УДК 539.128.412
DOI: 10.53403/9785951504937_2020_25.1_6_25

Решеточные дираковские матрицы и формализм стандартной модели

М. В. Горбатенко

Показано, что вещественные матрицы Дирака и волновая функция, отождествляемая с обратной реперной матрицей, адекватно воспроизводят многие из тех атрибутов Стандартной Модели, которые в настоящее время вносятся в эту модель руками. Принципиальным моментом при этом является использование так называемых матриц Дирака решетчатого типа и инвариантных проекторов ранга 3.

1. Введение

Стандартная Модель (СМ) включает в себя теорию электрослабых взаимодействий Вайнберга – Салама и квантовую хромодинамику и в настоящее время имеет статус базовой модели сильных и электрослабых взаимодействий (см., например, [1–3]). В рамках теории электрослабых взаимодействий Вайнберга – Салама предсказано существование нейтральных токов, массивных бозонов – переносчиков взаимодействий, объяснен огромный массив экспериментальных данных по слабому взаимодействию лептонов и кварков. Этот статус теории подтверждается также и открытием бозона Хиггса [4].

Несмотря на свою эффективность в описании электрослабых взаимодействий частиц, СМ не является, строго говоря, полноценной теорией физических взаимодействий, получающей свои результаты из каких-то первых принципов. По мнению многих исследователей, то, что называется СМ, представляет собой по существу переплетение правил релятивистской квантовой теории поля с совокупностью алгоритмов действий (правил, рецептов) и набором феноменологических атрибутов, которые постулируются и/или вводятся руками и позволяют вычислять те или иные величины, регистрируемые в экспериментах. Ясно, что в такой ситуации актуальной была и остается задача нахождения тех единых принципов, из которых можно было бы вывести алгоритмы СМ и значения феноменологических параметров хотя бы фрагментарно.

Уточним, что мы понимаем под феноменологическими атрибутами. Обычно к их числу относят числовые значения масс частиц, их зарядов, углов смешивания и некоторых других параметров. Но эти параметры – далеко не полный перечень атрибутов, привносимых в СМ извне. Если ограничиться только первым (электронным) поколением лептонов, то извне привносятся такие атрибуты, как:

1) наличие только двух типов лептонов (не больше и не меньше): электрона, состоящего из «правой» и «левой» частей, и электронного нейтрино;

2) различие лептонов одного поколения по электрическому заряду: «правая» и «левая» части электрона имеют одинаковый электрический заряд, а заряд нейтрино равен нулю;

3) различие лептонов одного поколения по массе; в то же время массы «правой» и «левой» частей электрона совпадают;

4) наличие симметрии относительно фазовых преобразований, перемешивающих «правую» и «левую» части электрона. Отсюда следует, что электрон является электрически заряженной частицей, а нейтрино – нейтральной;

5) стерильность правого нейтрино, т. е. оно не взаимодействует с остальными частицами лептонного поколения (за исключением гравитационного взаимодействия).

Не только числовые значения феноменологических параметров, но и атрибуты типа перечисленных должны, казалось бы, следовать из теории. Но пока такой теории нет, и все это заимствуются в конце концов из экспериментов.

В данной работе излагаются результаты исследования такого подхода к описанию частиц с полуцелым спином, в котором используются вещественные* дираковские матрицы (ДМ), а волновая функция является не столбцовым биспинором, а матрицей, совпадающей с обратной к так называемой реперной матрице. Подход представляет собой развитие высказанной в [5] гипотезы о том, что вся информация о кинематике и динамике частиц с полуцелым спином в римановых пространствах с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}\ (\alpha,\beta=0,1,2,3)$ содержится в полях ДМ γ_α, определяемых как

$$\gamma_\alpha(x)\gamma_\beta(x)+\gamma_\beta(x)\gamma_\alpha(x)=2g_{\alpha\beta}(x)E_{4\times4}. \tag{1}$$

Здесь $E_{4\times4}$ – единичная матрица той же матричной размерности 4×4, что и ДМ. Запись волновой функции в виде матрицы рассматривалась в свое время еще Зоммерфельдом в [6], так что рассматриваемый подход является развитием и идей [6]. Заметим, что при определении ДМ согласно (1) вещественные ДМ существуют только при сигнатуре метрического тензора $(-+++)$. ДМ в стандартном представлении, обычно используемые в СМ, связаны с майорановской системой ДМ унитарным преобразованием подобия.

Оказалось, что указанный подход при его последовательном проведении приводит к однозначному предсказанию перечисленных выше феноменологических атрибутов СМ. Этот факт является, как мы полагаем, весьма примечательным, поскольку может подсказать то направление, на котором СМ может быть доведена до уровня фундаментальной теории.

В начале работы приводятся сведения из теории ДМ, необходимые в том числе и для пояснения обозначений. Часть свойств ДМ считается известной (см., например, [5] и цитированную там литературу). К числу известных вопросов относятся:

– связь между мировыми и локальными системами ДМ; реперная матрица;

– дискретные автоморфизмы;

– ковариантное дифференцирование ДМ и реперной матрицы;

– инвариантные преобразования дифференциально-алгебраических соотношений с использованием ДМ.

Далее вводятся новые или мало известные свойства ДМ и волновых функций. К числу таких относятся понятие вакуумных систем ДМ, запись волновой функции в форме Зоммерфельда [6], т. е. в виде матрицы 4×4, и отождествление ее с матрицей, обратной к реперной матрице. Извлечение информации о кинематике и динамике поля частиц со спином 1/2 производится с помощью умножения волновой функции на проекторы, среди которых особую роль играют проекторы ранга 3 и 1. Для введения последних используется матрица *I*, осуществляющая преобразование стандартных матриц «ро» в матрицы «сигма» и наоборот.

* Вещественные системы ДМ будем (как это обычно делается) называть ДМ в майорановском представлении.

В рамках алгебры вещественных ДМ и вещественной волновой функции воспроизводятся кинематические атрибуты СМ. Для воспроизведения динамических атрибутов используется понятие решеточных ДМ, введенное в [7], и конструкция лагранжиана, алгебраическая часть которого содержит различные степени антиэрмитизирующей матрицы.

Приведем примеры воспроизведения атрибутов СМ применительно к электронному поколению лептонов.

На основе матрицы I может быть построена система проекторов типа (3;1)[**] . Умножение волновой функции справа на проекторы типа (3;1) позволяет расщепить мультиплет из четырех состояний частиц со спином 1/2 на два семейства состояний. Одно семейство состоит из одного состояния («правое» нейтрино), а другое семейство – из трех («правая» и «левая» части электрона и «левое» нейтрино). Этот результат получен в рамках использования только вещественных чисел, которые входят составной частью во все другие классы чисел, и, по-видимому, носит универсальный («надквантовый») характер.

