

УДК 519.6

# Применение ограничителей градиента при решении уравнений Навье – Стокса на произвольных неструктурированных сетках

С. В. Лашкин, А. С. Козелков, Е. В. Глазунова,  
Н. В. Тарасова, А. В. Ялозо

*Анализируется применение ограничителей градиента на произвольных неструктурированных сетках применительно к конечно-объемным методам дискретизации уравнений Навье–Стокса с помощью алгоритма SIMPLE. Рассматривается влияние ограничителей на точность получаемых результатов с использованием градиентных конвективных схем второго порядка, в т. ч. их влияние на точность вычисления градиента итерационным алгоритмом Грина–Гаусса. Приводятся расчеты сжимаемых и несжимаемых течений на сетках различной топологии. Даны рекомендации по оптимальному использованию ограничителей при численном решении задач алгоритмом SIMPLE.*

## Введение

Одним из универсальных алгоритмов математического моделирования течений жидкости и газа является SIMPLE [1, 2], использующий расщепленную систему уравнений Навье – Стокса (pressure-based algorithm). Робастность данного алгоритма напрямую зависит от устойчивости схем повышенной разрешающей способности при дискретизации конвективного слагаемого, входящего в уравнение сохранения количества движения. Применение таких схем обязательно в расчетах с использованием вихреразрешающих моделей турбулентности, течений с ударными волнами, волнами разрежения и т. д., поскольку использование в таких расчетах схем первого порядка хотя и повышает «надежность» расчета, но зачастую приводит к чрезмерному «размазыванию» решения [3, 4]. Достаточно большое количество схем было предложено для блочно-структурированных [5] и произвольных неструктурированных сеток [6]. Основным недостатком большинства разработанных схем высокого порядка для дискретизации конвективного слагаемого является их неустойчивость и получение нефизических, осцилляционных результатов при решении верификационных и практических задач на произвольных неструктурированных сетках [7].

Дальнейшие усилия в разработке и реализации схем повышенной разрешающей способности связаны с улучшением свойств диссипативности и дисперсии при аппроксимации конвективных потоков. Повышение точности схем, без потери их строгого математического обоснования достигается заменой условия сохранения монотонности на условие уменьшения полной вариации

(Total Variation Diminishing, TVD) [8]. Чтобы удовлетворить этому условию, вводится скалярный ограничитель градиента искомой функции, зависящий от локальных свойств решения.

В основном, ограничители градиента используются в противопотоковых схемах второго порядка точности [8, 9], что должно предотвращать ложные осцилляции, часто возникающие при решении течений с ударными волнами, волнами разрежения и т. д. В этом случае ограничители градиента предотвращают выход значения величины на грани контрольного объема, получаемой при градиентной реконструкции, за пределы минимума и максимума значений поля в ячейках, образующих данную грань [10].

Ограничители градиента возможно использовать и при вычислении самого градиента итерационным методом Грина – Гаусса [11]. Такой подход обеспечивает более «точное» вычисление градиента по сравнению с одноитерационным. В многочисленных работах, посвященных способам вычисления градиента с использованием ограничителей, можно найти разнообразные подходы, в т. ч. и основанные на узловом представлении сеточной модели [10, 12–15].

В настоящей работе рассмотрены два способа применения ограничителей градиента для численного решения уравнений Навье – Стокса на произвольных неструктурированных сетках на основе алгоритма SIMPLE. Первый вариант основан на использовании ограничителей градиента при дискретизации конвективного слагаемого в уравнении сохранения количества движения, второй предполагает использование ограничителя при вычислении градиента итерационным алгоритмом Грина – Гаусса. При этом в качестве скалярного ограничителя градиента использовались три лимитирующие функции [10, 12, 16].

## ***1. Вычисление ограничителей градиента на произвольных неструктурированных сетках***

Способы вычисления скалярного ограничителя градиента на произвольных неструктурированных сетках – достаточно популярное направление исследований. В последние десятилетия опубликованы десятки работ, среди которых можно отметить обзоры [8, 9, 17]. Основная задача ограничителей градиента – подавлять осцилляции, возникающие при решении течений с высокими градиентами расчетных величин на неструктурированных сетках.

Суть алгоритма расчета ограничителей состоит в отыскании такого значения ограничителя, чтобы при использовании градиентной реконструкции величины на произвольную грань ее значение не выходило за пределы минимума и максимума окружающих ее контрольных объемов:

$$\min(\varphi_N, \varphi_P) \leq \varphi_P + \alpha_P (\nabla \varphi_P \cdot \mathbf{d}_{Pf}) \leq \max(\varphi_N, \varphi_P), \quad (1)$$

где  $\varphi_P$  – значение величины в центре контрольного объема  $P$ ,  $\varphi_N$  – значение величины в центре соседнего с  $P$  контрольного объема  $N$ ,  $\alpha_P$  – скалярный ограничительный коэффициент ( $0 \leq \alpha_P \leq 1$ ),  $\nabla \varphi_P$  – градиент величины  $\varphi$  в ячейке  $P$ ,  $\mathbf{d}_{Pf}$  – вектор расстояния между центром текущей ячейки и соответствующей гранью (рис. 1).

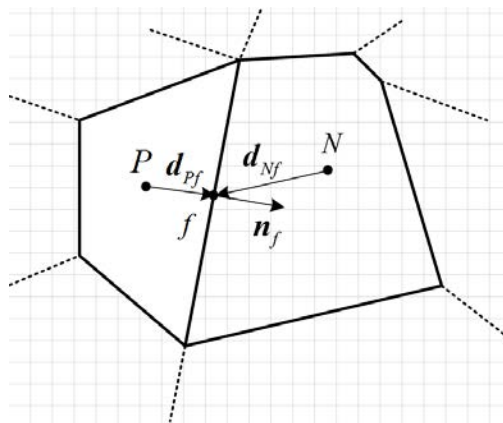


Рис. 1. Картина контрольного объема  $P$

Согласно [10], для выполнения данного неравенства вычисляются максимальное и минимальное значения величины  $\varphi$  среди всех контрольных объемов окружающих данную ячейку  $P$ , в т. ч. и для самой ячейки  $P$ :

$$\begin{aligned} \varphi_P^{\max} &= \max(\varphi_P, \varphi_{N1}, \varphi_{N2}, \dots), \\ \varphi_P^{\min} &= \min(\varphi_P, \varphi_{N1}, \varphi_{N2}, \dots). \end{aligned} \quad (2)$$

Далее вычисляются значения максимального  $\Phi_P^{\max}$  и минимального  $\Phi_P^{\min}$  приращений величины относительно исходной ячейки  $P$

$$\begin{aligned} \Phi_P^{\max} &= \varphi_P^{\max} - \varphi_P, \\ \Phi_P^{\min} &= \varphi_P^{\min} - \varphi_P. \end{aligned} \quad (3)$$

После этого вычисляется приращение величины из исходного контрольного объема  $P$  на каждую его грань следующим образом:

$$\Delta_f = \nabla \varphi_P \mathbf{d}_{Pf}. \quad (4)$$

На основании величин максимального и минимального приращения для каждой грани вычисляется коэффициент  $r_f$ , используемый для конструирования лимитирующей функции при расчете ограничительного коэффициента  $\alpha_P$  (1):

$$r_f = \begin{cases} \frac{\Phi_P^{\max}}{\Delta_f}, & \text{если } \Delta_f > 0, \\ \frac{\Phi_P^{\min}}{\Delta_f}, & \text{если } \Delta_f < 0, \\ 1, & \text{если } \Delta_f = 0. \end{cases} \quad (5)$$

В данной работе описанный алгоритм является основным при вычислении ограничителя градиента, хотя существуют и другие вариации алгоритма, в т. ч. и с использованием узлов, образующих контрольный объем [10].

