

УДК 519.6

DOI: 10.53403/9785951504937_2020_25.1_68_79

Численное решение двумерного уравнения лучистой теплопроводности методом сглаженных частиц

**А. А. Лазарев, С. Н. Полищук,
Б. П. Тихомиров**

В работе рассматривается численное решение двумерного уравнения лучистой теплопроводности методом сглаженных частиц (SPH). Приведена разностная аппроксимация уравнения для плоского и осесимметричного случаев. Дискретизация уравнения выполняется по неявной разностной схеме с последующей линеаризацией уравнения состояния по Ньютону. Для осесимметричных задач предложен способ проведения вычислений в окрестности оси вращения, основанный на использовании плоского интерполяционного ядра и вспомогательных (фиктивных) частиц. Указан простой алгоритм расчета граничных условий. Представлены результаты расчетов тестовых задач, имеющих аналитическое решение.

Введение

Метод сглаженных частиц (SPH) [1, 2] является бессеточным лагранжевым методом, развитие которого в первую очередь связано с численным моделированием астрофизических процессов. Одним из таких процессов является перенос энергии излучением. В случае, когда длина свободного пробега фотонов много меньше характерного размера изучаемой системы, хорошим приближением для указанного процесса служит модель лучистой теплопроводности. Она используется во многих важных приложениях, в частности для решения задач тяжелоионного инерциального термоядерного синтеза [3].

Настоящая работа посвящена краткому описанию методики расчета лучистого теплопереноса методом сглаженных частиц [4] и тестированию алгоритмов на задачах, имеющих аналитическое решение.

Рассматривается уравнение теплопроводности в плоской и осесимметричной постановках. Дифференциальное SPH-уравнение аппроксимируется неявной разностной схемой. В осесимметричном случае предлагается использовать плоское интерполяционное ядро сглаживания, для определения которого вблизи оси применяется особый алгоритм организации вычислений.

На примере тестовых задач о распространении тепла в однородных и слоистых системах проведена оценка точности численных решений, рассмотрен вопрос о влиянии на точность начальной расстановки частиц.

Постановка задачи. SPH-уравнение теплопроводности

Рассматривается распространение излучения в ограниченной области Ω . Уравнение, описывающее данный процесс в приближении лучистой теплопроводности, для плоского ($\nu=0$) и осесимметричного ($\nu=1$) случаев имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\chi r^\nu \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) = Q. \quad (1)$$

Здесь $\vec{r} = (z, r)$ – координаты; t – время; ρ – плотность; ε – удельная внутренняя энергия; T – температура; Q – функция источника (стока); χ – коэффициент теплопроводности, который вычисляется по формуле $\chi = \frac{4}{3} c \sigma \ell T^3$, где c – скорость света, σ – постоянная Стефана – Больцмана, ℓ – эффективный пробег излучения.

Уравнение (1) дополняется соотношениями

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T); \quad l = l(\rho, T) \quad \text{или} \quad \chi = \chi(\rho, T).$$

В качестве начальных условий используется заданное распределение температуры, в качестве граничных условий могут быть взяты значение температуры $T_G(t, \vec{r})$ и заданный поток тепла $q_G(t, \vec{r})$.

Для численного решения уравнения (1) применяется метод SPH [1, 2], позволяющий моделировать перенос тепла в сложных неоднородных областях как без учета, так и с учетом движения вещества. В настоящей работе рассматривается теплообмен в неподвижной среде.

Метод сглаженных частиц основан на интегральной интерполяции величин. Базовые интерполяционные формулы для вычисления значения функции $f(\vec{r})$ и ее градиента в любой точке пространства по значениям в известных точках \vec{r}_j имеют следующий вид:

$$\langle f(\vec{r}) \rangle = \sum_j \frac{m_j}{\rho(\vec{r}_j)} f(\vec{r}_j) W(\vec{r} - \vec{r}_j, h), \quad (2)$$

$$\langle \text{grad} f(\vec{r}) \rangle = \sum_j \frac{m_j}{\rho(\vec{r}_j)} f(\vec{r}_j) \text{grad} W(\vec{r} - \vec{r}_j, h), \quad (3)$$

где m – масса, h – радиус сглаживания, W – интерполяционное (сглаживающее) ядро: $\text{grad} W(\vec{r} - \vec{r}_j, h) = W'(\vec{r} - \vec{r}_j, h) \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}$.

В качестве интерполяционного ядра W используется сплайн третьей степени [5]

$$W(\vec{r} - \vec{r}_j, h) = \frac{1}{N} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} R^2 + \frac{3}{4} R^3, & 0 < R < 1; \\ \frac{1}{4} (2 - R)^3, & 1 \leq R < 2; \\ 0, & R \geq 2, \end{cases}$$

где $R = |\vec{r} - \vec{r}_j|/h$; $N = 0,7\pi h^2$ для двумерного случая.

