вязких напряжений, который, согласно гипотезе Буссинеска, принимает вид:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad (2)$$

где μ – динамическая вязкость, δ_{ij} – символ Кронекера, g_i – компонента вектора ускорения свободного падения.

Система уравнений решается путем численного интегрирования на конечно-объемной расчетной сетке. Для дискретизации уравнений используется оригинальный полностью неявный метод решения уравнений Навье – Стокса для расчета многофазных течений со свободной поверхностью [3].

Для дискретизации уравнений по времени используется трехслойная схема второго порядка точности [11]. Дискретизация конвективных членов в уравнении движения осуществляется по противопоточной схеме LUD [11], в уравнении переноса объемной доли фаз – по схеме HRIC [12], позволяющей предотвращать излишнюю численную диффузию раздела фаз. Учет силы тяжести производится с использованием алгоритма, основанного на поправке объемных сил [13].

Для данной математической модели на базе отечественного пакета программ ЛОГОС [14] были реализованы методы неотражающих граничных условий, которые подробно представлены и рассмотрены в разделах 1.2 и 1.3.

1.2. Метод открытой границы

Рассмотрим подход, реализованный в работе [2] для методики VOF на базе уравнений Навье – Стокса. Реализация неотражающих граничных условий, имитирующих открытые границы, основана на их выводе из уравнений теории мелкой воды. Ключевыми параметрами в контексте данного вывода являются параметры скорости течения и глубины воды. Для этого уравнения мелкой воды раскладывают на систему независимых уравнений с помощью инвариантов Римана, получив тем самым

гиперболические уравнения в частных производных. Далее, с помощью метода характеристик, получают аналитическое решение. Это аналитическое решение накладывается на выбранную границу, таким образом, позволяя определять значения скорости и глубины на ней, основываясь на данных о приходящей волне и на данных об уровне жидкости за пределами расчетной области. Техника реализации этих граничных условий для методики VOF требует вычисления интегралов, связанных с величиной объемной доли в областях при неотражающей границе.

$$h_1^n = \frac{\int \alpha_1^n d\Omega}{\Omega} \quad u_{1,i}^{n*} = \frac{\int (\alpha_1^n u_{1,i}^n) d\Omega}{\Omega}, \quad (3)$$

где Ω – область интегрирования, являющаяся поверхностью неотражающей границы, α_1^n – объемная доля воды в слое ячеек, примыкающем к области Ω , $u_{1,i}^n$ – компонента скорости в слое ячеек, примыкающем к области Ω , h_1^n и $u_{1,i}^{n*}$ – значение глубины и скорости, вычисленные при области Ω .

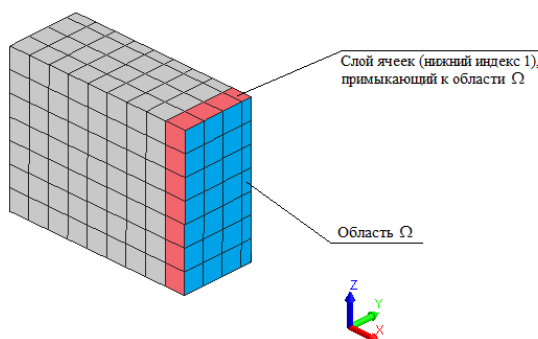


Рис. 1. Слой ячеек, примыкающий к области Ω

Величины, рассчитанные в (3), используются напрямую для вычисления значений объемной доли, а также скорости течения на рассматриваемой неотражающей границе:

$$h_b^n = \frac{1}{16|\bar{g}|} \left(2\sqrt{|\bar{g}|} h_\infty - u_1^n + 2\sqrt{|\bar{g}|} h_1^n \right)^2 \quad (4)$$

$$u_{b,i}^n = \frac{1}{2} \left(2\sqrt{|\bar{g}|} h_\infty + u_1^n - 2\sqrt{|\bar{g}|} h_1^n \right) \quad (5)$$

Величина объемной доли вычисляется по показаниям глубины воды h_b^n , рассчитанной на границе, относительно вертикальной оси z , которая, по условиям задачи, должна быть противоположно направлена вектору силы тяжести \bar{g} :

$$\alpha_b^n = \begin{cases} 0 & z \geq h_b^n \\ 1 & z < h_b^n \end{cases}$$

Основной вопрос, который связан с этим методом, заключается в том, как следует определить область для интегрирования в (3). Чтобы повысить точность вычисления этих интегралов, требуется разбивать область Ω неотражающей границы на несколько подобластей, по которым и следует вычислять интегралы. Данное обстоятельство накладывает ограничения на применяемую в численном моделировании расчетную сетку, а именно на слой ячеек, примыкающий к неотражающей границе. Далее следует рассмотреть особенности, связанные с этим алгоритмом – в качестве примера приводится граница, представленная на рис. 2:

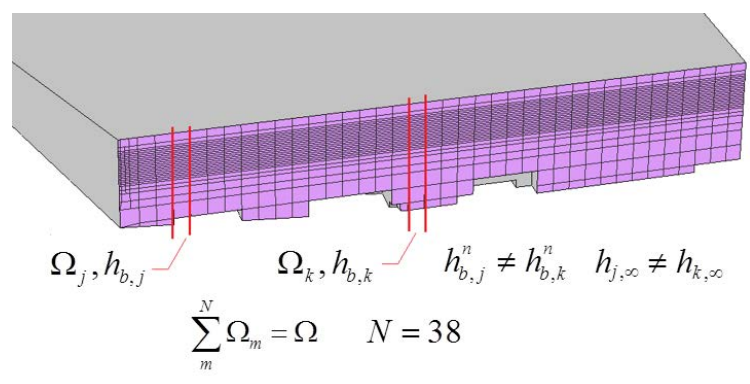


Рис. 2. Граница расчетной области

На рис. 2 представлен пример границы расчетной сетки, который рассматривается как неотражающая для рассмотренного метода. Данная расчетная область разбита на N подобластей для интегрирования Ω_m , причем подобласти не равны между собой, и глубина воды на границе $h_{b,m}^n$ вычисляется отдельно при каждой Ω_m . Помимо этого, требуется знать значение глубины воды за пределами расчетной области $h_{m,\infty}$, которая также изменяется при каждом отдельном участке Ω_m . Таким образом возрастает количество вычислительных операций для трехмерных задач, где неотражающая граница разбита на большое число подобластей Ω_m .

В таком виде данный метод был реализован, его применение для решения задач рассматривается в разделе 2.1.

1.3. Метод демпфирования волн

Метод демпфирования волн основан на использовании вблизи открытых границ демпфирующего приграничного слоя. В пределах данной зоны существует введенный источник импульса, задача которого заключается в том, чтобы уменьшить скорость проходящей в слой волны. Источник в общем случае может быть представлен формульным выражением:

$$I_i = -\max\left(\left(1 - \frac{dL}{L}\right); 0\right) \cdot k_{sour} \cdot u_i, \tag{6}$$

где I_i – значение источника для уравнения сохранения импульса для компоненты скорости u_i , x_b – координата границы расчетной области, dL – кратчайшее расстояние до свободной границы, L – ширина зоны демпфирования, k_{sour} – параметр дамппинга для источника. В данном методе свободными параметрами являются две величины: параметр k_{sour} и ширина демпфирующего слоя L . Данные параметры напрямую влияют на эффективность поглощения волн, и, следовательно, на амплитуду отраженных волн. Их оптимальные значения зависят от параметров проходящих волн: амплитуды волны, длины волны и глубины канала. Процедуре определения оптимального значения параметра U_{sour} и ширине демпфирующего слоя L посвящен раздел 2.2.

2. Численные эксперименты

2.1. Тестирование методики открытых границ

Для тестирования первого реализованного метода была выбрана задача распространения одиночной волны высотой H в водном бассейне. Волна с заданными параметрами распространяется от левой границы к правой неотражающей границе. Параметры волны: высота 0.32 м, длина канала 23 м, высота волны 0.064 м.

Начальный профиль волны задается следующей формулой:

$$\eta(x, 0) = H \operatorname{sech}^2(\gamma(x - X_s)),$$

где $\gamma = \sqrt{\frac{3H}{4d}}$, $L = X_s - X_0 = \frac{\operatorname{arccos} h(\sqrt{20})}{\gamma}$.

Начальная скорость волны равна $u(x, 0) = \sqrt{\frac{g}{d}} \eta(x, 0)$.

Для численного моделирования использовалась расчетная сетка, состоящая из 200 тысяч ячеек (рис. 3). Для более точного моделирования распространения волны сетка имеет сгущение к поверхности раздела фаз.