### 1.1. Лимитирующие функции

В алгоритме вычисления ограничительного коэффициента используется та или иная лимитирующая функция. На текущий момент известно и опубликовано более десятка разнообразных лимитирующих функций, обзор которых приведен в работе [11]. Здесь будем использовать три хорошо известные лимитирующие функции: [10, 12, 16]. Функция Barth and Jespersen, впервые предложенная в [10], записывается в виде

$$\alpha_f = \min(r_f, 1), \quad (6)$$

где  $r_f$  – коэффициент, рассчитываемый по формуле (4), и  $\alpha_f$  – ограничительный коэффициент для грани  $f$ .

Вторая исследуемая лимитирующая функция Van Leer относится к семейству нелинейных (дифференциальных) функций [12]

$$\alpha_f = \min\left(\frac{r_f r_f + r_f}{r_f \cdot r_f + 1}, 1\right). \quad (7)$$

Третья лимитирующая функция Venkatakrishnan также относится к семейству нелинейных функций ограничения и предложена в [15]

$$\alpha_f = \min\left(\frac{r_f r_f + 2r_f}{r_f r_f + r_f + 2}, 1\right). \quad (8)$$

Окончательно величина ограничительного коэффициента для ячейки  $P$  рассчитывается как минимум значений  $\alpha_f$  на гранях, образующих исходную ячейку:

$$\alpha_P = \min(\alpha_{f_1}, \alpha_{f_2}, \dots). \quad (9)$$

На рис. 2 для каждой лимитирующей функции приведены диаграммы Sweby [14], показывающие зависимости значения ограничителя градиента  $\alpha_f$  от коэффициента  $r_f$ . Значение  $\alpha_f = 0$  соответствует схеме первого порядка,  $\alpha_f = 1$  – схеме второго порядка.

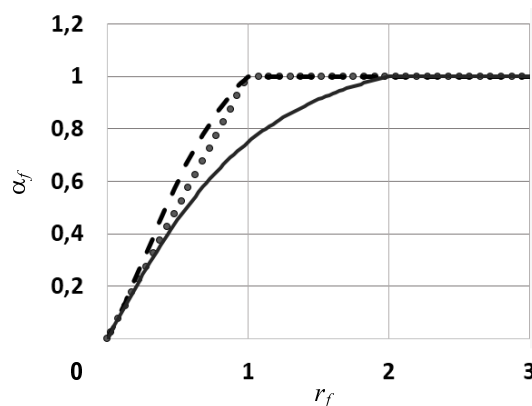


Рис. 2. График зависимости функции ограничителя от коэффициента  $r_f$ : • – Barth and Jespersen, — — — — Venkatakrishnan, — — — — Van Leer

Видно, что самая строгая функция ограничения – это функция Venkatakrishnan, делающая переход к схеме второго порядка позже всех (при  $r_f = 2$ ).

### 1.2. Ограничители в конвективных схемах

Основные уравнения, решаемые с помощью алгоритма SIMPLE, это уравнения неразрывности и сохранения количества движения, описывающие течения вязкой жидкости:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla(\boldsymbol{\tau}_\mu + \boldsymbol{\tau}_t), \end{cases} \quad (10)$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор скорости,  $\rho$  – осредненная плотность,  $p$  – давление и  $\boldsymbol{\tau}_\mu$ ,  $\boldsymbol{\tau}_t$  – молекулярная и турбулентная составляющие тензора вязких напряжений.

Рассмотрим дискретизацию конвективного (второго) слагаемого в уравнении сохранения количества движения [1, 18]. Ограничители градиента используются при вычислении компонент вектора скорости по схеме второго порядка. Применяя метод контрольного объема к конвективному слагаемому, получаем

$$\sum_{f=nb(P)} (\rho \mathbf{u}^n \mathbf{S}_f) \mathbf{u}_f^{n+1}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{S}_f$  – вектор-площадь грани  $f$ ,  $\rho_f \mathbf{u}_f^n \mathbf{S}_f$  – массовый поток через грань  $f$  на предыдущем итерационном шаге  $n$ ,  $\mathbf{u}_f^{n+1}$  – вектор скорости на новом итерационном шаге  $n+1$ , вычисляемый по схеме высокого порядка. В формуле (11) суммирование происходит по всем граням  $f = nb(P)$ , образующим контрольный объем  $P$ .

Точность вычисления скорости  $\mathbf{u}_f^{n+1}$  напрямую влияет на точность получаемого результата. Однако использование схем высокого порядка на произвольных неструктурированных сетках для данного слагаемого может приводить к осцилляциям решения или вообще невозможности получения стационарного решения [7]. Как показывает вычислительная практика, лучше использовать схемы с отложенной коррекцией [19] и вводить фактор смешивания

$$\mathbf{u}_f^{n+1} = (\mathbf{u}_f^{n+1})^{UD} + \beta \left( (\mathbf{u}_f^n)^{HO} - (\mathbf{u}_f^n)^{UD} \right), \quad (12)$$

где  $(\mathbf{u}_f^{n+1})^{UD}$  – величина вектора скорости по противопотоковой схеме первого порядка точности  $UD$ ,  $(\mathbf{u}_f^n)^{HO}$  – величина вектора скорости по схеме высокого порядка, например, по центрально-разностной схеме (CD),  $\beta$  – фактор смешивания между схемами первого и высокого порядка. Значения для  $\beta$  задаются в диапазоне  $[0, 1]$ : при значении  $\beta = 0$  схема с отложенной кор-

рекция становится схемой первого порядка, при  $\beta = 1$  – схемой высокого порядка. Стоит отметить, что данный подход можно использовать и для «смешивания» схем только высокого порядка, например CD и QUICK [19]. Метод отложенной коррекции не является универсальным, так как величина  $\beta$  является постоянной и меняет порядок точности схемы для всей расчетной области.