В двумерной осесимметричной геометрии интерполяционная формула (2) с указанным выше ядром преобразуется к виду

$$\langle f(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j r_j} f(\vec{r}_j) W(\vec{r} - \vec{r}_j, h), \quad (4)$$

где r_j – расстояние до оси симметрии.

Аналогично формуле (3) дифференцирование по пространственным переменным z, r переносится на дифференцирование функции W , и градиент функции $f(\vec{r})$ принимает вид

$$\langle \text{grad} f(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j r_j} f(\vec{r}_j) \text{grad} W(\vec{r} - \vec{r}_j, h). \quad (5)$$

С помощью интерполяционных формул (2)–(5) легко получить SPH-представление уравнения теплопроводности для частицы с номером i :

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right)_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \left(\frac{1}{2\pi r_j} \right)^v \chi_j \nabla T_j \nabla W_{ij} + Q_i. \quad (6)$$

Численное решение SPH-уравнения

Каждая частица с номером i может обмениваться энергией с любой окружающей частицей с номером j в пределах двух радиусов сглаживания h . Граница взаимодействия частиц располагается на середине отрезка, соединяющего их геометрические центры (рис. 1).

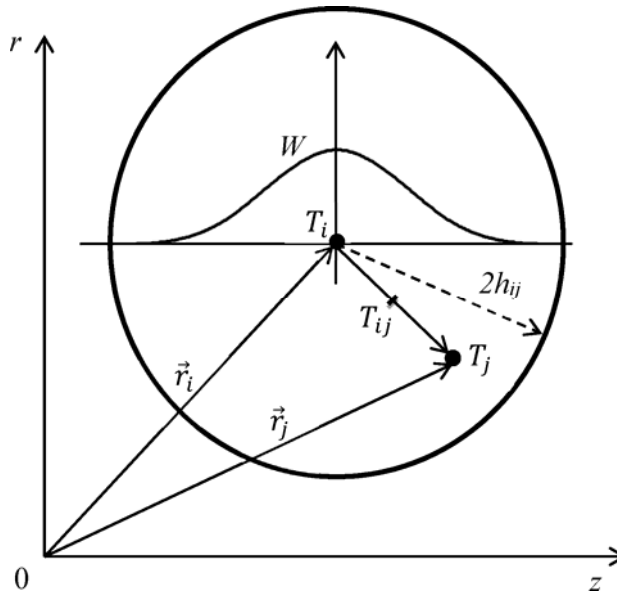


Рис. 1. Схема взаимодействия двух частиц

Пользуясь свойством симметрии интерполяционного ядра, уравнение (6) нетрудно привести к виду

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)_i = 2 \sum_j \left(\frac{1}{2\pi} \frac{r_{ij}}{r_i r_j}\right)^v \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \chi_{ij} \nabla T_{ij} \nabla W_{ij} + Q_i, \quad (7)$$

где $r_{ij} = \frac{1}{2}(r_i + r_j)$. Хотя это уравнение идентично уравнению (6), вообще говоря, приближенно для него выполняется закон сохранения энергии. Поэтому в качестве SPH-модели в дальнейшем будем использовать именно уравнение (7).

Заменяя в нем произведение градиентов на производную по направлению, а последнюю – на разностное отношение, получаем следующую динамическую систему:

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} - 2 \sum_j \left(\frac{1}{2\pi} \frac{r_{ij}}{r_i r_j}\right)^v \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \chi_{ij} \frac{T_i - T_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} W'_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, h_{ij}) = Q_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (8)$$

где $h_{ij} = \alpha(h_i + h_j)$, $\alpha = \frac{1}{2}$; N – число частиц.

Коэффициент теплопроводности χ_{ij} на границе взаимодействия частиц можно вычислять различными способами [6, 7], в частности по одной из разновидностей модифицированного гармонического усреднения:

$$\chi_{ij} = \frac{(\chi_i(\rho_i, T_i) + \chi_i(\rho_i, T_{ij}))(\chi_j(\rho_j, T_j) + \chi_j(\rho_j, T_{ij}))}{(\chi_i(\rho_i, T_i) + \chi_i(\rho_i, T_{ij})) + (\chi_j(\rho_j, T_j) + \chi_j(\rho_j, T_{ij}))},$$

где T_{ij} – температура на границе взаимодействия частиц, определяемая из условия непрерывности температуры и потока.