Другой результат состоит в доказательстве того, что один и тот же лагранжиан приводит к динамическим решениям, решениями которых являются различные вакуумные системы ДМ. Система ДМ, построенная на базисных векторах ортонормированной кубической решетки Z_4, удовлетворяет динамическим уравнениям тождественно. Вакуумная система ДМ, построенная на базисных векторах решетки D_4, описывает мультиплет частиц со спином 1/2, который расщепляется инвариантным образом на две группы частиц с разными массами. Одна группа содержит электронные состояния, а другая – нейтринные.

В работе приводятся и другие результаты, которые обсуждаются в последнем разделе. Главный результат работы состоит в доказательстве того, что формализм вещественных ДМ с волновой функцией, отождествляемой с обратной реперной матрицей, адекватно отражает многие из тех атрибутов СМ, которые в настоящее время вносятся в СМ руками. Представленные результаты позволяют надеяться на получение более полного воспроизведения атрибутов СМ при переходе от вещественных ДМ к формализму комплексных, кватернионных и октонионных ДМ.

2. Дираковские матрицы. Локальные и мировые ДМ

Согласно общей теории относительности (ОТО) наблюдаемое пространство является 4-мерным римановым пространством с сигнатурой $1(-)\,\&\,3(+)$. Пространство такого типа описывается метрическим тензором $g_{\alpha\beta}(x)$, компоненты которого являются вещественными функциями координат. Для описания в таком пространстве полей частиц со спином 1/2 необходимо ввести дираковские матрицы $\gamma_\alpha(x)$, удовлетворяющие соотношениям (1). Известно, что существует реализация ДМ в виде вещественных матриц 4×4. Такие ДМ называются дираковскими матрицами в майорановском представлении.

Известно, что в каждой точке риманова пространства метрический тензор $g_{\alpha\beta}(x)$ связан с метрическим тензором в касательном плоском пространстве $\eta_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$ соотношением

[**] Обозначение типа (3;1) указывает ранги проекторов, входящих в состав полной системы проекторов.

$$g_{\alpha\beta}(x) = H_{\alpha}^{\underline{\mu}}(x) H_{\beta}^{\underline{\nu}}(x) \eta_{\underline{\mu\nu}}. \tag{2}$$

Здесь $H_{\alpha}^{\underline{\mu}}(x)$ – реперные векторы, удовлетворяющие условиям

$$H_{\alpha}^{\underline{\mu}}(x) H_{\beta}^{\underline{\nu}}(x) \eta_{\underline{\mu\nu}} = g_{\alpha\beta}(x). \tag{3}$$

Подчеркнутые греческие индексы (локальные) так же, как и неподчеркнутые (мировые), принимают значения 0, 1, 2, 3, но отличаются правилами преобразования при преобразованиях мировых и локальных координат. Подчеркнутые индексы не реагируют на преобразования мировых координат, а неподчеркнутые – на преобразования координат в касательных плоских пространствах. В дальнейшем для простоты будем полагать, что во всех касательных пространствах выбраны декартовы координаты, так что тензор $\eta_{\underline{\mu\nu}}$ имеет вид

$$\eta_{\underline{\mu\nu}} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1). \tag{4}$$

Поднятие и опускание мировых индексов у реперных векторов производится с помощью мирового метрического тензора, а локальных индексов – с помощью локального метрического тензора.

Наряду с мировыми ДМ $\gamma_{\alpha}(x)$ всегда могут быть введены ДМ еще одного типа – не зависящие от координат локальные ДМ $\gamma_{\underline{\alpha}}$. Локальные ДМ вводятся с помощью соотношения, аналогичного (1), т. е. соотношения

$$\gamma_{\underline{\mu}}\gamma_{\underline{\nu}} + \gamma_{\underline{\nu}}\gamma_{\underline{\mu}} = 2\eta_{\underline{\mu\nu}} E_{4\times4}. \tag{5}$$

Характер преобразования матричных индексов у локальных ДМ определяется требованием их неизменности при локальных лоренцевых преобразованиях. При таких преобразованиях величины $\gamma_{\underline{\alpha}}$ испытывают следующие преобразования:

$$\gamma_{\underline{\alpha}} \to w_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}} \left(L^{-1}\gamma_{\underline{\beta}} L\right). \tag{6}$$

Здесь $w_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}$ – объекты, определяющие лоренцевы преобразования векторов в касательном плоском пространстве. Эти объекты удовлетворяют соотношениям

$$w_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\mu}} w_{\underline{\beta}}{}^{\underline{\nu}} \eta_{\underline{\mu\nu}} = \eta_{\underline{\alpha\beta}}. \tag{7}$$

Матрицы L в (6) определяются из условия неизменности $\gamma_{\underline{\alpha}}$ при лоренцевых преобразованиях, т. е. из условия

$$\left(L\gamma_{\underline{\alpha}} L^{-1}\right) = w_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}} \gamma_{\underline{\beta}}. \tag{8}$$

Как ДМ $\gamma_{\alpha}(x)$, так и ДМ $H_{\alpha}^{\underline{\mu}}(x)\gamma_{\underline{\mu}}$ удовлетворяют одному и тому же соотношению (1). Поэтому по известной теореме Паули они должны быть связаны соотношением

$$\gamma_{\alpha}(x) = H_{\alpha}^{\underline{\mu}}(x) R(x) \gamma_{\underline{\mu}} R^{-1}(x). \tag{9}$$

В этом соотношении матрица. $R(x)$. является неособенной и обладает смешанным типом матричных индексов: левый индекс у матрицы R имеет мировую природу, а правый – локальную. Это свойство индексов матрицы $R(x)$ аналогично свойству индексов реперных векторов $H^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)$, поэтому $R(x)$ будем называть реперной матрицей.

В качестве матриц $\gamma_{\underline{\alpha}}$ можно во всех точках риманова пространства выбрать одну и ту же систему, например систему

$$\gamma_{\underline{0}} = -i\rho_2\sigma_1, \quad \gamma_{\underline{1}} = \rho_1, \quad \gamma_{\underline{2}} = \rho_2\sigma_2, \quad \gamma_{\underline{3}} = \rho_3. \tag{10}$$

На основе ДМ (10) может быть построена полная система из 16 вещественных матриц 4×4.