Рис. 3. Фрагмент расчетной сетки

В задаче участвует две фазы – вода и воздух. Плотность воды составляет 1000 кг/м^3 , молекулярная вязкость равна $0.001 \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$.

Показания мареографа, размещенного на расстоянии одной ширины волны от неотражающей границы, представлены на рис. 4.

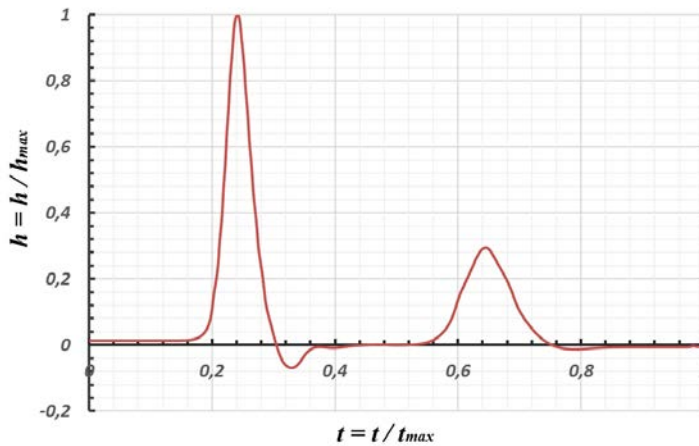


Рис. 4. Показания мареографа

На представленном графике проходящей волне соответствует участок $t < 0.5$. Отразившаяся волна наблюдается при $t > 0.5$. Видно, что амплитуда отраженной волны составляет 29 % от набегающей волны.

2.2. Определение оптимальных параметров для метода демпфирования волн

Для определения оптимальных параметров для метода демпфирования волн решалась задача из раздела 2.1.

Для определения оптимального значения параметра демпфирования k_{sour} , моделировалось распространение волны в каналах разной глубины. Рассматривались постановки, представленные в табл. 2.

Таблица 2

Постановки задачи

Постановка	Глубина канала, м	Длина канала, м	Высота волны, м	Длина волны, м	L , м
1	0.32	23	0.064	4.24	4
2	3.2	230	0.64	40.24	40
3	32	2300	6.4	402.4	400
4	320	23000	64	4024	4000

На первом этапе моделировалось распространение волны в каналах разной глубины для выбора оптимального параметра демпфирования k_{sour} , при котором амплитуда отраженной волны наименьшая. Затем при выбранной постоянной глубине канала варьировалась ширина зоны демпфирования L для одной длины волны.

На первом этапе рассмотрим четыре варианта постановки задачи, представленные в табл. 2. Для выбора оптимального параметра демпфирования сравнивалась амплитуда отраженной волны с амплитудой проходящей волны в мареографе, который находится вблизи зоны демпфирования.

На рис. 5 представлены графики сравнения амплитуды отраженной волны при различных параметрах демпфирования для каналов различной глубины.