Неявная аппроксимация дискретного уравнения (8) имеет следующий вид:

$$\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n = 2\tau \sum_j \left(\frac{1}{2\pi} \left(\frac{r_{ij}}{r_i r_j}\right)\right)^v \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \chi_{ij}^{n+1} \frac{T_i^{n+1} - T_j^{n+1}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} W'_{ij} + \tau Q_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

В данной системе уравнений присутствуют неизвестные на шаге по времени с номером $n + 1$. Используя линеаризацию уравнения состояния по Ньютону, систему переписываем относительно температуры $T^{\gamma+1}$ (γ – номер итерации):

$$\varepsilon_i^\gamma - \varepsilon_i^n + \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \Big|_i (T_i^{\gamma+1} - T_i^\gamma) - 2\tau \sum_j \left(\frac{1}{2\pi} \frac{r_{ij}}{r_i r_j}\right)^v \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \chi_{ij}^\gamma \frac{T_i^{\gamma+1} - T_j^{\gamma+1}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} W'_{ij} = \tau Q_i, \quad (9)$$

$$\varepsilon_i^\gamma \Big|_{\gamma=0} = \varepsilon_i^n, \quad T_i^\gamma \Big|_{\gamma=0} = T_i^n, \quad (10)$$

Итерационный процесс завершается при выполнении для всех i неравенства

$$\left|T_i^{\gamma+1} - T_i^\gamma\right| < \varepsilon_{\text{отн}} \left|T_i^\gamma\right| + \varepsilon_{\text{абс}},$$

где $\varepsilon_{\text{отн}} = 10^{-4}$ и $\varepsilon_{\text{абс}} = 10^{-8}$ – соответственно значения относительной и абсолютной погрешностей.

Шаг по времени выбирается следующим образом:

$$\tau^{n+1} = \min \{1, 2\tau^n, \tau_{\text{табл}}\},$$

где τ^n – предыдущее значение шага, $\tau_{\text{табл}}$ – заданное таблично максимальное значение шага по времени.

В методе SPH некоторые трудности возникают при практической реализации граничных условий. Укажем простой способ расчета для случая, когда в плоскости (z, r) границами являются прямые линии, ортогональные осям координат. Для определенности будем рассматривать правую границу $z = z_{\text{гр}}$ расчетной области (рис. 2).

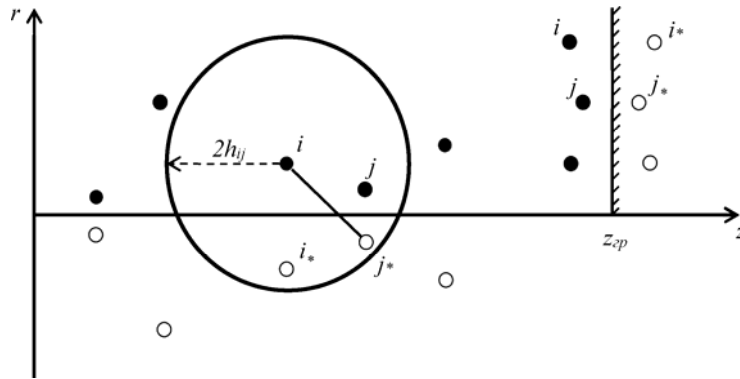


Рис. 2. Счетные (●) и фиктивные (○) частицы

Введем дополнительные (фиктивные) частицы. Они симметричны относительно границы и добавляются, если частица i лежит в приграничной полосе шириной \tilde{h} . Заметим, что в случае неподвижной среды можно взять, например, $\tilde{h} = h$.

Фиктивная частица i_* имеет координаты $z_{i_*} = 2z_{\text{гр}} - z_i$, $r_{i_*} = r_i$. В зависимости от типа граничного условия в ней ставится либо заданная температура $T_{i_*} = T_G(t^{n+1}, z_{\text{гр}}, r_i)$, либо заданное значение потока $q_i = q_G(t^{n+1}, z_{\text{гр}}, r_i)$.

По постановке задачи граница может быть плоскостью симметрии. Тогда в фиктивные частицы переносятся значения температуры из соответствующих родительских частиц: $T_{i_*} = T_i$.

Отметим, что, если на границе ставится условие симметрии или задана температура, суммирование в формуле (9) осуществляется по всем находящимся в области действия ядра сглаживания ($W_{ij} \neq 0$) частицам, включая фиктивные.

Иначе обстоит дело, когда задан поток. В этом случае из множества потоковых фиктивных частиц берется только частица $j = i_*$. Остальные потоковые частицы не учитываются, и слагаемое под знаком суммы в формуле (9), «отвечающее» за взаимодействие частицы i с частицей i_* , принимает вид

$$\left(\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_i} \right)^v \frac{m_j}{\rho_i^2} W'_{i i_*} q_G.$$

Рассмотрим один из способов расчета окрестности оси вращения в осесимметричных задачах.

Формально расширим координатную полуплоскость $(-\infty < z < +\infty, 0 < r < +\infty)$ до всей плоскости и построим в нижней полуплоскости $(r < 0)$ фиктивные частицы i_* с координатами $(z_i, -r_i)$. Каждой фиктивной частице присвоим все параметры родительской частицы, включая текущее значение температуры.

