УДК 519.65
DOI 10.53403/9785951505071_2022_61

НЕЙРОСЕТЕВОЙ АЛГОРИТМ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В. Б. Бетелин[1], *В. А. Галкин*[2], *А. О. Дубовик*[2]

[1]Федеральный научный центр НИИ системных исследований РАН, Москва
[2]Сургутский филиал ФНЦ НИИСИ РАН, Сургут

В данной работе исследуется аспекты построения нейронных сетей на примере решения задачи о поиске вейвлет-разложения для функций одной переменной. Нейронная сеть строится с помощью библиотеки машинного обучения TensoFlow. Результаты работы показали, что созданная нейронная сеть более точно справляется с решением задачи построения вейвлет-разложения, чем имеющиеся готовые библиотеки при небольшом наборе входных данных.

Ключевые слова: нейронные сети, вейвлет-преобразование.

Исследование эффективных методов нахождения вейвлет-преобразования связано с поиском наиболее экономичных алгоритмов сжатия данных различных типов, при этом, данные необходимо восстанавливать с наименьшими потерями. В качестве приложении вейвлет-преобразований также необходимо указать исследование нестационарных сигналов, неоднородных полей и изображений, распознавание образов и т. д. [1].

Вейвлет преобразованием функции одной переменной называется представление ее в виде обобщенного ряда по системе базисных функций вида

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \tag{1}$$

обладающего определенными свойствами за счет сдвига по времени и изменения временного масштаба, множитель $1/\sqrt{a}$ обеспечивает независимость нормы функции от масштабирующего коэффициента [1]. Функция $\psi(t)$ называется материнским вейвлетом и может быть выбрана произвольно. Обычно на нее накладывают следующие свойства: ограниченности нормы, локализации, среднее значение равно нулю и самоподобность [1–3].

В данной работе поиск вейвлет-разложения функций одной переменной осуществляется с помощью нейронной сети, а накладываемые обычно ограничения на материнские вейвлеты при таком подходе являются слишком обременительными и их выполнение в дальнейшем не предполагается.

Поиск вейвлет-разложения для произвольных непрерывных функций $y = f(x)$, определенных на отрезке [–1;1]. В качестве материнских вейвлетов использовались следующие функции:

$$\psi_{ab}(x) = \sin(ax+b), \tag{2}$$

$$\psi_{ab}(x) = (ax+b)\exp\left\{\frac{(ax+b)^2}{2}\right\}. \tag{3}$$

Работа любой нейронной сети может рассматриваться как решение задачи нелинейной оптимизации. Нейронная сеть состоит, как правило, из нескольких слоев, каждый из которых, в свою очередь, состоит из нескольких нейронов. Вся нейронная сеть представляет собой суперпозицию отображений. Каждый слой сети функционирует как отображение в конечномерном векторном пространстве $X \to f(AX+B)$, где $X = \{x_1,...,x_n\}^T$ – входной сигнал или вектор входных данных, $AX+B = \{a_{ij}x_j + b_i\}^T$ – линейное преобразование над вектором входных данных, $A = \{a_{ij}\}$ – матрица весовых коэффициентов, $B = \{b_1,...,b_n\}^T$ – сдвиг, $f = \{f_1(a_{1j}x_j + b_1),..., f_n(a_{nj}x_j + b_n)\}$ – вектор-функция активация для слоя. Слой состоит из n нейронов, каждый из которых функционирует как отображение $X \to f_i(a_{ij}x_j + b_i)$, т. е. отображение $R^n \to R$. В общем случае для каждого слоя матрица линейного преобразования A, сдвиг B и вектор-функция активация f различны.

Известно, что решение задачи поиска вейвлет-разложения функций одной переменной может быть реализовано с помощью двухслойной нейронной сети [2]. При этом для первого слоя компоненты вектор-функции активации совпадают с материнским вейвлетом (2) или (3), т. е. $f_1 = ... = f_n = \psi_{ab}$. При решении задачи разложения по системе функций вида (3) использовалась библиотеки TensorFlow (https://www.tensorflow.org), реализующей работу нейронной сети. Нейросетевой алгоритм разложение по системе функций (2) был реализован самостоятельно. В обоих случаях алгоритм работы нейронной сети идентичен и представлен на рис. 1.