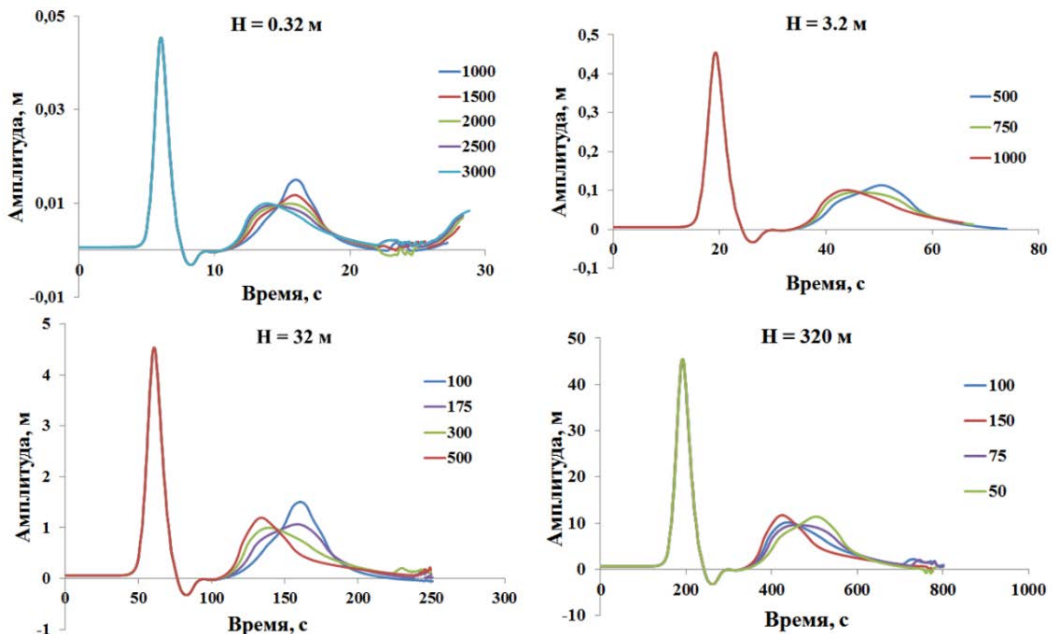


Рис. 5. Показания мареографа

По представленным графикам получены следующие результаты: оптимальный k_{sour} для глубины канала 0.32 м равен 2000 1/с, для глубины 3.2 м – 750 1/с, для глубины 32 м – 175 1/с, для глубины 320 м – 75 1/с.

Исходя из полученных данных, была подобрана зависимость параметра демпфирования от глубины канала (рис. 6):

$$k_{sour} = \frac{1.1 \cdot 10^3}{\sqrt{d}} \quad (7)$$

где d – глубина канала.

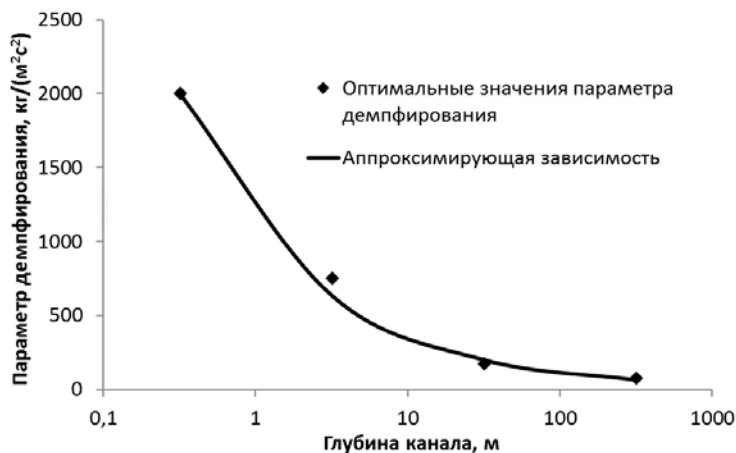


Рис. 6. Зависимость параметра демпфирования k_{sour} от глубины канала

Для определения оптимального значения ширины зоны демпфирования решалась задача с варьированием ширины зоны демпфирования L при неизменном параметре k_{sour} . Для этого был выбран канал глубиной 3,2 м, длиной 230 м, длина волны – 40,24 м, высота волны – 0,64 м, ширина зоны демпфирования L бралась равной одной, двум и трем длинам волн, параметр демпфирования $k_{sour} = 750$ 1/с – оптимальное значение для данной постановки, согласно проведенному исследованию и установленной зависимости (7).

На рис. 7 представлены показания мареографа, установленного в точке 100 м. Графики демонстрируют сравнение амплитуды приходящих в мареограф волн с амплитудой отраженных волн для трех вариантов постановок.

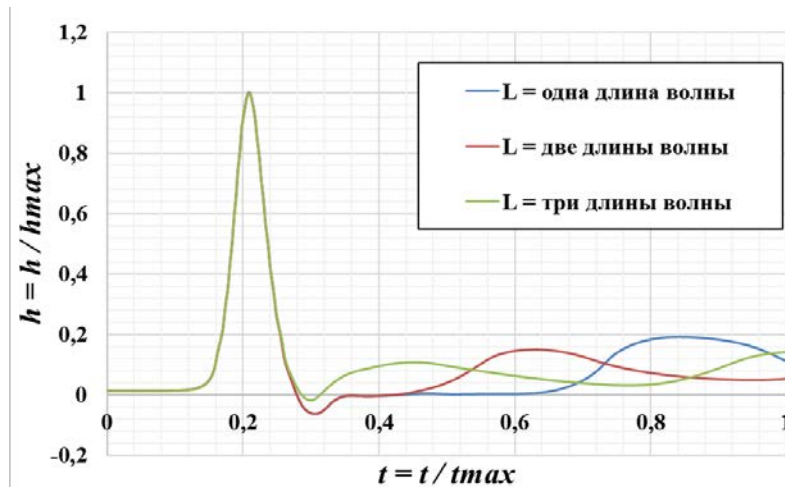


Рис. 7. Сравнение амплитуды приходящих волн с амплитудой отраженных волн

На рис. 7 показано, что при максимальной ширине слоя демпфирования, равному трем длинам волны, амплитуда отраженной волны наименьшая. Амплитуда отраженной волны составляет 18,9 % от амплитуды приходящей волны для первой постановки, 14,4 и 10 % – для второй и третьей соответственно.