Вычисления проводим по формуле (9) с небольшим изменением, а именно слагаемое под знаком суммы, отвечающее за взаимодействие частицы i с фиктивной частицей j_* , берем в виде

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{r_{ij_*}}{r_i |r_{j_*}|} \right) \frac{m_{j_*}}{\rho_i \rho_{j_*}} \chi_{ij_*}^\gamma W_{ij_*}'(\bar{r}_i - \bar{r}_{j_*}, h_{ij_*}) \frac{T_i^{\gamma+1} - T_{j_*}^{\gamma+1}}{|\bar{r}_i - \bar{r}_{j_*}|} \text{ при } r_{ij_*} = \frac{1}{2}(r_i + |r_{j_*}|).$$

Итак, установлено, что если некоторые элементы границы расчетной области принадлежат плоскости симметрии или оси вращения, то в системе линейных алгебраических уравнений (9) появляются дополнительные неизвестные функции – температуры фиктивных частиц. Поэтому, чтобы замкнуть систему без ее расширения, температуры фиктивных частиц заменяются на температуры соответствующих родительских частиц. В результате число уравнений в системе не увеличивается и, естественно, совпадает с числом счетных частиц.

Результаты тестовых расчетов

Ниже приводятся результаты расчетов ряда задач, имеющих аналитические решения.

Коэффициент теплопроводности пересчитывается только на первых двух нелинейных итерациях, а затем фиксируется [8]. Система уравнений (9), (10) на каждой итерации решается с использованием библиотеки решателей LParSol [9] по методу сопряженных градиентов с предобуславливанием по блочному методу Якоби. Источник Q в (9) вычисляется на шаге по времени с номером n .

Задача 1. Распространение тепла от постоянно действующего источника. Рассматривается задача [10] распространения сферической тепловой волны от постоянного действующего источника $Q(t, T) = \frac{3T}{2t}$. Уравнение состояния $\varepsilon = c_v T$, $c_v = 1$. Коэффициент теплопроводности

$\chi = T^\sigma$, $\sigma = 4$. Плотность среды $\rho = 1$.

Аналитическое решение данной задачи имеет следующий вид [10]:

$$T(r, t) = 1,21921 \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{r_\Phi} \right)^2 \right)^{0,25},$$

где $r_\Phi = 1,48647\sqrt{t}$ – радиус фронта тепловой волны.

Задача решалась в осесимметричной постановке. Область представляет собой квадрат $0 \leq z, r \leq 2,5$. Расстановка частиц выполнялась равномерно, число частиц вдоль осей было взято одинаковым. Радиус сглаживания задан постоянным: $h = 1,5d_0$, где d_0 – расстояние между частицами. В частицах, расположенных в квадрате $0 \leq z, r \leq 0,1$, задана средняя начальная температура $T_0 = 1,1629541$, в остальных частицах температура равна нулю.

Расчеты проводились с начального момента времени $t = 0,0069666$ до момента времени $t = 1,5$. Начальный шаг по времени задан равным 10^{-5} , максимальный шаг по времени $7,5 \cdot 10^{-5}$.

Было сделано три расчета с числом частиц вдоль каждой из осей, равным 50, 100 и 200 соответственно.

На рис. 3 (см. также цв. вкл.) представлено распределение температуры на конечный момент времени в расчете с числом частиц вдоль осей, равным 50. На рис. 4 показано распределение температуры вдоль оси Or .