Схемы семейства TVD, в отличие от описанного выше метода отложенной коррекции, позволяют менять порядок схемы только там, где это необходимо, например, в областях высоких градиентов скорости, возникающих на фронте ударной волны. Вариант такой схемы на примере противопотоковой схемы с линейной интерполяцией второго порядка точности (Linear Upwind Differences, LUD) [11] запишется в виде

$$\varphi_f = \begin{cases} \varphi_P + \alpha_P \nabla \varphi_P \mathbf{d}_{Pf}, & \text{если } m_f \geq 0, \\ \varphi_N + \alpha_N \nabla \varphi_N \mathbf{d}_{Nf}, & \text{если } m_f < 0, \end{cases} \quad (13)$$

где  $\mathbf{d}_{Nf}$  – вектор расстояния от центра ячейки  $N$  до центра грани  $f$ ,  $\alpha_N$  – ограничительный коэффициент в ячейке  $N$ ,  $m_f$  – массовый поток через грань  $f$ . Использование данного варианта схемы не позволяет значениям величин на гранях выходить за пределы минимума и максимума значений величин в соседних контрольных объемах. Такой подход позволяет использовать схемы высокого порядка практически во всей расчетной области и одновременно «подавлять» ложные осцилляции в областях высоких градиентов, где порядок схемы может понижаться до первого.

В своей работе мы будем использовать данную схему дискретизации конвективного слагаемого в алгоритме SIMPLE при решении всех численных экспериментов, приведенных далее.

### 1.3. Ограничители в вычислении градиента

Точность вычисления градиента компонент скорости и давления является важным фактором при численном решении нелинейной системы уравнений Навье – Стокса, особенно при трансзвуковых и сверхзвуковых течениях, где сила трения, зависящая от градиентов компонент скорости, играет существенную роль при оценке аэродинамических характеристик. Более того, производные скоростей используются практически во всех полуэмпирических RANS моделях турбулентности и влияют на получаемую величину турбулентной вязкости.

Одним из широкоизвестных и применяемых на практике методов вычисления градиента в конечно-объемных кодах является алгоритм Грина – Гаусса, использующий следующую формулировку [11]:

$$\nabla \varphi_P = \frac{1}{V} \sum_{f=nb(P)} \varphi_f S_f, \quad (14)$$

где  $\varphi_f = \frac{\varphi_P + \varphi_N}{2}$  – значение величины на грани  $f$  контрольного объема  $P$ , вычисляемое простым арифметическим усреднением.

Дальнейшее уточнение значения градиента в ячейке требует модификации исходного алгоритма введением дополнительных итераций (их количество зависит от желаемой точности)

$$\nabla \varphi_P^k = \sum_{k=1}^M \frac{1}{V} \sum_{f=nb(P)} \varphi_f^k S_f \quad (15)$$

и изменением способа вычисления скалярной величины  $\varphi_f^k$  на грани контрольного объема на второй и последующих итерациях  $k$ . Здесь  $M$  – общее количество итераций в вычислении градиента. Таким образом, на первой итерации величина  $\varphi_f^{k=1} = \frac{\varphi_P + \varphi_N}{2}$ , на второй и последующих итерациях для вычисления  $\varphi_f^k$  используется следующая формулировка:

$$\begin{aligned}\varphi_f^k &= \frac{\varphi_{f,P}^k + \varphi_{f,N}^k}{2}, \\ \varphi_{f,P}^k &= \varphi_P + \alpha_P \left( \nabla \varphi_P^{k-1} d_{Pf} \right), \\ \varphi_{f,N}^k &= \varphi_N + \alpha_N \left( \nabla \varphi_N^{k-1} d_{Nf} \right),\end{aligned}\tag{16}$$

где  $\varphi_{f,P}^k$  – величина на грани со стороны ячейки  $P$ ,  $\varphi_{f,N}^k$  – величина на грани со стороны ячейки  $N$ ,  $\nabla \varphi_P^{k-1}$  и  $\nabla \varphi_N^{k-1}$  – градиенты в контрольных объемах  $P$  и  $N$  соответственно с предыдущей итерации  $k-1$ . Как и для вышеописанной схемы высокого порядка LUD, использование ограничителей градиента в исходной схеме не позволит величине  $\varphi_f$  выходить за пределы минимума и максимума значений в соседних контрольных объемах.

В настоящей работе используется три итерации для вычисления градиента величин скорости и давления, применяющихся в уравнении движения (10). По нашему опыту, дальнейшее увеличение итераций не приводит к существенному повышению точности, при этом нерационально расходуя вычислительные ресурсы.

## 2. Численные эксперименты

Представленная методика реализована в пакете программ ЛОГОС – программном продукте, предназначенном для решения сопряженных трехмерных задач конвективного теплопереноса, аэродинамики и гидродинамики на параллельных ЭВМ [18, 20–23]. Параллельная реализация модели основана на алгебраическом многосеточном методе [20, 22], позволяющем эффективно использовать сотни вычислительных ядер, а также существенно улучшить сходимость численного метода [20]. Пакет программ ЛОГОС ориентирован на решение задач вычислительной гидродинамики на произвольных неструктурированных сетках [24], он успешно прошел верификацию и показал достаточно хорошие результаты на серии различных гидродинамических задач [20, 21, 24, 25], включая расчеты турбулентных и нестационарных течений [3–6, 26, 32], а также геофизических явлений [27–29, 35].

Во всех представленных далее расчетах использовалась модель турбулентности  $k$ - $\omega$  SST с автоматическим определением ширины пограничного слоя [30].

### 2.1. Течение в канале за обратным уступом

Исследование применимости ограничителей градиента при расчете несжимаемых турбулентных течений приводится на задаче о течении за обратным уступом [31] с числом Рейнольдса

$Re = 2,1 \cdot 10^4$ . Детальный численный анализ данной задачи на сетках различной структуры представлен в работах [4, 25, 32].

В численном эксперименте использовались три типа трехмерных расчетных сеток (исходная постановка задачи – двумерная), а именно: гексагональная ( $1,125 \cdot 10^6$  ячеек), полиэдральная ( $1,05644 \cdot 10^6$  ячеек) и тетраэдральная ( $1,646 \cdot 10^6$  ячеек) (рис. 3). Для всех сеток вблизи твердых стенок построены призматические слои с коэффициентом роста не более 1,2. Толщина первой расчетной ячейки гексагональной сетки составляет  $2,28 \cdot 10^{-5}$  м, полиэдральной и тетраэдральной –  $4,16 \cdot 10^{-3}$  м, что обеспечивает значение безразмерного расстояния  $y^+ < 1$ . Расчетная область в направлении координаты  $Z$  имеет толщину, равную удвоенной высоте уступа.