По полученным результатам можно сделать вывод, что метод демпфирования волн является наиболее предпочтительным для решения реальных задач, поскольку данный метод возможно настроить для конкретной задачи за счет выбора оптимальных параметров демпфирования. В то время как метод открытой границы дал амплитуду отраженной волны в 29 % от амплитуды приходящей волны, метод зоны демпфирования дал результат в 10 % от амплитуды приходящей волны.

2.3. Использование неотражающих граничных условий для решения задачи распространения волн цунами

В качестве примера приводится численное моделирование схода подводного оползня в районе п-ова Камчатка. В результате схода оползня образуются волны, впоследствии натекающие на сам полуостров и на Командорские острова. На рис. 8 представлен вид сеточной модели для проведения численного расчета. Технология построения сеточных моделей для расчета волн цунами подробно изложена в [15, 16].

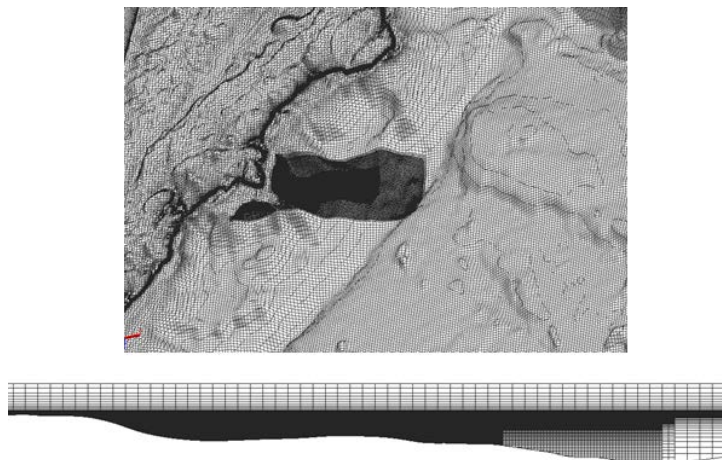


Рис. 8. Расчетная сетка в области источника цунами

В задаче применялась методика зоны демпфирования, где ширина зоны L задана равной двум длинам волн, а U_{sour} задан функцией вида (7). На рис. 9 представлена визуальная картина распространения волн в акватории. Визуализация картины течения зафиксирована по шкале минимальной и максимальной амплитуды волн.

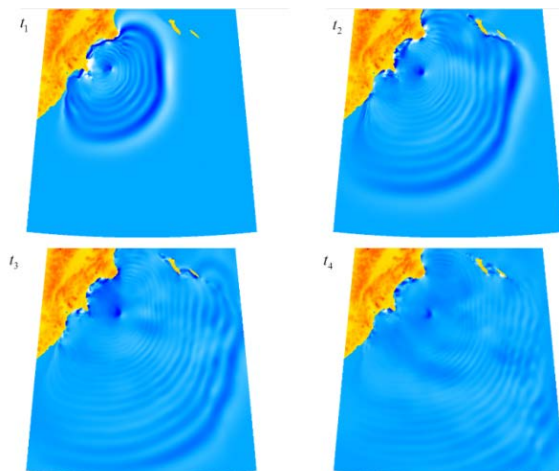


Рис. 9. Визуальная картина распространения волн в акватории п-ва Камчатка

На серии снимков, приведенных на рис. 9, можно наблюдать, как затухают волны, приближаясь к границам расчетной области, при этом отраженные волны, неизбежно образующиеся в процессе численного расчета, несущественно влияют на картину течения.

Заключение

В докладе рассмотрены методики реализации свободных границ для задач со свободной поверхностью. Описана реализация метода неотражающих граничных условий, основанного на методе характеристик – методе открытых границ. Показано, что метод не устраняет отраженные волны полностью и не может быть применен полноценно для решения задач на трехмерных неструктурированных сетках. Рассмотрена методика поглощения волн за счет формирования зоны демпфирования. На задаче распространения солитонной волны в канале были определены оптимальные параметры для метода зоны демпфирования. Было показано, что значение этих параметров определяется свойствами распространяемой волны и размерными масштабами решаемой задачи. Для демонстрации применения методики поглощения волн за счет зоны демпфирования решена задача распространения волн цунами в акватории полуострова Камчатка.