3. *Дискретные автоморфизмы*

Если найдена система ДМ γ_α, удовлетворяющая уравнениям (1), то этим же уравнениям удовлетворяет и система γ^T_α, получаемая из γ_α путем транспонирования, а также $-\gamma^T_\alpha$, $-\gamma_\alpha$. Известно, что всегда существуют неособенные матрицы, связывающие системы

$$\gamma_\alpha, -\gamma_\alpha, -\gamma^T_\alpha, \gamma^T_\alpha. \tag{11}$$

Введем обозначения для этих матриц:

$$-\gamma_\alpha = I\gamma_\alpha I^{-1}, \quad -\gamma^T_\alpha = D\gamma_\alpha D^{-1}, \quad \gamma^T_\alpha = C\gamma_\alpha C^{-1}. \tag{12}$$

Известно, что матрицы D, C антисимметричны,

$$D^T = -D, \quad C^T = -C, \tag{13}$$

а матрица I кратна $\gamma_5 \equiv \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. На основе матриц D, C могут быть построены полные системы 16 матриц 4×4, каждая из которых обладает свойством либо симметричности, либо антисимметричности. Так, построенная с помощью матрицы C полная система 16 матриц 4×4 состоит из 6 антисимметричных матриц $C, C\gamma_\alpha, C\gamma_5$ и 10 эрмитовых матриц $C\gamma_5\gamma_\alpha, CS_{\alpha\beta}$. Здесь $S_{\alpha\beta} = (1/2)\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha\right)$.

Еще один дискретный автоморфизм ДМ состоит в замене матриц ρ_k на σ_k и наоборот. Введем матрицу H, удовлетворяющую условиям

$$H\rho_k H^{-1} = \sigma_k, \quad H\sigma_k H^{-1} = \rho_k, \quad k = 1,2,3. \tag{14}$$

Матрица, удовлетворяющая (14), определяется однозначно и имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left(E + \rho_1\sigma_1 + \rho_2\sigma_2 + \rho_3\sigma_3\right). \tag{15}$$

В терминах ДМ (10) матрица (15) записывается как

$$H = \frac{1}{2}\left(E + \gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{3}} + \gamma_{\underline{2}} + \gamma_{\underline{5}}\gamma_{\underline{1}}\right). \tag{16}$$

В явном виде

$$H = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array}, \quad \det(H) = -1. \tag{17}$$

Матрица *H* является симметричной и удовлетворяет условию

$$H^2 = E. \tag{18}$$

4. *Ковариантная производная и группа инвариантности*

Общий вид ковариантной производной от ДМ с мировыми индексами (мировых ДМ) может быть найден, если продифференцировать исходное соотношение (1). Поскольку $g_{\alpha\beta;\lambda} = 0,$ то получаем

$$(\nabla_\lambda \gamma_\alpha)\gamma_\beta + \gamma_\alpha(\nabla_\lambda \gamma_\beta) + (\nabla_\lambda \gamma_\beta)\gamma_\alpha + \gamma_\beta(\nabla_\lambda \gamma_\alpha) = 0. \tag{19}$$

Решением матричного уравнения (19) является

$$\nabla_\alpha \gamma^\beta = \gamma^\beta{}_{;\alpha} + \left[\Gamma_\alpha, \gamma^\beta\right]_-. \tag{20}$$

Здесь Γ_α – некоторые величины, преобразующиеся при координатных преобразованиях как векторы, но имеющие не числовые компоненты, а матричные. Часть $\Gamma_\alpha,$ кратная единичной матрице, коммутирует со всеми ДМ, поэтому не влияет на ковариантные производные от ДМ с мировыми индексами. Символы Γ_α аналогичны символам Кристоффеля, но относятся к пространству матричных степеней свободы ДМ. Соотношение (19) не накладывает никаких ограничений на Γ_α. В частности, из этого соотношения не следует, что ковариантная производная от ДМ равна нулю, т. е., вообще говоря,

$$\nabla_\alpha \gamma^\beta \neq 0. \tag{21}$$

При параллельном переносе некоторого матричного поля $Y(x)$ на малый вектор dx^μ поле получает приращение $dx^\mu\left[\Gamma_\mu, Y(x)\right]_-$. Если поле $Y(x)$ было симметричным или антисимметричным, то при параллельном переносе и приращение должно быть симметричным или антисимметричным. Пусть $Y^T(x) = Y(x).$ Тогда должно выполняться соотношение

$$dx^\mu\left(\left[\Gamma_\mu, Y(x)\right]_-\right)^T = dx^\mu\left[\Gamma_\mu, Y(x)\right]_-. \tag{22}$$

Соотношение (22) может выполняться для любых полей $Y(x)$ только в том случае, если величины Γ_α представляют собой антисимметричные вещественные матрицы 4×4,

$$\Gamma_\alpha^T = -\Gamma_\alpha. \tag{23}$$

Из условия (23) следует, в частности, что

$$\nabla_\alpha\left(\gamma_\beta^T\right)=\left(\nabla_\alpha\gamma_\beta\right)^T. \tag{24}$$

При преобразованиях

$$\gamma_\alpha(x)\to\gamma'_\alpha(x)=S(x)\gamma_\alpha(x)S^{-1}(x) \tag{25}$$

величины Γ_α преобразуются по правилу

$$\Gamma_\alpha\to\Gamma'_\alpha=S\Gamma_\alpha S^{-1}+S\frac{\partial S^{-1}}{\partial x^\alpha}. \tag{26}$$

Зададимся вопросом: какими свойствами должны обладать матрицы S, чтобы при преобразованиях (26) величины Γ_α оставались антисимметричными, т. е. сохраняли свойство (23)? Из соотношения (26) следует, что свойство (23) может сохраняться только в том случае, если матрицы S будут ортогональными, т. е. если

$$S^T=S^{-1}. \tag{27}$$

Таким образом, алгебраические соотношения (1) инвариантны относительно 15-параметрической группы вещественных неособенных матриц (25), а алгебраические соотношения, в которых содержатся дискретные автоморфизмы (11), а также ковариантные производные, инвариантны только по отношению к 6-параметрической группе ортогональных матриц (27). Группу ортогональных матриц будем обозначать как $O(4)$ и считать эту группу группой инвариантных преобразований соотношений, содержащих ДМ и ковариантные производные от матричных полей. Сами инвариантные преобразования будем обозначать как T. Таким образом, при инвариантных T-преобразованиях величины Γ_α преобразуются по правилу

$$\Gamma_\alpha\to\Gamma'_\alpha=T\Gamma_\alpha T^{-1}+T\frac{\partial T^{-1}}{\partial x^\alpha} \tag{28}$$

и после преобразования остаются вещественными и антисимметричными. Перечисленные выше свойства величин Γ_α показывают, что они являются по существу полями Янга – Миллса, построенными на группе $O(4)$.

Выше отмечалось, что при параллельном переносе симметричного или антисимметричного объекта получаемая добавка также обладает этим же свойством. Кроме этого правила применительно к параллельному переносу будем предъявлять еще два правила:

– реперные векторы в точке A, параллельно переносимые в точку B, должны совпадать с теми реперными векторами, которые имеются в точке B;

– локальные ДМ $\gamma_{\underline{\alpha}}$ в точке A, параллельно переносимые в точку B, должны совпадать с теми локальными ДМ, которые имеются в точке B.