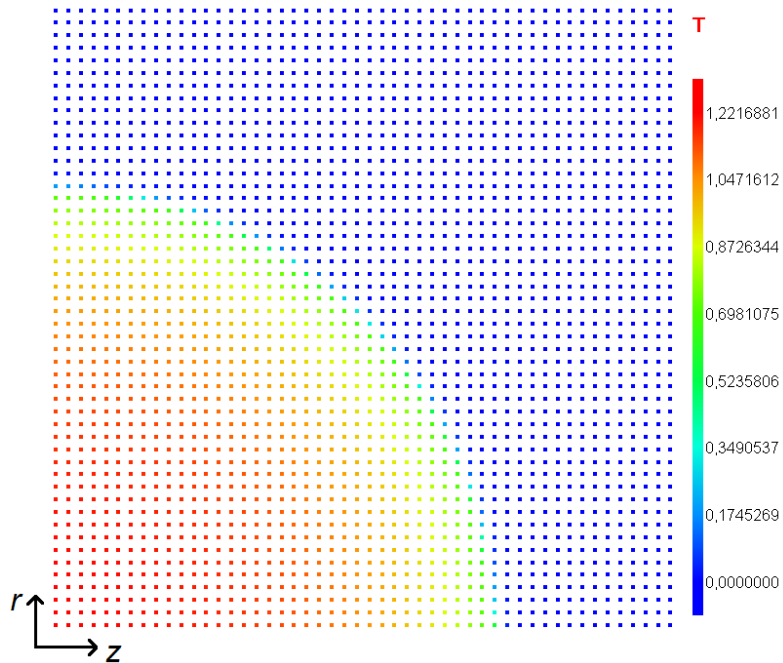


Рис. 3. Задача 1. Распределение температуры на конечный момент времени

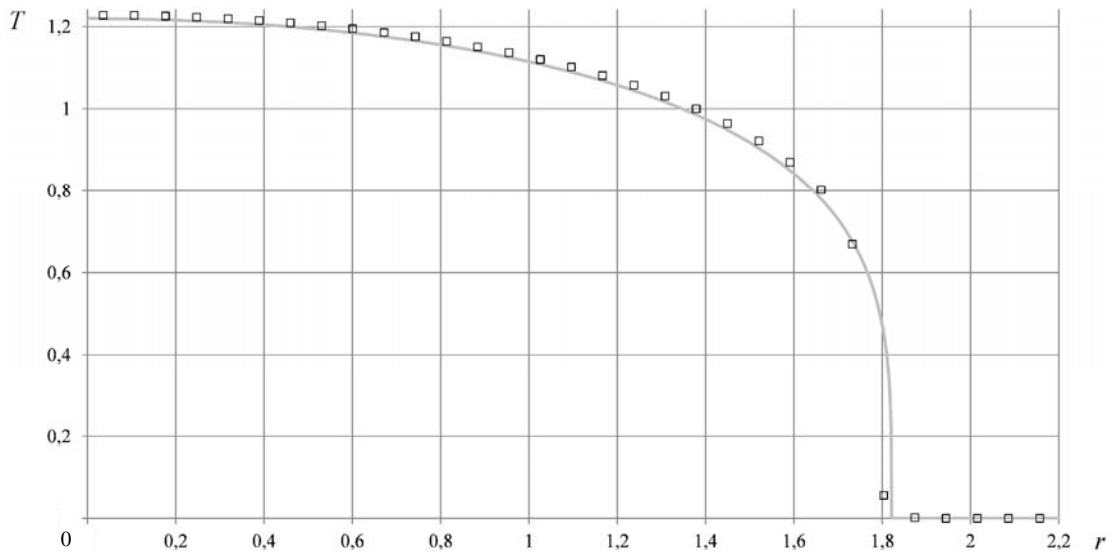


Рис. 4. Задача 1. Графики распределения температуры вдоль оси Or :
 — — аналитическое решение, \square — численное решение

Погрешность численного решения в норме $L1$ в расчетах с числом частиц вдоль осей 50, 100 и 200 составила соответственно $1,04 \cdot 10^{-2}$, $5,05 \cdot 10^{-3}$ и $2,17 \cdot 10^{-3}$, в норме $L2$ – $4,14 \cdot 10^{-2}$, $2,83 \cdot 10^{-2}$ и $1,89 \cdot 10^{-2}$, в норме C – $3,56 \cdot 10^{-1}$, $3,26 \cdot 10^{-1}$ и $3,00 \cdot 10^{-1}$.

Задача 2. Распространение тепловой волны в слоистой системе. Рассматривается плоская одномерная задача о бегущей тепловой волне в слоистой системе: в первом слое $[0; 10]$ $\rho = 1$, $\chi = 100T^5$, $\varepsilon = T$; во втором слое $[10; 10,6]$ $\rho = 20$, $\chi = 5T^5$, $\varepsilon = T$. На левой границе задана температура $T(t) = \left(\frac{t}{20}\right)^{0,2}$, на правой – равный нулю поток тепла.

Аналитическое решение данной задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & \text{– в первом слое } T(z,t) = \begin{cases} \left(\frac{t-z}{20}\right)^{0,2}, & \text{если } t-z > 0; \\ 0, & \text{если } t-z \leq 0; \end{cases} \\
 & \text{– во втором слое } T(z,t) = \begin{cases} \left(\frac{t-10-20(z-10)}{20}\right)^{0,2}, & \text{если } t-20z > -190; \\ 0, & \text{если } t-20z \leq -190. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Решение однообластной задачи приведено в работе [11].

Задача считалась в плоской двумерной постановке. Расчетная область представляет собой прямоугольник со сторонами по оси Oz $[0; 10,6]$ и по оси Or $[0; 0,3]$. Было сделано три расчета. Расстановка частиц по слоям выполнялась равномерно с числом частиц вдоль оси Oz : 1) в первом слое 50, во втором – 60; 2) в первом слое 100, во втором – 120; 3) в первом слое 200, во втором – 240. Радиус сглаживания задан постоянным: $h = 1,5d_0$, где d_0 – расстояние между частицами.

Расчеты проводились до момента времени $t = 20$. Начальный шаг по времени задан равным 10^{-5} , максимальный шаг по времени равен 10^{-4} .

На рис. 5 показано распределение температуры в расчете с числом частиц вдоль оси Oz , равным 440.

