

## СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ ФОКУСИРОВКИ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ ТОНКОЙ ЛИНЗЫ

*Мокеев Александр Сергеевич (oefimova@otd13.vniief.ru), Ямищиков Виталий Михайлович*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров Нижегородской обл.

На примере задачи фокусировки лазерного излучения с плоским волновым фронтом в приближении тонкой линзы рассмотрены особенности вычисления интеграла Гюйгенса-Френеля стандартными квадратурными методами численного интегрирования и специализированным методом коллокаций Левина. Для квадратурных методов численного интегрирования получен критерий оценки шага интегрирования в зависимости от размеров области наблюдения в фокальной плоскости линзы и требуемой точности вычислений. Показаны преимущества использования специализированного метода коллокаций Левина над стандартными методами численного интегрирования.

**Ключевые слова:** дифракционный интеграл, интегрирование осциллирующих функций, метод прямоугольников, метод трапеций, метод Левина, фокусировка излучения.

## COMPARISON OF NUMERICAL INTEGRATION METHODS IN THE PROBLEM OF PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE FOCUSING IN THIN-LENS APPROXIMATION

*Mokeyev Aleksandr Sergeevich (oefimova@otd13.vniief.ru), Yamshchikov Vitaliy Mikhailovich*

FSUE «RFNC-VNIIEF», Sarov Nizhny Novgorod region

The specifics of calculation of a Huygens-Fresnel integral by standard quadrature methods of numerical integration and a special Levin collocation method are considered on the example of the problem of focusing of a laser beam with plane wavefront in thin-lens approximation. The integration step assessment criterion for quadrature methods of numerical integration was obtained as a function of the size of a coverage area in a focal lens plane and required accuracy of calculations. The advantages of using the special Levin collocation method over standard quadrature methods of numerical integration are shown.

**Key words:** diffraction integral, oscillatory functions integration, method of rectangles, method of trapezoids, Levin method, laser beam focusing.

### Введение

Во многих задачах о распространении лазерного излучения в среде возникает необходимость учета волновой природы света, в частности, это задачи дифракции, фокусировки лазерного излучения, оценки расходимости и др. Решение данных задач основано на вычислении интеграла Гюйгенса-Френеля [1–2]:

$$E_P = \frac{ik}{2\pi} \int_S E_M \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} dS, \quad (1)$$

где  $E_P$  – амплитуда дифрагированной волны в точке наблюдения  $P$ ,  $E_M$  – амплитуда падающей волны в произвольной точке  $M$  волновой поверхности,  $k$  – модуль волнового вектора падающей волны,  $dS$  – площадь участка волновой поверхности,  $\rho$  – абсолютная величина радиус-вектора от точки  $M$  до точки  $P$ .

## Аналитическое решение задачи фокусировки лазерного излучения с плоским волновым фронтом в приближении тонкой линзы

Вычисление дифракционного интеграла – трудоемкая задача. Во-первых, подынтегральное выражение в нем представляет собой быстро осциллирующую функцию, что накладывает определенные требования как на выбор метода численного интегрирования, так и на шаг разбиения области интегрирования. Во-вторых, интеграл вычисляется по поверхности, площадь которой пропорциональна квадрату характерного размера пучка, а время, затрачиваемое на расчет, также пропорционально квадрату этого размера и обратно пропорционально шагу разбиения. Большой шаг разбиения неизбежно приводит к большим погрешностям вычислений, а малый – к большим временным затратам. Поэтому выбор оптимального шага и метода численного интегрирования является весьма актуальной задачей.

Вопросам разработки, исследования, тестирования и применения численных методов приближенного вычисления определенных интегралов посвящено большое количество работ [3–7].

Использование традиционных алгоритмов для вычисления интеграла от быстро осциллирующих функций подразумевает расчет по квадратурным формулам (метод прямоугольников, трапеций), что требует подробного шага разбиения и приводит к значительным затратам вычислительных ресурсов [3–5].