Из этих правил следует, что

$$\nabla_\lambda H^\alpha_{\underline{\mu}}=0, \tag{29}$$

$$\nabla_\lambda\gamma_{\underline{\alpha}}=0. \tag{30}$$

При параллельном переносе каждый индекс вносит вклад в изменение переносимой величины. С учетом этого, а также того, что по построению $\gamma_{\underline{\alpha};\lambda}=0,$ записываем соотношения (29), (30) как

$$\nabla_\lambda H^{\alpha}_{\underline{\mu}} = H^{\alpha}_{\underline{\mu};\lambda} - \Phi_{\lambda}{}^{\underline{\nu}}{}_{\underline{\mu}} H^{\alpha}_{\underline{\nu}} = 0, \tag{31}$$

$$\nabla_\lambda \gamma_{\underline{\alpha}} = -\Phi_{\lambda}{}^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\alpha}} \gamma_{\underline{\beta}} + \left[\Phi_\lambda, \gamma_{\underline{\alpha}}\right]_- = 0. \tag{32}$$

Из соотношения (31) находим, что

$$\Phi_{\lambda}{}^{\underline{\mu}}{}_{\underline{\nu}} = H^{\underline{\mu}}_{\sigma} H^{\sigma}_{\underline{\nu};\lambda}, \tag{33}$$

а из соотношения (32)

$$\Phi_\lambda = \frac{1}{4} H_{\underline{\mu}\sigma} H^{\sigma}_{\underline{\nu};\lambda} S^{\underline{\mu\nu}}. \tag{34}$$

Правила дифференцирования реперной матрицы имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla_\lambda R = R_{,\lambda} + \Gamma_\lambda R - R\Phi_\lambda,\\
&\nabla_\lambda R^{-1} = R^{-1}{}_{,\lambda} + \Phi_\lambda R^{-1} - R^{-1}\Gamma_\lambda,\\
&\nabla_\lambda R^{T} = R^{T}{}_{,\lambda} - \Phi^{T}{}_{\lambda} R^{T} - R^{T}\Gamma_\lambda,\\
&\nabla_\lambda R^{-1T} = R^{-1T}{}_{,\lambda} + R^{-1T}\Phi^{T}{}_{\lambda} + \Gamma_\lambda R^{-1T}.
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

5. *Вакуумные системы ДМ*

5.1. *Определение вакуумной системы ДМ*

Наличие дискретных автоморфизмов позволяет расширить возможности по образованию из ДМ и их ковариантных производных числовых скалярных функций. Примерами таких функций в случае 4-мерного риманова пространства и использования вещественных чисел для реализации ДМ являются

$$\begin{gathered}
\mathrm{Tr}\left(\gamma^{\alpha}\gamma^{T}_{\alpha}\right),\ \mathrm{Tr}\left(\gamma^{\alpha}\left(S^{\mu\nu}\left(S_{\mu\nu}\right)^{T}\right)\gamma^{T}_{\alpha}\right),\\
\mathrm{Tr}\left(S^{\alpha\beta}\left(\nabla_\beta\gamma^{T}_{\alpha}\right) + \left(S^{\alpha\beta}\right)^{T}\left(\nabla_\beta\gamma_\alpha\right)\right).
\end{gathered} \tag{36}$$

Однако среди систем ДМ имеются такие, из которых построить поля, зависящие от координат и отличные от целочисленных функций, оказывается в принципе невозможным. Из них можно построить только тривиальные поля, т. е. поля, компоненты которых сводятся к целым числам, постоянным по всему пространству. К числу таких систем ДМ, как нетрудно проверить, относятся ДМ, построенные в [8, 9] с помощью процедур удвоения и выхлопа. Такие системы ДМ будем называть вакуумными системами ДМ. Если найдена какая-то вакуумная система ДМ, то вакуумной будет и любая другая, получаемая из исходной с помощью инвариантного преобразования типа (25), в котором матрица S является ортогональной.

Некоторые из вакуумных ДМ имеют также отличительные особенности:

– записываются в виде одночленов в терминах матриц «ро» – «сигма»;

– обладают определенными свойствами симметричности или антисимметричности;

– имеют в качестве элементов числа 0, ±1.

Такие вакуумные ДМ будем называть вакуумными ДМ в ортонормированном кубическом базисе, а сам базис – базисом кубической решетки Z_4. Простейшим примером системы ДМ в ортонормированном кубическом базисе является майорановская система (10), которую в последующем будем обозначать как $\underline{\gamma}_{\underline{\alpha}}$ (подчеркивается не только индекс, если он локальный, но и сам символ ДМ).

5.2. Решетчатые вакуумные ДМ

В [10] приведен простейший пример вакуумной ДМ в 4-мерном римановом пространстве с сигнатурой $(-+++)$, построенной не с использованием ортонормированного базиса, а с использованием косоугольного базиса автодуальной решетки D_4. Систему ДМ, построенную на косоугольном базисе решетки D_4, будем обозначать как $\underline{\underline{\gamma}}_{\underline{\alpha}}$. Система базисных векторов любой решетки задается с помощью так называемой порождающей матрицы *M*, т. е. матрицы, в строчках которой приводятся компоненты базисных векторов решетки в ортонормированном базисе. Ортонормированный базис имеет в качестве порождающей матрицы единичную матрицу. Порождающая матрица для решетки D_4 имеет вид

$$M = 2^{-1/4}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -1 & -1 & & \\ \hline 1 & -1 & & \\ \hline & 1 & -1 & \\ \hline & & 1 & -1 \\ \hline \end{array}\,;$$

$$M^{-1} = 2^{1/4}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -1/2 & 1/2 & & \\ \hline -1/2 & -1/2 & & \\ \hline -1/2 & -1/2 & -1 & \\ \hline -1/2 & -1/2 & -1 & -1 \\ \hline \end{array}\,;\ \det M = 1. \tag{37}$$

Переход от базиса Z_4 к базису D_4 относится к категории преобразований типа (25), однако порождающая матрица (37), которая используется при этом преобразовании, не является ортогональной. И это, как будет видно далее, влечет за собой далеко идущие последствия.