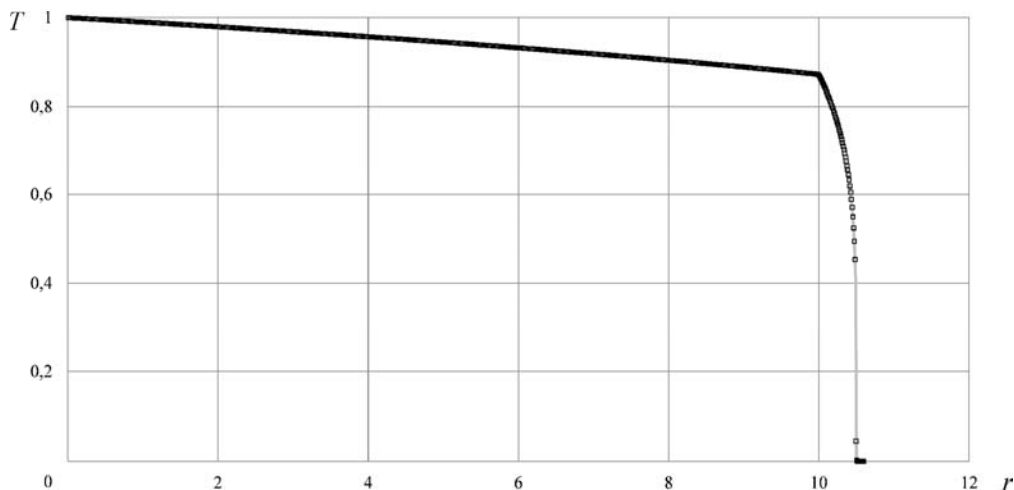


Рис. 5. Задача 2. Распределение температуры вдоль оси Oz :

— – аналитическое решение, \square – численное решение

Погрешность численного решения в норме $L1$ в расчетах с числом частиц 110, 220 и 440 вдоль оси Oz составила соответственно $4,83 \cdot 10^{-3}$, $1,43 \cdot 10^{-3}$ и $3,04 \cdot 10^{-4}$, в норме $L2$ $-2,78 \cdot 10^{-2}$, $1,25 \cdot 10^{-2}$ и $4,87 \cdot 10^{-3}$, в норме C $-4,93 \cdot 10^{-1}$, $3,72 \cdot 10^{-1}$ и $2,58 \cdot 10^{-1}$.

Задача 3. Распространение тепла от объемного источника. Рассматривается задача [12] распространения сферической и цилиндрической тепловых волн от постоянного действующего источника. Область представляет собой прямоугольник $0 \leq r \leq 1,1$; $-1,1 \leq z \leq 1,1$. Уравнения состояния и коэффициент теплопроводности заданы следующим образом:

$$\varepsilon = \begin{cases} T^{1,5}, & z \leq 0; \\ T, & z > 0; \end{cases} \quad \chi = \begin{cases} T^{4,5}, & z \leq 0; \\ T^4, & z > 0. \end{cases}$$

Плотность среды $\rho = 1$. Фоновое значение температуры $T_\Phi = 10^{-8}$.

В начальный момент времени $t_0 = 0,0004$ задана температура

$$T_0 = \begin{cases} 0,57908, & -0,02 \leq z \leq 0, \quad 0 \leq r \leq 0,02; \\ 0,8 & 0 \leq z \leq 1,1, \quad 0 \leq r \leq 0,02. \end{cases}$$

Функция источника имеет следующий вид:

$$F(z, r, t) = \begin{cases} 1,5 \frac{T^{1,5}}{t}, & z < 0; \\ \frac{T}{t}, & z > 0. \end{cases}$$

Аналитическое решение данной задачи имеет следующий вид [12]:

$$T(r, t) = \left(1 - \frac{r^2}{t}\right)^{0,25}, \quad \text{где } r = \begin{cases} \sqrt{z^2 + r^2}, & z < 0; \\ r, & z \geq 0. \end{cases}$$

Расстановка частиц выполнялась двумя способами: равномерно и хаотично.

Равномерная расстановка выполнялась с шагами, равными 0,02; 0,04 и 0,08. Было получено соответственно 6050, 24200 и 96800 частиц.

Хаотичная расстановка выполнялась по следующему алгоритму. В области равномерно с шагом $\Delta = 0,0285$ расставляются точки. Далее выполняется случайное их смещение на расстояние до $0,75\Delta$. При этом в окрестности оси $0 \leq r \leq 0,02$, где задан источник, равномерная расстановка сохраняется. Исходя из полученного набора частиц, выполняется триангуляция области по алгоритму Делоне [13]. Далее каждый построенный треугольник объявляется частицей, расположенной в его центре масс. Число частиц составило 6032.

Радиус сглаживания частиц вычислялся так, чтобы гарантировать число «соседей» для частиц $N_s = 25$. В работе [14] предложена следующая итерационная формула:

$$h_i^{\theta+1} = \frac{1}{2} h_i^\theta \left[1 + \left(\frac{N_s}{N_i^\theta} \right)^{1/2} \right]; \quad h_i^\theta \Big|_{\theta=0} = h_i^n, \quad (11)$$

где θ – номер итерации, N_i – текущее число соседних частиц.

Максимальное число итераций в (11) было задано равным 5. В качестве условия завершения итераций использовалось ограничение на максимальное значение $N_s/N_i \cdot 100\%$ по всем частицам, заданное равным 10 %.