Рис. 1. Алгоритм работы нейронной сети

На вход нейронной сети (нулевой слой) подается таблица значений функции, подлежащей аппроксимации. Инициализируются весовые коэффициенты случайным образом. Если при решении задачи аппроксимации известны K значений исходной функции, то матрица A – квадратная и диагональная порядка $2K$. Количество нейронов на первом слое равняется $N \times 2K$, где N – количество членов разложения в ряд. На втором слое количество нейронов равняется $2K$ и вычисляется приближенное значение аппроксимируемой функции для каждой компоненты вектора входных данных X. Итого на каждой итерации (эпохе) вычисляется приближенное выражение

$$f_{calc}(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \psi_{a_i b_i}(x).$$

Оценивается ошибка разложения

$$\|f - f_{calc}\|_{L_2} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(f(x) - f_{calc}(x)\right)^2 dx}. \qquad (4)$$

Если погрешность является удовлетворительный, то процесс останавливается, если нет, то весовые коэффициенты, к которым относятся параметры $\{a_i, b_i\}$, изменяются. При этом решается задача минимизации функции многих переменных градиентным методом. В случае вейвлет-разложения по системе функций (2) для решения задачи многомерной оптимизации метод градиентного спуска реализовался самостоятельно, а при разложении по системе функций (3) использовался метод из библиотеки TensorFlow.

Тестовые расчеты с материнским вейвлетом (2) проведены при $f(x) = x$ (рис. 2), и $f(x) = x^2$ (рис. 3), ряд ограничивался в обоих случаях 11 членами. В обоих случаях потребовалась ≈300, погрешность составила 0.02. Сходимость алгоритма сильно зависит от начального приближения.

Если сравнивать с разложением в ряд Фурье (рис. 2, 3) (коэффициенты вычислены аналитически), то при том же количестве членов разложения 11, ошибка разложения будет составлять 1.7 и 0.02 соответственно. Чтобы добиться точности разложения порядка 0.02 как при расчетах (рис. 2), необходимо использовать 5000 членов разложения в ряд Фурье.

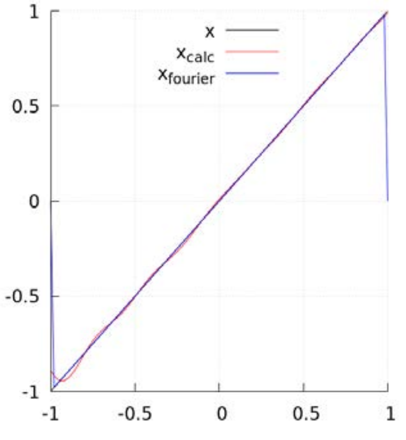

Рис. 2. Результаты расчетов разложения $f(x) = x$

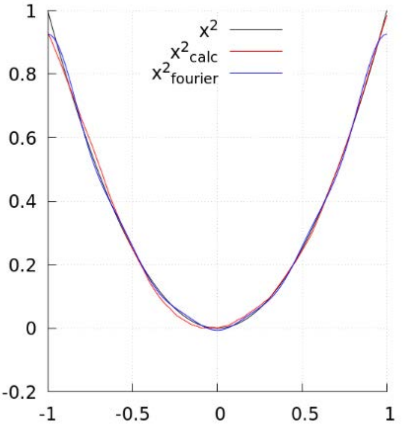

Рис. 3. Результаты расчетов разложения $f(x) = x^2$

Далее приводятся результаты апробации алгоритма (рис. 1) для материнского вейвлета (3), полученные при использовании библиотеки TensorFlow. Результаты работы алгоритма сравнивались с работой готовой библиотекой поиска вейвлет-разложения PyWavelets (https://pywavelets.readthedocs.io), в частности, в этой работе использовалась возможность библиотеки нахождения дискретного вейвлет-разложения. Результаты представлены в табл. 1 и сравнивались по нескольким показателям: $h = \dfrac{b-a}{K-1}$ – шаг сетки, $b-a$ есть длина интервала области определения аппроксимируемой функции, а K – число узлов разбиения отрезка $[a, b]$; точность вычисления ε_{HC} для нейронной сети и ε_{PW} для библиотеки PyWavelets , оценивалась согласно (4); M – количество эпох (итераций алгоритма). Количество членов разложения в ряд $N = 16$.