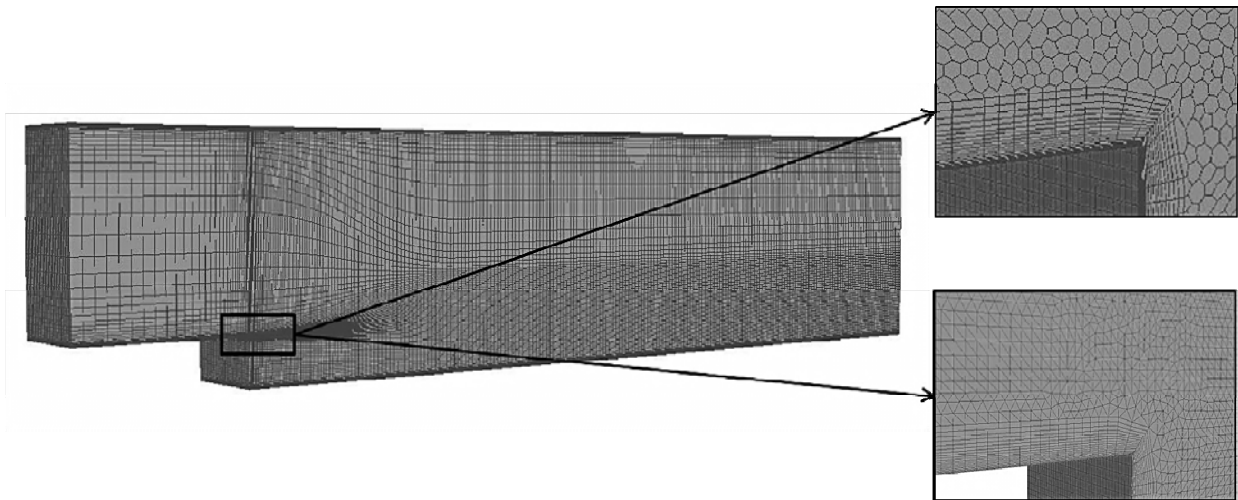


Рис. 3. Внешний вид сеток. Слева – гексагональная блочно-структурированная сетка, справа – элементы неструктурированных полиэдральной и тетраэдральной сеток для выделенной области уступа

Для оценки результатов расчета анализировался коэффициент трения вдоль нижней стенки  $C_f = \frac{2 \cdot \tau_w}{\rho \cdot u_\infty^2}$ , где  $\tau_w$  – касательное напряжение на стенке,  $\rho_\infty$  и  $u_\infty$  – плотность моделируемого вещества и модуль скорости соответственно в бесконечно удаленной точке (обычно это плотность и скорость на входе в расчетную область). Расчетный коэффициент  $C_f$  сравнивался с экспериментальными значениями, полученными в области образования вихря. На рис. 4 представлены графики зависимости коэффициента трения от координаты  $x$  для трех описанных выше ограничителей, применяемых в конвективном слагаемом уравнения движения. Анализ графиков показывает, что результаты, полученные на гексагональной сетке, более качественно



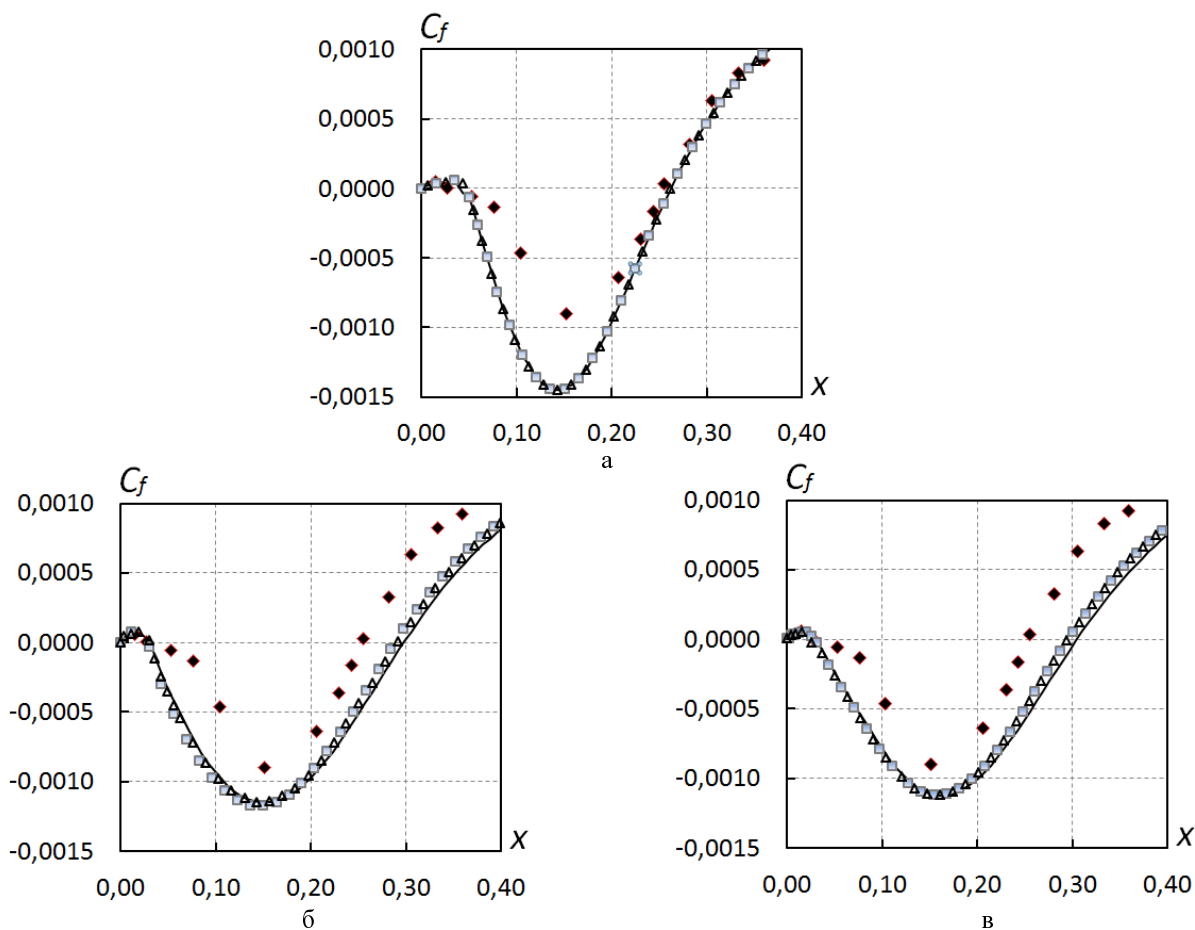


Рис. 4. Коэффициент трения для гексагональной (а), тетраэдральной (б) и полиэдральной (в) сеток:  
 ◆ – эксперимент; ▲ – VanLeer; — – Venkatakrisnan; ■ – Barth and Jespersen

прописывают точку присоединения (переход коэффициента трения от отрицательного значения к положительному). Для данной сеточной модели все рассматриваемые лимитирующие функции дают близкий результат (максимальное отличие от эксперимента порядка 1 %). Решения, полученные на двух неортогональных сетках, дают большее отличие от эксперимента в точке присоединения, причем лимитирующая функция Venkatakrisnan показывает наименее качественный результат по сравнению с другими ограничителями. Это ожидаемо, так как данная функция более требовательна при переходе к схеме высокого порядка точности.

Во второй части численного эксперимента определим, вносит ли существенный вклад в точность получаемых результатов уточнение градиента скорости в итерационном алгоритме Грина – Гаусса с использованием лимитирующей функции Venkatakrisnan. На графиках (рис. 5) представлены результаты сравнения применения данного ограничителя в диффузионном слагаемом уравнения движения с использованием уточнения градиента и без него.