Расчеты проводились до момента времени $t = 1$. Начальный шаг по времени задан равным 10^{-5} , максимальный шаг по времени равен $7,5 \cdot 10^{-5}$.

На рис. 6 (см. также цв. вкл.) представлено распределение температуры на конечный момент времени. На рис. 7 показано распределение температуры вдоль оси Or в расчетах с равномерной и хаотичной расстановками частиц.

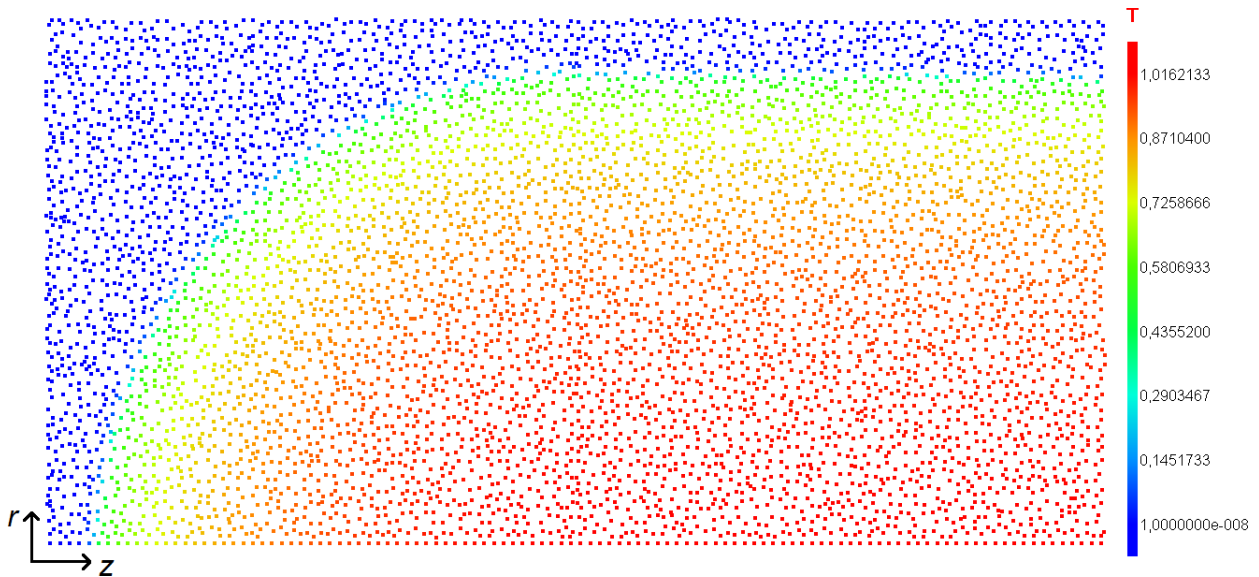


Рис. 6. Задача 3. Распределение температуры на конечный момент времени

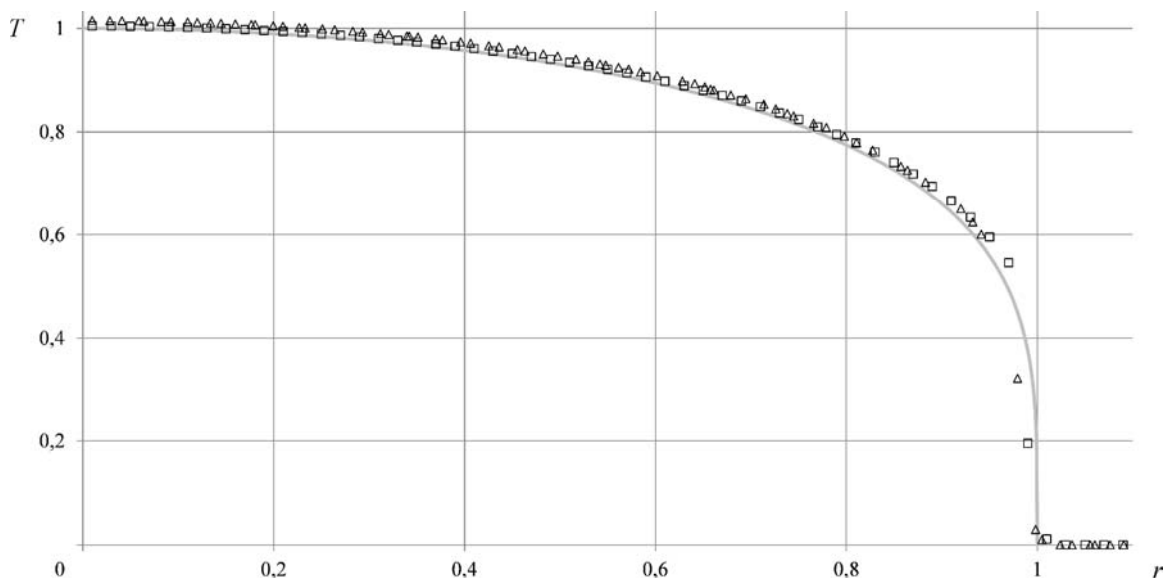


Рис. 7. Задача 3. Распределения температуры вдоль оси Or : — — аналитическое решение, □ — равномерная расстановка частиц, Δ — хаотичная расстановка частиц