Сделав преобразование

$$\underline{\gamma}_{\underline{\alpha}} \to \underline{\underline{\gamma}}_{\underline{\alpha}} = M\underline{\gamma}_{\underline{\alpha}}M^{-1}, \tag{38}$$

где M – матрица (37), получим систему ДМ в базисе решетки D_4. Новые ДМ имеют следующий вид:

$$\underline{\underline{\gamma}}_0=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -1 & -1 & -2 & -1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & \\ \hline & -1 & & \\ \hline \end{array};\quad \underline{\underline{\gamma}}_1=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline & -1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & & \\ \hline \end{array};$$
$$\underline{\underline{\gamma}}_2=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & -1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline & & -1 & \\ \hline -1 & & & \\ \hline \end{array};\quad \underline{\underline{\gamma}}_3=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ \hline -1 & -1 & -1 & \\ \hline & & & -1 \\ \hline \end{array}. \tag{39}$$

Приведенный пример иллюстрирует общее правило записи ДМ в базисе той или иной решетки. Все элементы ДМ (39) являются целочисленными, поэтому такие скалярные функции, как (36), в случае ДМ (39) также имеют целочисленные и постоянные по пространству значения.

Матрица $\underline{\underline{D}}$, определяемая как

$$\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{\gamma}}_{\alpha}\underline{\underline{D}}^{-1}=-\underline{\underline{\gamma}}_{\alpha}^{T}, \tag{40}$$

находится по формуле

$$\underline{\underline{D}}=M^{-1T}\underline{D}M^{-1} \tag{41}$$

и имеет вид

$$\underline{\underline{D}}=\frac{1}{2}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & -1 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array};\quad \det\underline{\underline{D}}=1. \tag{42}$$

Матрица (42) антисимметрична. Приведем явный вид еще двух матриц, которые нам понадобятся в последующем: $\underline{\underline{D}}^2$ и $\underline{\underline{D}}^4$.

$$\underline{\underline{D}}^2=\frac{1}{4}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -6 & 1 & & -1 \\ \hline 1 & -2 & -2 & -1 \\ \hline & -2 & -4 & -2 \\ \hline -1 & -1 & -2 & -2 \\ \hline \end{array},$$
$$\underline{\underline{D}}^4=\frac{1}{16}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 38 & -7 & & 7 \\ \hline -7 & 10 & 14 & 7 \\ \hline & 14 & 24 & 14 \\ \hline 7 & 7 & 14 & 10 \\ \hline \end{array}. \tag{43}$$

Легко проверить, что матрицы E, $\underline{\underline{D}}^2$ и $\underline{\underline{D}}^4$ связаны соотношением

$$\underline{\underline{D}}^4=-\frac{1}{4}E-\frac{7}{4}\underline{\underline{D}}^2. \tag{44}$$

Собственные значения матрицы $\underline{\underline{D}}^2$ равны

$$\left\{\begin{matrix}\frac{1}{8}\left(-7-\sqrt{33}\right), \frac{1}{8}\left(-7+\sqrt{33}\right), \\ \frac{1}{8}\left(-7-\sqrt{33}\right), \frac{1}{8}\left(-7+\sqrt{33}\right)\end{matrix}\right\}. \tag{45}$$

Существует ортогональное преобразование, приводящее симметричную матрицу $\underline{\underline{D}}^2$ к диагональному виду. Это же преобразование приводит матрицу $\left(\theta_1 E + \theta_2 \underline{\underline{D}}^2\right)$ к виду

$$\left(\theta_1 E + \theta_2 \underline{\underline{D}}^2\right) \to$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \theta_1+\theta_2\frac{\left(-7-\sqrt{33}\right)}{8} & & & \\ \hline & \theta_1+\theta_2\frac{\left(-7+\sqrt{33}\right)}{8} & & \\ \hline & & \theta_1+\theta_2\frac{\left(-7-\sqrt{33}\right)}{8} & \\ \hline & & & \theta_1+\theta_2\frac{\left(-7+\sqrt{33}\right)}{8} \\ \hline \end{array}. \tag{46}$$

Далее нам понадобится представление матрицы (46) в виде суммы двух проекторов $\frac{1}{2}\left(E \pm \sigma_3\right)$. Это представление имеет вид

$$\left(\theta_1 E + \theta_2 \underline{\underline{D}}^2\right) \to \left(\theta_1+\theta_2\frac{\left(-7-\sqrt{33}\right)}{8}\right)\frac{1}{2}\left(E+\sigma_3\right) + \left(\theta_1+\theta_2\frac{\left(-7+\sqrt{33}\right)}{8}\right)\frac{1}{2}\left(E-\sigma_3\right). \tag{47}$$

6. Динамические уравнения

6.1. Волновая функция

Относительно волновой функции поля частиц со спином 1/2 сделаем два предположения. Во-первых, вслед за Зоммерфельдом [6] предположим, что она является матрицей той же матричной размерности, что и ДМ, т. е. матрицей 4×4. Во-вторых, волновую функцию будем отождествлять с матрицей, обратной к реперной матрице. Если волновую функцию обозначить *Z*, то второе предположение означает, что

$$Z = R^{-1}, \tag{48}$$

где *R* – та матрица, которая входит в соотношение (9).

В последующем предполагаем, что система локальных ДМ $\left\{\gamma_{\underline{\alpha}}\right\}$ совпадает с системой (10), т. е. $\left\{\gamma_{\underline{\alpha}}\right\}=\left\{\underline{\gamma_{\alpha}}\right\}$, а риманово пространство является плоским. Если при этом рассматривается постоянное по пространству поле мировых ДМ $\left\{\gamma_{\alpha}\right\}$ в майорановском представлении (10), то матрицы Z и R^{-1} равны единичной. Если поле мировых ДМ $\left\{\gamma_{\alpha}\right\}$ совпадает с системой (39), то матрицы Z и R^{-1} равны матрице M^{-1} (37). При этом используются декартовы координаты и реперные векторы $H_{\underline{\alpha}}^{\beta}=\delta_{\underline{\alpha}}^{\beta}$.

6.2. Лагранжиан

Лагранжиан берем в таком виде, чтобы он имел простейшую структуру и по конструкции был максимально близок к обычному лагранжиану для частиц со спином 1/2. Кроме того, чтобы он удовлетворял лоренцевой и $O(4)$-инвариантности и на всех возможных вакуумных системах ДМ был тождественно равным нулю. Одна из возможных конструкций лагранжиана может быть такой:

$$\begin{gathered}\mathrm{L}=a\mathrm{Tr}\left\{Z^{+}\underline{D}\left(H_{\underline{\varepsilon}}^{\alpha}\underline{\gamma^{\varepsilon}}\right)\left(\nabla_{\alpha}Z\right)-\left(\nabla_{\alpha}Z^{+}\right)\underline{D}\left(H_{\underline{\varepsilon}}^{\alpha}\underline{\gamma^{\varepsilon}}\right)Z\right\}+\\+\mathrm{Tr}\left\{\sum_{m=0}^{9}\nu_{m}D^{2m}\right\}\mathrm{Tr}\left\{\sum_{n=0}^{5}\theta_{n}D^{2n+1}\right\}+b\mathrm{Tr}\left\{P_{\mu\nu}P^{\mu\nu}\right\}.\end{gathered}\tag{49}$$

Лагранжиан (49) состоит из трех частей. Первая часть (с множителем a) содержит ковариантную производную от волновой функции

$$\nabla_{\lambda}Z=Z_{,\lambda}+\Phi_{\lambda}Z-Z\Gamma_{\lambda}.\tag{50}$$

Для обеспечения лоренцевой инвариантности этой части в ее конструкцию должны входить локальные матрицы $\left(H_{\underline{\varepsilon}}^{\alpha}\underline{\gamma^{\varepsilon}}\right)$, а матрица $\underline{D}$ должна удовлетворять соотношению $\underline{D}\underline{\gamma_{\alpha}}\underline{D}^{-1}=-\underline{\gamma_{\alpha}}^{T}$. Поскольку матрицы $\underline{D}\underline{\gamma_{\alpha}}$ симметричны, то под следом в первой части стоит антисимметричная вещественная матрица и, следовательно, след от нее тождественно равен нулю.