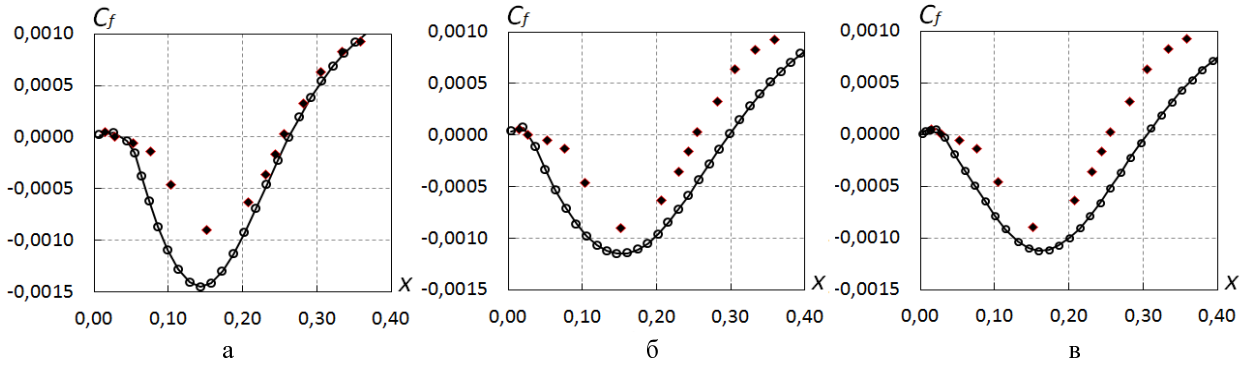


Рис. 5. Коэффициент трения для гексагональной(а), тетраэдральной(б) и полиэдральной(в) сеток: ◆ – эксперимент; — – Venkatakrishnan; ○ – Venkatakrishnan с ограничением в алгоритме Грина – Гаусса

Можно видеть, что для данной задачи уточнение вычисления градиента в итерационном методе Грина – Гаусса с использованием ограничителя не оказало существенного влияния на точность получаемого решения. Следует заметить, что проведенные аналогичные исследования для других ограничителей также показали несущественность влияния уточнения градиента с применением ограничителя на итоговый результат.

## 2.2. Течение в трансзвуковом диффузоре

Применимость ограничителей в случае расчета сжимаемых течений исследовалась на примере двух задач. Первая из них – расчет течения вязкого сжимаемого газа в трансзвуковом диффузоре с прямым скачком уплотнения. Расчетная область представляет собой канал переменного сечения (рис. 6) с минимальной высотой горла  $h = 4,4 \cdot 10^{-2}$  м. Поток разгоняется до звуковой скорости в области минимального сечения, и на выходе из канала, в зависимости от противодействия за горлом, реализуется скачок уплотнения соответствующей интенсивности [33]. Течение характеризовалось числом Рейнольдса порядка  $Re = 7 \cdot 10^5$ . В экспериментах использовались трехмерные сеточные модели (исходная постановка задачи – двумерная), отличающиеся типом и количеством расчетных ячеек. Вблизи твердых стенок были построены призматические слои с коэффициентом роста 1,2. Основные параметры построения расчетных сеток представлены в таблице.

Параметры построения расчетных сеток

Тип расчетной сетки	Гексагональная	Полиэдральная	Тетраэдральная
Количество ячеек	$3,6 \times 10^4$	$1,15 \times 10^4$	$2,5 \times 10^4$
Размер первого призматического слоя, м	$2 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$
Количество призматических слоев	8	10	10

Гексагональная сетка имеет сгущение в области скачка уплотнения, неструктурированные сетки построены равномерно. Характерный размер ячеек тетраэдральной и полиэдральной сеток сопоставим с характерным размером ячеек блочно-структурированной сетки. Их внешний вид в окрестности скачка уплотнения представлен на рис. 6.

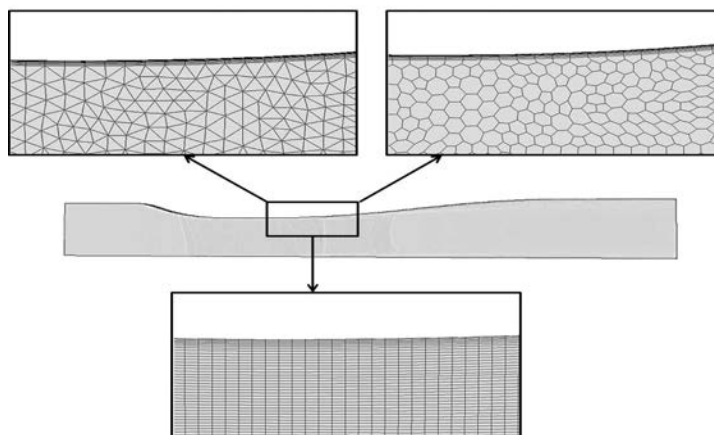


Рис. 6. Используемые расчетные сетки в окрестности горла

В данной задаче анализировалось распределение статического давления вдоль верхней образующей канала. Результаты расчетов для тех же лимитирующих функций, с их применением в конвективном слагаемом уравнения движения, в области скачка уплотнения представлены на рис. 7.

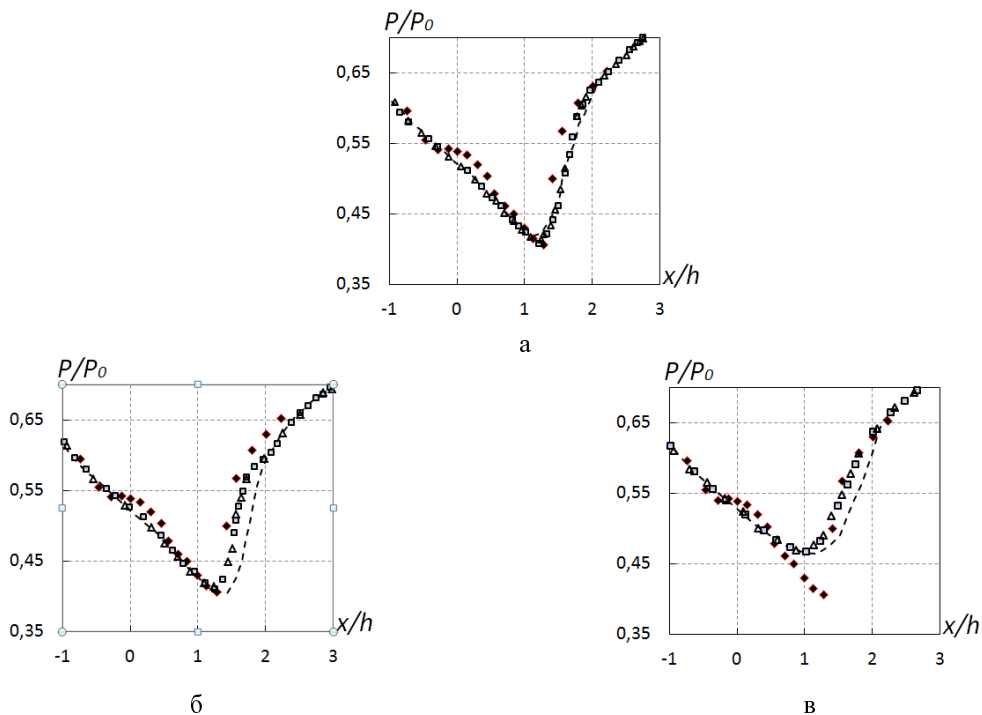


Рис. 7. Распределение статического давления для гексагональной (а), тетраэдральной (б) и полиэдральной (в) сеток:  $\blacklozenge$  – эксперимент;  $\blacktriangle$  – Van Leer;  $- - -$  – Venkatakrishnan;  $\blacksquare$  – Barth and Jespersen

Можно видеть, что на гексагональной сетке результаты для разных лимитирующих функций практически не различаются. Для неортогональных сеток более существенны отличия как между результатами моделирования и экспериментальными данными, так и между лимитирующими функциями.