На рис. 4 представлены результаты работы нейронной сети по решению задачи аппроксимации, соответствующей последней строчке табл. 1, а на рис. 5 – аппроксимация с помощью библиотеки PyWavelets. Результаты табл. показывают, что точность разложения, получаемого нейронной сетью совсем немного уступает работе библиотеки PyWavelets на мелких сетках, но в отличие от нее на более крупной сетке (меньшее число нейронов) ее точность практически не меняется, в то время как, для библиотеки PyWavelets точность ухудшается в десять раз.

Таблица 1

Погрешность решения задачи аппроксимации нейронной сетью

Функция	h	M	ε_{HC}	ε_{PW}
$f(x)=x$	0.002	100	0.001	0.001
$f(x)=x$	0.02	1000	0.002	0.01
$f(x)=x^2$	0.002	100	0.004	0.001
$f(x)=x^2$	0.02	1000	0.004	0.01
$f(x)=x^3$	0.002	100	0.005	0.002
$f(x)=x^3$	0.02	1000	0.01	0.02
$f(x)=\sin x$	0.002	100	0.004	0.0007
$f(x)=\sin x$	0.02	1000	0.006	0.007

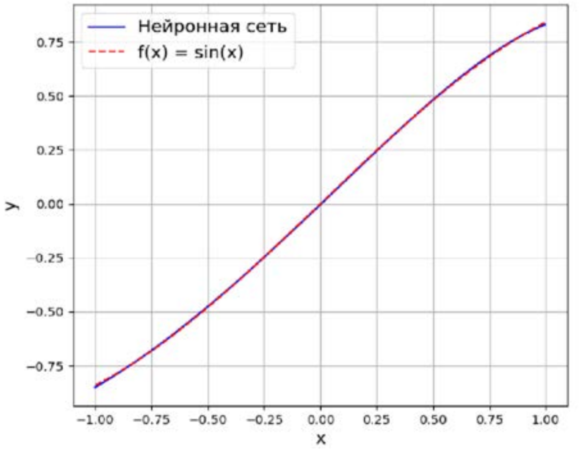

Рис. 4. Аппроксимация нейронной сетью функции $f(x)=\sin x$

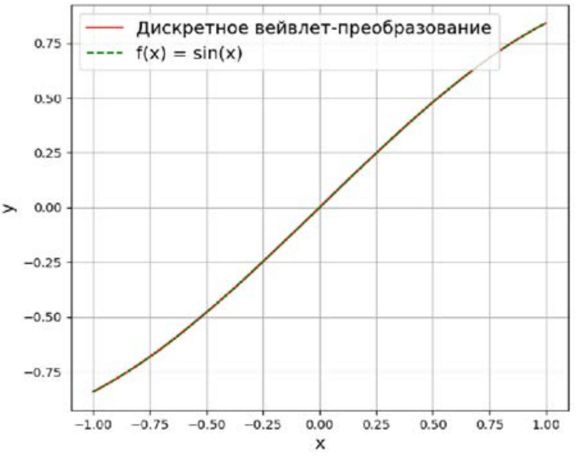

Рис. 5. Аппроксимация библиотекой PyWavelets функции $f(x)=\sin x$

Публикация выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (Проведение фундаментальных научных исследований (47 ГП) по теме № 0065-2019-0007 "36.20 Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления." (№АААА-А19-119011590093-3)).

Литература

1. Яковлев А. Н. Введение в вейвлет-преобразование: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во. НГТУ. 2003.

2. Терехов С. А. Вейвлеты и нейронные сети // Научная сессия МИФИ – 2001. III Всерос. начн.-техн. конф. «Нейроинформатика-2001»: лекции по нейроинформатике. М.: МИФИ. 2001. С. 142–181.

3. Нагорнов. О. В. и др. Вейвлет-анализ в примерах: учебн. пособие. М.: НИЯУ МИФИ. 2010.

NEURAL NETWORK ALGORITHM FOR WAVELET TRANSFORMATION OF FUNCTIONS OF ONE VARIABLE

V. B. Betelin[1], *V. A. Galkin*[2], *A. O. Dubovik*[2]

[1] Scientific Research Institute for System Analysis RAS, Moscow
[2] Surgut Branch, SRISA RAS, Surgut

This paper examines aspects of the construction of neural networks by the example of solving the problem of finding a wavelet decomposition for functions of one variable. The neural network is built using the TensoFlow machine learning library. The results of the work showed that the created neural network copes more accurately with the solution of the problem of constructing a wavelet decomposition than the existing ready-made libraries with a small set of input data.

Key words: neural networks, wavelet transform.