Вторая часть содержит произведение двух сомножителей. Первый сомножитель содержит сумму четных степеней D^{2m} матрицы $D=Z^{T}\underline{D}Z$ с коэффициентами ν_{m}, а второй – сумму нечетных степеней D^{2n+1} с коэффициентами θ_{n}. Число слагаемых в первом сомножителе не может превышать 10 (числа независимых симметричных матриц 4×4), а во втором сомножителе – 6 (числа независимых антисимметричных матриц 4×4). Матрица D антисимметрична, поэтому второй сомножитель во второй части тождественно равен нулю (а вместе с ним и вся вторая часть). Будем также предполагать, что коэффициенты ν_{m} в конструкции первого сомножителя во второй части подобраны так, чтобы на вакуумных системах (в частности, на ДМ Z_{4}) этот сомножитель обращался в нуль, т. е.

$$\mathrm{Tr}\left\{\sum_{m=0}^{9}\nu_{m}\cdot\underline{D}^{2m}\right\}=0.\tag{51}$$

Третья часть содержит динамический член, связанный с величиной Γ_α; при этом $P_{\alpha\beta}$ – тензор, определяемый как

$$P_{\alpha\beta} = \Gamma_{\beta,\alpha} - \Gamma_{\alpha,\beta} + \left[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta\right]_- . \tag{52}$$

Тензор (52) является антисимметричным и построен по алгоритму, аналогичному тензору электромагнитного поля.

Обратим внимание на два обстоятельства. Во-первых, тождественное обращение в нуль первых двух частей лагранжиана на вакуумных системах ДМ не означает, что тождественно равны нулю и выражения, получаемые при варьировании волновой функции. Во-вторых, при построении лагранжиана никаких предположений относительно малости элементов волновой функции не делается. Более того, по построению волновая функция на вакууме Z_4 равна единичной матрице, а на вакууме D_4 равна матрице M^{-1} (37).

6.3. Динамические уравнения

Динамические уравнения будем получать, считая независимыми величинами вариации δZ^T, δZ, $\delta\Gamma_\alpha$. С учетом этого динамические уравнения принимают следующий вид:

$$a\left(H^{\alpha}_{\underline{\mu}}\underline{\gamma}^{\underline{\mu}}\right)\left(\nabla_\alpha Z\right) + \mathrm{Tr}\left\{\sum_{m=0}^{9}\nu_m D^{2m}\right\} Z\left(\sum_{n=0}^{5}(2n+1)\theta_n D^{2n}\right) = 0. \tag{53}$$

$$-a\left(\nabla_\alpha Z^T\right)\tilde{D}\left(H^{\alpha}_{\underline{\mu}}\gamma^{\underline{\mu}}\right) + \mathrm{Tr}\left\{\sum_{m=0}^{9}\nu_m D^{2m}\right\}\left(\sum_{n=0}^{5}(2n+1)\theta_n D^{2n}\right) Z^T\tilde{D} = 0. \tag{54}$$

$$g^{\lambda\sigma}g^{\mu\nu}\left(\nabla_\mu P_{\sigma\nu}\right) = 0. \tag{55}$$

Уравнения (53), (54) являются аналогами уравнения Дирака и транспонированного к нему, а уравнение (55) – уравнением для свободного (без источников) поля матричной связности Γ_α.

Заметим, что величины Φ_α, входящие в ковариантную производную (50), ответственны за взаимодействие частицы с заданным внешним гравитационным полем. Такое взаимодействие исследовалось во многих работах (см., например, [11]). В данной работе пространство считается плоским и эти взаимодействия не рассматриваются. Не рассматривается также тензор энергии-импульса, который входит в уравнения общей теории относительности.

6.4. Динамика вакуумных систем ДМ

Общие уравнения (53)–(55) значительно упрощаются, если ограничиться задачей исследования динамики двух вакуумных систем ДМ: Z_4 и D_4. На вакууме Z_4 выполняется соотношение $\underline{D}^2 = -E$, а на вакууме D_4 выполняется соотношение (44). Поэтому в уравнениях (53)–(55) можно ограничиться несколькими низшими степенями по матрице D (в нашем рассмотрении – не выше четвертой). В результате уравнение (53) принимает вид

$$\left(H^{\alpha}_{\underline{\mu}}\underline{\gamma}^{\underline{\mu}}\right)\left(\nabla_\alpha Z\right) + \mathrm{Tr}\left\{E + 2D^2 + D^4\right\} Z\left(\theta_1 E + 3\theta_2 D^2\right) = 0. \tag{56}$$

Убедимся в том, что волновая функция $Z = E$, соответствующая вакууму Z_4, удовлетворяет уравнениям (55), (56). Мы не будем сейчас рассматривать свободные поля Янга – Миллса, для удовлетворения уравнения (55) положим

$$\Gamma_\alpha = 0. \tag{57}$$

После этого, положив в уравнении (56) $Z = E$, устанавливаем, что член с ковариантной производной в уравнении (53) тождественно обращается в нуль; обращается тождественно в нуль и алгебраический член в (56) в силу соотношения $\underline{D}^2 = -E$. Таким образом, волновая функция $Z = E$ вместе с выражением (57) для поля Янга – Миллса являются решением уравнений (56), (55).