Наиболее далекий результат от эксперимента был получен на полиэдральной сетке. Это связано с тем, что полиэдральные элементы заметно повышают диссипативность схемы. Что касается лимитирующих функций, функция Venkatakrishnan ожидаемо более существенно занизила порядок схемы до первого и в целом показала более отличающийся от эксперимента результат по сравнению с функциями Barth and Jespersen и Van Leer.

На рис. 8 представлено сравнение результатов расчетов с применением ограничителя Venkatakrishnan в многоитерационном алгоритме Грина – Гаусса вычисления градиента. Из графиков можно видеть, что для данной задачи уточнение вычисления градиента в итерационном методе Грина – Гаусса с применением ограничителя не оказало существенного влияния на точность получаемого решения.

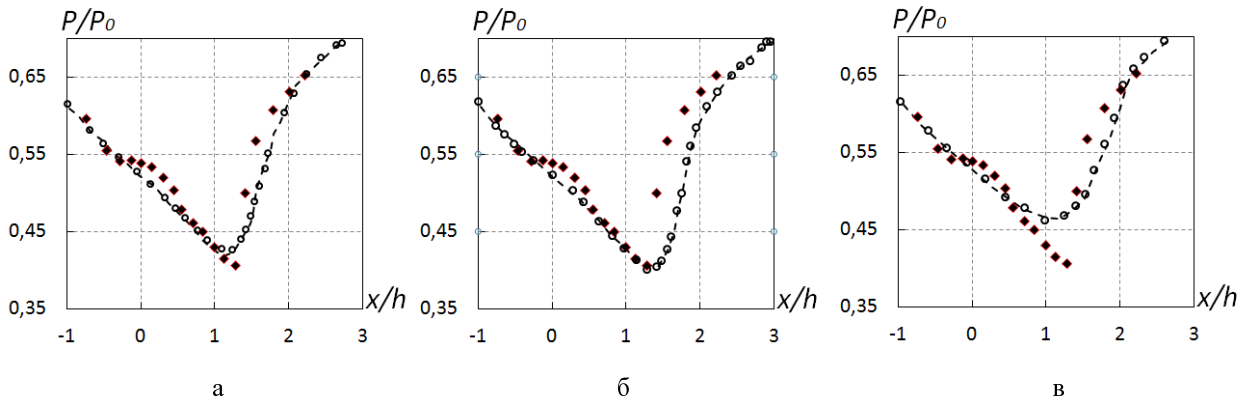


Рис. 8. Распределение статического давления для гексагональной (а), тетраэдральной (б) и полиэдральной (в) сеток:  $\blacklozenge$  – эксперимент; - - - Venkatakrishnan;  $\circ$  – Venkatakrishnan с ограничением в алгоритме Грина – Гаусса

### 2.3. Обтекание модельного крыла ONERAM6

Второй задачей, на которой проводилось исследование применимости ограничителей для сжимаемых течений, является задача обтекания тестового крыла ONERA M6 [34]. Численное моделирование проводилось на двух трехмерных сеточных моделях (исходная постановка задачи – трехмерная): гексагональной и тетраэдральной с количеством составляющих их ячеек  $2 \times 10^6$  и  $6 \times 10^6$  соответственно. Каждая из сеток имеет призматические слои вдоль стенок крыла с коэффициентом роста 1,2. Толщина первой расчетной призматической ячейки гексагональной сетки составляет  $6,8 \times 10^{-6}$ , тетраэдральной –  $1 \cdot 10^{-3}$ .

Геометрия расчетной области и внешний вид расчетных сеток представлены на рис. 9. Обтекание моделировалось при угле атаки  $\alpha = 3,06^\circ$ , числе Маха  $M = 0,8395$  и числе Рейнольдса

$Re = 1,172 \cdot 10^6$ . Для исследования поведения ограничителей анализировалось распределение коэффициента давления  $C_p$  в сечении крыла  $z = 0, 2$ , определяемого соотношением:

$$C_p = \frac{(P_x - P_{ref})}{2\rho_\infty u_\infty^2}, \quad (17)$$

где  $P_x$  – текущее давление;  $P_{ref}$ ,  $\rho_\infty$  и  $u_\infty$  – соответственно давление, плотность и модуль скорости в бесконечно удаленной точке.