Погрешность численного решения в норме $L1$ в расчетах с равномерной расстановкой частиц при числе частиц 6050, 24200 и 96800 составила соответственно $1,55 \cdot 10^{-2}$, $7,59 \cdot 10^{-3}$ и $3,77 \cdot 10^{-3}$, в норме $L2$ – $3,56 \cdot 10^{-2}$, $2,17 \cdot 10^{-2}$ и $1,29 \cdot 10^{-2}$, в норме C – $3,59 \cdot 10^{-1}$, $3,06 \cdot 10^{-1}$ и $2,59 \cdot 10^{-1}$. Погрешность численного решения при хаотичной расстановке частиц с числом частиц 6032 в норме $L1$ составила $1,84 \cdot 10^{-2}$, в норме $L2$ – $4,24 \cdot 10^{-2}$, в норме C – $3,96 \cdot 10^{-1}$.

Заключение

В работе изложена методика численного решения задач теплопроводности методом сглаженных частиц в двумерной плоской и осесимметричной постановках. Проведена ее апробация на примере решения задач о распространении тепла в однородных и слоистых системах. Получено хорошее согласие численных и аналитических решений. Показана сходимость решения по числу частиц. Установлено, что хаотичное расположение частиц не оказывает существенного влияния на точность численного решения.

Список литературы

1. Gingold R. A., Monaghan J. J. Smoothed Particle Hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1977. Vol. 181. P. 375–389.
2. Lucy L. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis // Astronom. J. 1977. Vol. 82. P. 1013.
3. Софронов И. Д., Тихомиров Б. П., Блажнов С. В. и др. Приближенные методы расчета лучистого энергопереноса в оптических неоднородных областях сложной формы // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 1999. Вып. 4. С. 68–75.
4. Brookshaw L. A method of calculating radiative heat diffusion in particle simulations // Proc. ASA. 1986. Vol. 6(2). P. 207–210.
5. Monaghan J. J. Smoothed particle hydrodynamics // Annual Rev. of Astronomy and Astrophysics. – Clayton, 1992. P. 543–574.
6. Дмитриев Н. А., Софронов И. Д., Тихомиров Б. П. Методика расчета одномерных многообластных задач высокотемпературной газовой динамики // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач матем. физики. 1983. Вып. 3. С. 3–8.
7. Авдошина Е. В., Бондаренко Ю. А., Горбунов А. А. и др. Исследование точности различных методов усреднения коэффициента теплопроводности на стороне ячейки интегрирования при численном решении уравнения теплопроводности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2014. Вып. 3. С. 32–46.
8. Бондаренко Ю. А., Горбунов А. А. Практические условия устойчивости для счета тепловых волн в неявных разностных схемах // Там же. 2008. Вып. 4. С. 3–12.
9. Бартенев Ю. Г., Ерзунов В. А., Карпов А. П. и др. Комплекс библиотек параллельных решателей СЛАУ LParSol версии 3 // Сб. докл. XIV Международ. конф. «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах». – Пермь: ПНИПУ, 2014. С. 49–53.

10. Тихомиров Б. П. Автомодельные тепловые волны от сосредоточенного или объемного источника в среде с неоднородными теплофизическими параметрами // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2010. Вып. 2. С. 40–50.
11. Самарский А. А., Соболев И. М. Примеры численного расчета температурных волн // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 1963. Т. 3. Вып. 4. С. 702–719.
12. Певная П. И., Тихомиров Б. П. Тепловые волны от сосредоточенных и объемных источников в двумерных осесимметричных и плоских областях // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2011. Вып. 1. С. 40–48.
13. Скворцов А. В. Триангуляция Делоне и ее применение. – Томск: Из-во Томского университета, 2002.
14. Hernquist L., Katz N. TreeSPH: A unification of sph with the hierarchical tree method, The Astrophysical J. Supplements Series. 1989. Vol. 70. P. 419–446.

Numerical Solution of the 2D Radiative Heat Transfer Equation Using SPH Method

A. A. Lazarev, S. N. Polischuk, B. P. Tikhomirov

The numerical solution of the 2D radiative heat transfer equation using smoothed-particle hydrodynamics (SPH) is considered. The difference approximation to the equation is given for the planar and axially symmetric problems. The equation discretization is performed using an implicit difference scheme with further linearization of the equation according to Newton. For problems with axial symmetry, the paper offers the method of performing calculations in the vicinity of rotation axis, which is based on the use of a planar interpolation kernel and auxiliary (fictitious) particles. A simple algorithm of simulating boundary conditions is given. Simulation results are presented for some test problems having known exact solutions.