Проделаем аналогичные выкладки для вакуумной системы ДМ D_4. Используем соотношения (43), (44) и (47). Приводим алгебраический член в (56) к виду:

$$\mathrm{Tr}\left\{E + 2\underline{\underline{D}}^2 + \underline{\underline{D}}^4\right\} Z\left(\theta_1 E + 3\theta_2 \underline{\underline{D}}^2\right) = \frac{17}{8} Z \left\{\begin{matrix} \left(\theta_1 + \theta_2 \dfrac{-7-\sqrt{33}}{8}\right)\dfrac{1}{2}\left(E + \sigma_3\right) + \\ + \left(\theta_1 + \theta_2 \dfrac{-7+\sqrt{33}}{8}\right)\dfrac{1}{2}\left(E - \sigma_3\right) \end{matrix}\right\}. \tag{58}$$

Полученное выражение запишем в виде

$$\mathrm{Tr}\left\{E + 2\underline{\underline{D}}^2 + \underline{\underline{D}}^4\right\} Z\left(\theta_1 E + 3\theta_2 \underline{\underline{D}}^2\right) = m_1 Z \frac{1}{2}\left(E + \sigma_3\right) + m_2 Z \frac{1}{2}\left(E - \sigma_3\right). \tag{59}$$

Здесь мы ввели обозначения

$$m_1 = \frac{17}{8}\left(\theta_1 + \theta_2 \frac{-7-\sqrt{33}}{8}\right), \quad m_2 = \frac{17}{8}\left(\theta_1 + \theta_2 \frac{-7+\sqrt{33}}{8}\right). \tag{60}$$

Таким образом, уравнение (56) для волновой функции, соответствующей вакуумной системе ДМ D_4, после умножения справа на проекторы

$$Q_\pm = \frac{1}{2}\left(E \pm \sigma_3\right) \tag{61}$$

автоматически расщепляется на два уравнения:

$$\left(H^\alpha_{\underline{\mu}} \gamma^{\underline{\mu}}\right)\left(\nabla_\alpha Z\right)\frac{1}{2}\left(E + \sigma_3\right) + m_1 Z \frac{1}{2}\left(E + \sigma_3\right) = 0, \tag{62}$$

$$\left(H^\alpha_{\underline{\mu}} \gamma^{\underline{\mu}}\right)\left(\nabla_\alpha Z\right)\frac{1}{2}\left(E - \sigma_3\right) + m_2 Z \frac{1}{2}\left(E - \sigma_3\right) = 0. \tag{63}$$

Используя обозначения (61), записываем уравнения (62), (63) в виде

$$\left(H^\alpha_{\underline{\mu}} \gamma^{\underline{\mu}}\right)\left(\nabla_\alpha\left(Z Q_+\right)\right) + m_1\left(Z Q_+\right) = 0. \tag{64}$$

$$\left(H^\alpha_{\underline{\mu}} \gamma^{\underline{\mu}}\right)\left(\nabla_\alpha\left(Z Q_-\right)\right) + m_2\left(Z Q_-\right) = 0. \tag{65}$$

7. Проекторы {3; 1}

Из матрицы Z могут быть выделены части, которые подчиняются уравнению Дирака независимо друг от друга. Подходящие проекторы для этой цели могут быть построены на основе матрицы H вида (15). Проекторы записываются как

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}\left(E \pm H\right). \tag{66}$$

В явном виде

$$P_{+} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1/2 & 1/2 & \\ & 1/2 & 1/2 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{-} = \begin{bmatrix} & & & \\ & 1/2 & -1/2 & \\ & -1/2 & 1/2 & \\ & & & \end{bmatrix}. \tag{67}$$

Ранг P_{+} равен 3, а ранг P_{-} равен 1. Удобно вместо матрицы (15) использовать другую матрицу – матрицу, равную

$$H' = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \det\left(H'\right) = -1. \tag{68}$$

Матрицы H, H' связаны ортогональным преобразованием

$$H' = WHW^{-1}, \tag{69}$$

где

$$W = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \\ & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{70}$$

После ортогонального преобразования проекторы (66) записываются как

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}\left(E \pm H'\right). \tag{71}$$

В явном виде

$$P_{+} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{-} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & 1 & \\ & & & \end{bmatrix}. \tag{72}$$

Ранги проекторов P_{+} и P_{-} (штрих опускаем) по-прежнему равны 3 и 1.

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что волновая функция автоматически расщепляется на две части:

$$Z = ZP_{+} + ZP_{-}. \tag{73}$$

Первая часть состоит из трех столбцовых биспиноров

$$ZP_+ = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline Z_{11} & Z_{12} & & Z_{14} \\ \hline Z_{21} & Z_{22} & & Z_{24} \\ \hline Z_{31} & Z_{32} & & Z_{34} \\ \hline Z_{41} & Z_{42} & & Z_{44} \\ \hline \end{array}. \tag{74}$$

Вторая часть состоит из одного биспинора

$$ZP_- = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & Z_{13} & \\ \hline & & Z_{23} & \\ \hline & & Z_{33} & \\ \hline & & Z_{43} & \\ \hline \end{array}. \tag{75}$$

Подчеркнем, что такой результат получается на уровне поля вещественных чисел. Поскольку вещественные числа входят составной частью во все другие алгебры чисел, то разбиение биспинорной матрицы (73) всегда выполнимо и носит универсальный характер.

8. Структура волновой функции, описывающей вакуумную систему ДМ D₄

Выясним физический смысл отдельных частей волновой функции, входящих в уравнения (64), (65). Из вида этих уравнений следует, что уравнение (64) описывает динамику частиц с массой m_1, а уравнение (65) описывает динамику частиц с массой m_2.

С точки зрения анализа физического смысла уравнений (64), (65) существенно то, что расщепление волновой функции на прямую сумму двух слагаемых

$$Z = ZQ_+ \oplus ZQ_- \tag{76}$$

не является полным. Проекторы $Q_\pm$ (61) и проекторы $P_\pm$ (72) коммутируют между собой, поэтому расщепление волновой функции может быть произведено на 4 слагаемых:

$$Z = ZP_+Q_+ \oplus ZP_+Q_- \oplus ZP_-Q_+ \oplus ZP_-Q_-. \tag{77}$$

Поскольку выполняется тождество

$$P_-Q_- \equiv 0, \tag{78}$$

то разложение (77) сводится к соотношению

$$Z = ZP_+Q_+ \oplus ZP_+Q_- \oplus ZP_-Q_+. \tag{79}$$

Умножив уравнения (64), (65) справа на проекторы $P_\pm$, $Q_\pm$ и учтя (78), получим три уравнения:

$$\left(H^{\alpha}_{\underline{\mu}}\gamma^{\underline{\mu}}\right)\left(\nabla_\alpha\left(ZP_+Q_+\right)\right) + m_1\left(ZP_+Q_+\right) = 0; \tag{80}$$

$$\left(H^{\alpha}_{\underline{\mu}}\gamma^{\underline{\mu}}\right)\left(\nabla_\alpha\left(ZP_-Q_+\right)\right) + m_1\left(ZP_-Q_+\right) = 0; \tag{81}$$

$$\left(H^{\alpha}_{\underline{\mu}}\gamma^{\underline{\mu}}\right)\left(\nabla_{\alpha}\left(ZP_{+}Q_{-}\right)\right)+m_{2}\left(ZP_{+}Q_{-}\right)=0. \tag{82}$$

В уравнение (80) входит биспинор

$$ZP_{+}Q_{+}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline Z_{11} & & & \\ \hline Z_{21} & & & \\ \hline Z_{31} & & & \\ \hline Z_{41} & & & \\ \hline\end{array}, \tag{83}$$

а в уравнение (81) – биспинор

$$ZP_{-}Q_{+}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & Z_{13} & \\ \hline & & Z_{23} & \\ \hline & & Z_{33} & \\ \hline & & Z_{43} & \\ \hline\end{array}. \tag{84}$$

Каждый из этих биспиноров описывает частицу с массой m_1. В уравнение (82) входит биспинорный дублет

$$ZP_{+}Q_{-}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & Z_{12} & & Z_{14} \\ \hline & Z_{22} & & Z_{24} \\ \hline & Z_{32} & & Z_{34} \\ \hline & Z_{42} & & Z_{44} \\ \hline\end{array}, \tag{85}$$

описывающий частицы с массой m_2.