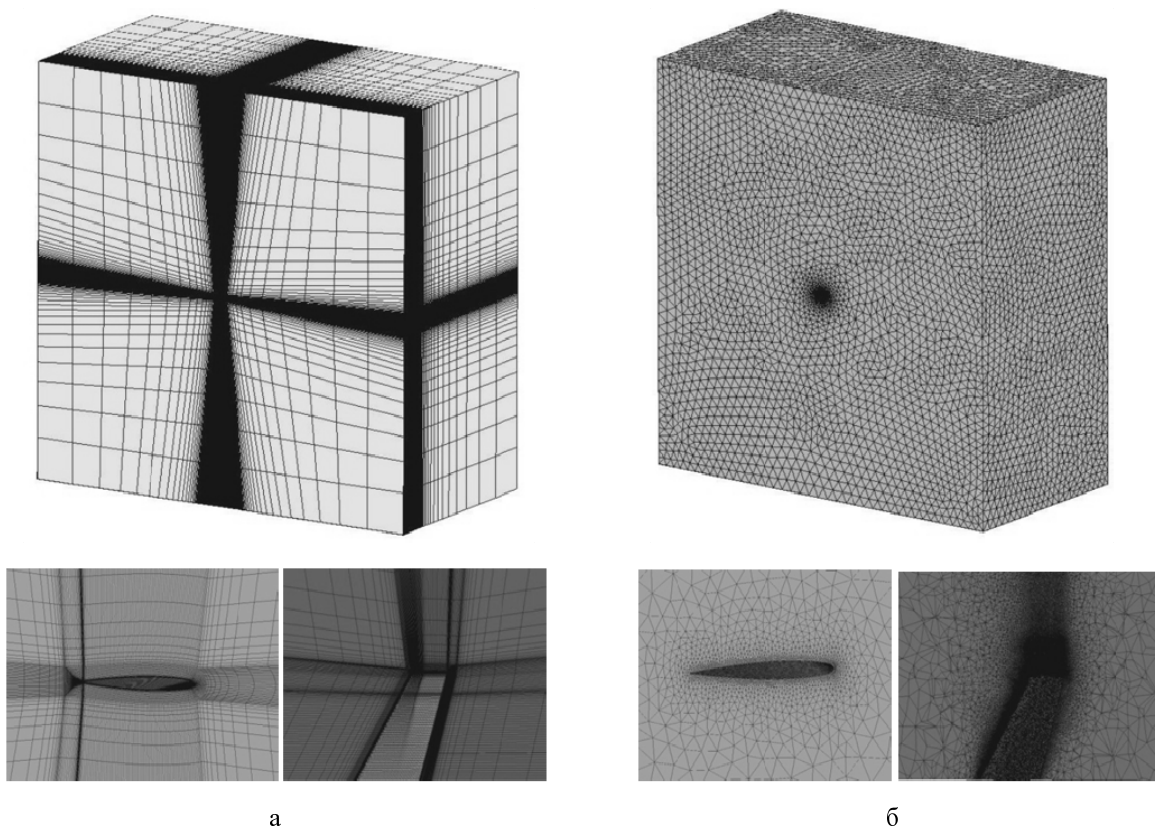


Рис. 9. Внешний вид гексагональной (а) и тетраэдральной (б) сеток: общий вид (сверху), вблизи крыла – вид сбоку (внизу слева), вблизи крыла – вид сверху (внизу справа)

Сравнение результатов расчетов для различных сеток с применением ограничителей в конвективном слагаемом уравнения движения представлено на рис. 10. Анализ графиков показывает, что в области скачка уплотнения лимитирующие функции Van Leer и Barth and Jaspersen ведут себя одинаково, в то время как ограничитель Venkatakrishnan ожидаемо более существенно занижает порядок схемы до первого.

На рис. 11 представлено сравнение применения ограничителя Venkatakrishnan с использованием уточнения градиента и без него. Также как и в предыдущих задачах, существенного влияния на точность получаемого решения получено не было.

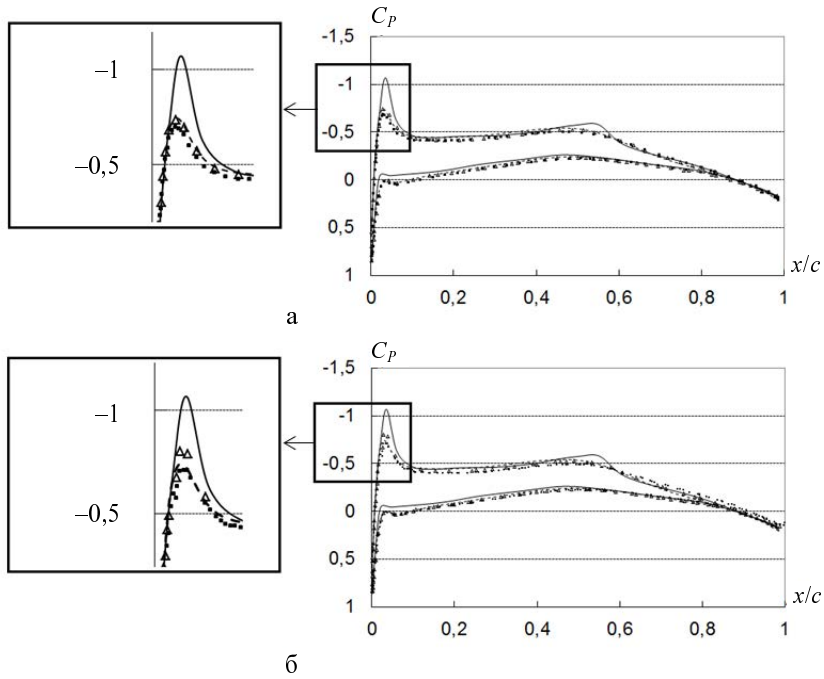


Рис. 10. Распределение коэффициента давления для гексагональной (а) и тетраэдральной (б) сеток: — — эксперимент;  $\Delta$  — Van Leer; - - - Venkatakrishnan; ■ — Barth and Jespersen

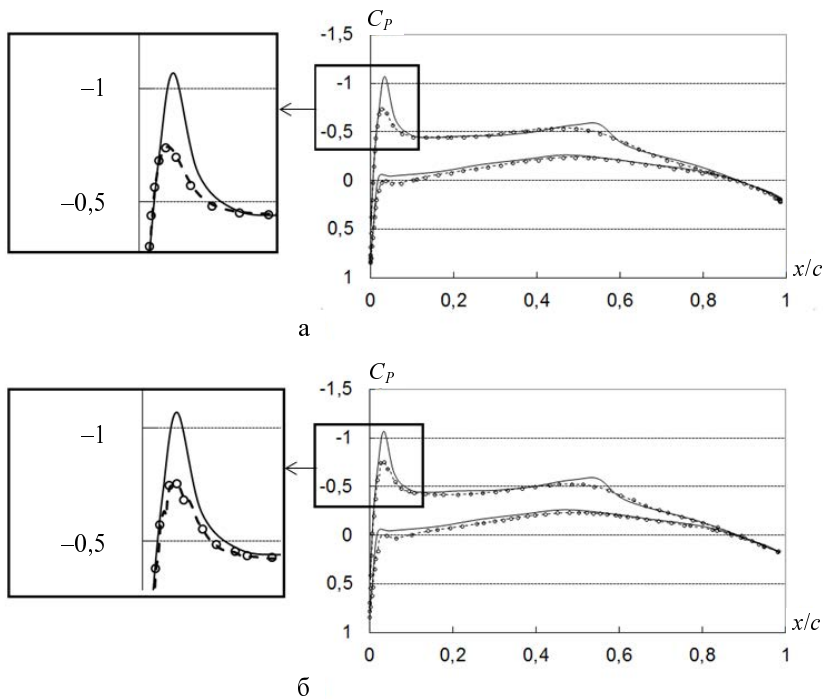


Рис. 11. Распределение коэффициента давления для гексагональной (а), тетраэдральной (б) сеток: — — эксперимент; - - - Venkatakrishnan;  $\circ$  — Venkatakrishnan с ограничением в алгоритме Грина – Гаусса

## Заключение

В статье проведено исследование влияния ограничителей градиента на точность получаемых результатов при моделировании сжимаемых и несжимаемых течений алгоритмом SIMPLE. Приведен алгоритм расчета ограничительного коэффициента с использованием различных типов лимитирующих функций. Ограничители градиента использовались в конвективном слагаемом уравнения движения, а также при вычислении самого градиента итерационным методом Грина – Гаусса.

На серии численных экспериментов показано, что ограничители градиента, применяемые в конвективном слагаемом, понижают порядок аппроксимации схемы, приводя к потере точности. Ограничитель Venkatakrishnan как в несжимаемых, так и в сжимаемых течениях понижает точность расчета, в отличие от ограничителей Barth and Jespersen и Van Leer, дающих более точный результат в исследуемых областях высоких градиентов. Применение ограничителей в вычислении градиента итерационным методом Грина – Гаусса на данных задачах не показало существенного влияния на получаемый результат.