Литература

1. Kar S. K., Turco R. P. Formulation of a Lateral Sponge Layer for Limited-Area Shallow-Water Models and an Extension for the Vertically Stratified Case // *Mon. Wea. Rev.* 1994. Vol. 123. P. 1542–1559.
2. Fürst J., Musil J. Development of non-reflective boundary conditions for free-surface flows // *Topical problems of fluid mechanics*. Prague, 21-23 february, 2018. P. 97–104.
3. Подгорнова О. В. Построение дискретных прозрачных граничных условий для анизотропных и неоднородных сред: Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. Москва, 2008.
4. Givoli D., Neta B. High-order nonreflecting boundary conditions for the dispersive shallow water equations // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2003. Vol. 158. P. 49–60.
5. Овчарова А. С. Метод расчета стационарных течений вязкой жидкости со свободной границей в переменных вихрь-функция тока // *Прикладная механика и техническая физика*. 1998. Т. 39, № 2. С. 59–66.
6. Pant C. S., Bhattacharya A. A viscous sponge layer formulation for robust large eddy simulation of thermal plumes // *Computers and Fluids*. 2016. Vol. 134. P. 177–189.
7. Wang Y., Yin Z., Liu Y., Yu N., Zou W. Numerical investigation on combined wave damping effect of pneumatic breakwater and submerged breakwater // *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*. 2019. Vol. 11. P. 314–328.
8. Choi J., Yoon S. B. Numerical simulations using momentum source wave-maker applied to RANS equation model // *Coastal Engineering*. 2009. Vol. 56. P. 1043–1060.
9. Colombo A., Crivellini A. Assessment of a sponge layer non-reflecting boundary treatment for high-order CAA/CFD computations // *Computers and Fluids*. 2016. Vol. 140. P. 478–499.
10. Дородницын Л. В. Неотражающие граничные условия для систем уравнений газовой динамики // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2002. Т. 42, № 11. С. 522–549.
11. Jasak H. Error Analysis and Estimation for the finite volume method with applications to fluid flows. Thesis submitted for the degree of doctor. – Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, 1996.
12. Ubbink O. Numerical prediction of two fluid systems with sharp interfaces. PhD thesis. – Imperial College, University of London, 1997.
13. Ефремов В. Р., Козелков А. С., Корнев А. В., Куркин А. А., Курулин В. В., Стрелец Д. Ю., Тарасова Н. В. Метод учета сил гравитации при моделировании течений со свободной поверхностью // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2017. Т. 57, № 10.
14. Козелков А. С., Курулин В. В., Лашкин С. В., Шагалиев Р. М., Ялозо А. В. Исследование потенциала суперкомпьютеров для масштабируемого численного моделирования задач гидродинамики в промышленных приложениях // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2016. Т. 56, № 8. С. 1524–1535.
15. Козелков А. С. Методика численного моделирования цунами оползневой типа на основе уравнений Навье-Стокса // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2016. Т. 9, №2. С. 218–236.

16. Kozelkov A. S., Kurkin A. A., Pelinovsky E. N., Tyatyushkina E. S., Kurulin V. V., Tarasova N. V., Landslide-type tsunami modelling based on the Navier-Stokes Equations // Science of tsunami Hazards, Journal of Tsunami Society International. 2016. Vol. 35, № 3. P. 106–144.
17. Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости. М.: Мир, 1964.

APPLICATION OF NON-REFLECTIVE BOUNDARY CONDITIONS IN NUMERICAL MODELING OF FREE-SURFACE FLOW PROBLEMS

D. A. Utkin, E. S. Tyatyushkina, A. S. Kozelkov, V. V. Kurulin

Russian Federal Nuclear Center –
All-Russian Scientific Research Institute of Experimental Physics, Sarov

The paper describes implementations of non-reflective boundary conditions for free-surface problems simulated using the Navier-Stokes equations and the VOF method. Two implementation approaches for the non-reflective boundary conditions are described: calculation of integral expressions and creation of a damping layer. These approaches are compared based on the simulation of a soliton propagation problem.

Key words: Non-reflective boundary conditions, VOF method, Navier-Stokes equations, free-surface flow.