Полученные результаты означают, что в области пространства, в которой ДМ представляют собой решеточные ДМ типа (39), волновая функция является суперпозицией двух синглетов с массой m_1 и одного дублета с массой m_2. То есть мы получаем ту структуру поколения лептонов, о которой говорилось во Введении (атрибуты (1), (3)). В отличие от СМ рассматриваемый формализм не требует (но и не запрещает) обращения в нуль массы m_1. Стерильность биспинора $ZP_{-}Q_{+}$ (атрибут (5)) обусловлена тем, что любые бинарные комбинации наблюдаемых величин с участием $ZP_{-}Q_{+}$ и любого из состояний $ZP_{+}Q_{+}$, $ZP_{+}Q_{-}$ тождественно равны нулю из-за наличия рядом стоящих ортогональных проекторов P_{-} и P_{+}.

Полученные результаты, как следует из изложенного, не привнесены извне, а получены в рамках внутренней логики развиваемого подхода.

9. Обсуждение

В работе исследован вопрос о том, какие биспинорные состояния возникают в случае, если:

– используется формализм вещественных матриц Дирака и вещественных волновых функций,

– волновые функции имеют вид не столбцовых биспиноров, а матриц, причем эти матрицы совпадают с обратными реперными матрицами,

– учитывается наличие не только дираковских матриц вакуумного типа в ортонормированном базисе Z_4, но и в базисе автодуальной решетки D_4.

Для инвариантного выделения из волновой функции биспинорных состояний в работе инвариантным образом введены нестандартные проекторы рангов 1 и 3. В конструкцию проекторов входит матрица, меняющая местами матрицы «ро» и «сигма». Введен лагранжиан, из которого могут быть получены динамические уравнения типа уравнения Дирака.

В результате проведенного исследования установлено, что волновая функция, описывающая поле ДМ в ортонормированном базисе Z_4, удовлетворяет динамическим уравнениям тривиальным образом. Ситуация с волновой функцией, описывающей поле ДМ в базисе решетки D_4, качественно иная. Это поле представляет собой прямую сумму двух биспинорных синглетов с массой m_1 и одного биспинорного дублета с массой m_2. Механизм возникновения масс – и это принципиально – отличается от механизма Хиггса. Массы m_1, m_2 возникают потому, что существует система ДМ на решеточном базисе D_4, которая удовлетворяет динамическим уравнениям, но отличается от системы ДМ на ортонормированном базисе Z_4. Область пространства, в которой система ДМ построена на решеточном вакууме D_4, естественно отождествить с совокупностью состояний, принадлежащих электронному поколению лептонов.

Кинематические и динамические свойства состояний, описываемых волновой функцией поля ДМ в базисе решетки D_4, совпадают с теми атрибутами (1)–(5), которые перечислены во Введении и которые вводятся в СМ для всех поколений лептонов и кварков. Поэтому мы делаем вывод о том, что вещественные матрицы Дирака решетчатого типа и волновая функция, отождествляемая с обратной реперной матрицей, в наибольшей степени адаптированы к формализму СМ, поскольку уже на уровне кинематики воспроизводят многие из тех атрибутов СМ, которые в настоящее время вносятся в эту модель руками. Этот факт, по-видимому, можно рассматривать как указание на то направление совершенствования СМ, на котором она может быть доведена до уровня фундаментальной теории. При этом существенно, что результаты, полученные в рамках вещественных чисел, сохранятся при построении динамики поля частиц со спином 1/2 над любым другим более общим классом чисел. Рассмотренный в работе формализм допускает также обобщение на многомерные внутренние пространства.

Автор благодарит А. К. Хлебникова за обсуждения ряда проблем, связанных с тематикой работы.

Список литературы

1. Комминс Ю., Буксбаум Ф. Слабые взаимодействия лептонов и кварков. – М.: Энергоатомиздат, 1987.

2. Окунь Л. Б. Лептоны и кварки. – М.: Наука, 1990.

3. Красников Н. В., Матвеев В. А. Новая физика на большом адронном коллайдере. – М.: URSS, 2014.

4. CMS Collaboration. Search for the standard model Higgs boson produced in association with a W or a Z boson and decaying to bottom quarks [Electronic resource]. – http://arXiv:1310.3687 [hep-ex].

5. Горбатенко М. В. Биспиноры, порождаемые полем дираковских матриц в римановом пространстве // Теор. и матем. физика. 1995. Т. 103, № 1. С. 32.

6. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры. Т. II. М.: Гостехтеориздат, 1956.

7. Gorbatenko M. V., Pushkin A. V. Physical vacuum properties and internal space dimension // General Relativity and Gravitation. 2005. Vol. 37, No. 10. P. 1705 [http://arXiv: gr-qc/0409095].

8. Горбатенко М. В., Пушкин А. В. О соответствии между тензорами и биспинорами (ч. I) // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теор. и приклад. физика. 1999. Вып. 3. С. 3.

9. Горбатенко М. В., Пушкин А. В. О соответствии между тензорами и биспинорами (ч. II) // Там же. С. 19.

10. Горбатенко М. В. Частицы со спином 1/2 и 11-мерное риманово пространство // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теор. и приклад. физика. 2017. Вып. 2. С. 3–11.

11. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. Solution of the problem of uniqueness and hermiticity of hamiltonians for dirac particles in gravitational fields // Phys. Rev. 2010. Vol. D 82. P. 104056 [http://arXiv:1007.4631 [gr-qc]].

Dirac Matrices of the Lattice Type and the Standart Model Formalism

M. V. Gorbatenko

It is shown that real Dirac matrices and wave function identified as inverse reference matrix reproduce many attributes of Standart Model, which in present time are introduced in the model by hands, in adequately manner. At the same time, principal moments are an use of Dirac matrices of the lattice type and invariant projectors with a range 3.