## Список литературы

1. Ferziger J. H., Peric M. Computational methods for fluid dynamics. New York: Springer-Verlag, 2002.
2. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоиздат, 1984.
3. Козелков А. С., Курулин В. В., Тятюшкина Е. С. и др. Моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости на неструктурированных сетках методом отсоединенных вихрей // Математическое моделирование. 2013. Т. 26, № 8. С. 81–96.
4. Козелков А. С., Курулин В. В., Тятюшкина Е. С. и др. Исследование схем дискретизации конвективного потока для моделирования турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости методом отсоединенных вихрей // Фундаментальные исследования. 2013. № 10. С. 1051–1058.
5. Козелков А. С., Жучков Р. Н., Уткина А. А., Володченкова К. Б. Моделирование турбулентных течений на сетках гибридной структуры с использованием схем высокого порядка точности // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2014. № 3. С. 18–31.
6. Курулин В. В., Козелков А. С. Численная схема для моделирования турбулентных течений несжимаемой жидкости с использованием вихреразрешающих подходов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 7. С. 1255–1265.
7. Jasak H., Weller H. G., Gosman A. D. High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes // International journal for numerical methods in fluids. 1999. Vol. 31, N. 4. P. 431–449.
8. Darwish M. S., Moukalled F. TVD schemes for unstructured grids // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2003. Vol. 46. P. 599–611.

9. Park J. S., Kim C. Multi-dimensional limiting process for finite volume methods on unstructured grid // *Computers & Fluids*. 2012. Vol. 65. P. 8–24.
10. Barth T. J., Jespersen T. J. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes // *AIAA paper 89-0366*, 1989.
11. [http://www.cfd-online.com/Wiki/Gradient\\_computation](http://www.cfd-online.com/Wiki/Gradient_computation).
12. Van Albada G. D., Van Leer B., Roberts W. W. Jr. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics // *Astronomy and Astrophysics*. 1982. Vol. 108. P. 76–84.
13. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation // *Journal of Computational Physics*. 1983. Vol. 49. P. 357–393.
14. Sweby P. K. High resolution schemes using flux-limiters // *SIAM Journal of Numerical Analysis*. 1984. Vol. 21. P. 995–1011.
15. Venkatakrishnan V. Perspective on unstructured grid flow solvers // *AIAA journal*. 1996. Vol. 34, N. 3. P. 533–547.
16. Venkatakrishnan V. On the accuracy of Limiters and Convergence to Steady State Solution // *AIAA paper 93-0880*, 1993.
17. Bidadi S., Rani Sarma L. Quantification of numerical diffusivity due to TVD schemes in the advection equation // *Journal of Computational Physics*. 2014. Vol. 261. P. 65–82.
18. Козелков А. С., Дерюгин Ю. Н., Лашкин С. В. и др. Реализация метода расчета вязкой несжимаемой жидкости с использованием многосеточного метода на основе алгоритма SIMPLE в пакете программ ЛОГОС // *ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов*. 2013. Вып. 4. С. 44–56.
19. Jasak H. Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flow // Thesis submitted for the degree of doctor. Department of mechanical engineering, imperial college of science. London, 1996.
20. Волков К. Н., Дерюгин Ю. Н., Емельянов В. Н. и др. Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2013.
21. Betelin V. B., Shagaliev R. M., Aksenov S. V. et al. Mathematical simulation of hydrogen–oxygen combustion in rocket engines using LOGOS code // *Acta Astronautica*. 2014. Vol. 96. P. 53–64.
22. Волков К. Н., Дерюгин Ю. Н., Емельянов В. Н. и др. Алгебраический метод в задачах вычислительной физики // *Вычислительные методы и программирование*. 2014. Т. 15. С. 183–200.
23. Козелков А. С., Куркин А. А., Крутякова О. Л. и др. Зонный RANS–LES подход на основе алгебраической модели рейнольдсовых напряжений // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2015. № 5. С. 24–33.
24. Волков К. Н., Дерюгин Ю. Н., Емельянов В. Н. и др. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2014.



25. Козелков А. С., Дерюгин Ю. Н., Циберева Ю. А. и др. Минимальный базис задач для валидации методов численного моделирования турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р. Е. Алексева, 2014. Т. 106. № 4. С. 21–69.
26. Козелков А. С., Курулин В. В., Пучкова О. Л., Лашкин С. В. Моделирование турбулентных течений с использованием алгебраической модели рейнольдсовых напряжений с универсальными пристеночными функциями // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7. № 1. С. 40–51.
27. Козелков А. С., Куркин А. А., Пелиновский Е. Н., Курулин В. В. Моделирование цунами космогенного происхождения в рамках уравнений Навье – Стокса с источниками различных типов // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 2. С. 142–150.
28. Козелков А. С. Эффекты, сопровождающие вхождение метеорита в водную среду // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р. Е. Алексева. 2014. Т. 105. № 3. С. 48–77.
29. Козелков А. С., Куркин А. А., Пелиновский Е. Н. Цунами космогенного происхождения // Там же. Т. 104. № 2. С. 26–35.
30. Menter F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal. 1994. Vol. 32, N. 8. P. 1598–1605.
31. Зайков Л. А., Стрелец М. Х., Шур М. Л. Сравнение возможностей дифференциальных моделей турбулентности с одним и двумя уравнениями при расчете течений с отрывом и присоединением. Течение в каналах с обратным уступом // Теплофизика высоких температур. 1996. Т. 34. № 35. С. 724–736.
32. Kozelkov A., Kurulin V., Emelyanov V. et al. Comparison of convective flux discretization schemes in detached-eddy simulation of turbulent flows on unstructured meshes // Journal of Scientific Computing. 2015. Vol. 89. P. 1–16.
33. Stanniland D. Investigation of the development on a highly swept canard/wing research model with segmented leading-and trailing-edge flaps // AGARD 330, case D5,1994.
34. Schmitt V., Charpin F. Pressure distributions on the ONERA M6 wing at transonic Mach numbers // AGARD Advisory Report № 9 138, case D5, 1979. Experimental Database for computer program assessment.
35. Козелков А. С., Куркин А. А., Пелиновский Е. Н. Влияние угла входа тела в воду на высоты генерируемых волн // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 2. С. 166–176.

## **Use of Gradient Limiters to Solve Navier – Stokes Equations on Arbitrary Unstructured Grids**

**S. V. Lashkin, A. S. Kozelkov, E. V. Glazunova, N. V. Tarasova, A. V. Yalozo**

*Analyzing the application of gradient limiters on arbitrarily-shaped unstructured grids in the finite volume methods for the Navier – Stokes equation discretization with the SIMPLE algorithm. The effect of limiters on the accuracy of results obtained using the convective gradient schemes of the second order, as well as the accuracy of gradients calculated using the Green-Gauss iterative algorithm is considered. Simulations of compressible and incompressible flows using grids of different topologies are described. An optimal use of limiters for solving problems with SIMPLE algorithm is recommended.*