Существуют и другие, более сложные и специализированные методы. Для интегралов от функций с фазой линейной формы часто используют метод Филона [6]. Он основан на построении составных квадратурных формул, в которых на каждом частичном интервале используется интерполяционный многочлен для фазы, и дальнейшее интегрирование выполняется точно.

Метод коллокаций Левина [7] предназначен для вычисления осциллирующих интегралов с более сложной фазовой функцией и может быть применим для интеграла вида (1). Он заключается в переходе к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Использование матрицы дифференцирования Чебышева позволяет далее свести задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), чаще всего невырожденной. Основным недостатком данного метода является трудоемкость вычисления СЛАУ, поскольку получающаяся в результате матрица является плохо обусловленной, что может приводить к большой ошибке при получении решения. Тем не менее, во многих случаях использование метода коллокаций Левина позволяет получить более точный результат, по сравнению с другими методами [8].

В данной работе приведены результаты сравнения стандартных квадратурных методов интегрирования дифракционного интеграла (1) со специализированным методом коллокаций Левина и аналитическим решением на примере задачи фокусировки лазерного излучения с плоским волновым фронтом в приближении тонкой линзы.

Для сравнения методов численного интегрирования с точным аналитическим решением рассмотрим задачу фокусировки лазерного излучения с плоским волновым фронтом в приближении тонкой линзы. Ее решение подробно изложено, например, в [1–2]. При нормальном падении плоской электромагнитной волны на тонкую линзу, располагающуюся в плоскости  $xy$ , с шириной пучка  $2a_0$  и длиной  $2b_0$ , а также разложении величины  $\rho$  по малому параметру теории дифракции  $\rho \approx Z + \frac{(X-x)^2 + (Y-y)^2}{Z}$ ,

амплитуда дифрагированной волны  $E_P$  в фокальной плоскости линзы  $Z = f$  в точке наблюдения  $P$  равна:

$$E_P = \frac{ikE_0}{2\pi} e^{-ik\left(f + \frac{X^2+Y^2}{2f}\right)} \int_{-b_0}^{b_0} e^{\frac{ikYy}{f}} dy \int_{-a_0}^{a_0} e^{\frac{ikXx}{f}} dx, \quad (2)$$

где  $(X, Y, f)$  – координаты точки наблюдения  $P$ ,  $(x, y, 0)$  – координаты произвольной точки  $M$  волновой поверхности.

Интегралы (2) легко вычисляются аналитически и тогда амплитуда электромагнитной волны:

$$E_P = \frac{iE_0 4a_0 b_0}{\lambda f} e^{-ik\left(f + \frac{X^2+Y^2}{2f}\right)} \times \text{sinc}\left(\frac{2a_0 X}{\lambda f}\right) \text{sinc}\left(\frac{2b_0 Y}{\lambda f}\right). \quad (3)$$

Здесь  $\lambda = 2\pi/k$  – длина электромагнитной волны.

Физической и измеряемой величиной является интенсивность света, которая по определению равна:

$$I_P = \frac{c\epsilon_0}{2} E_P E_P^* = I_0 \cdot \left(\frac{4a_0 b_0}{\lambda f}\right)^2 \times \text{sinc}^2\left(\frac{2a_0 X}{\lambda f}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{2b_0 Y}{\lambda f}\right), \quad (4)$$

где  $I_0 = c\epsilon_0 E_0^2/2$  – интенсивность падающей волны,  $c$  – скорость света в среде,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная, а знак (\*) означает комплексное сопряжение.

Выражение (4) представляет собой аналитическое решение рассматриваемой задачи.

### Построение численного решения с использованием стандартного квадратурного метода интегрирования

Рассмотрим аналитическое построение решения интеграла (2) численным методом левых прямоугольников с постоянным шагом [3–4]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j)(x_{j+1} - x_j) = h \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j). \quad (5)$$

Как известно [9]:

$$\sum_{j=1}^N \cos(j\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{N\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{N+1}{2}\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^N \sin(j\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{N\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{N+1}{2}\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Применяя (5) к выражению (2), получим:

$$E_P = \frac{ikE_0 e}{2\pi} \frac{e^{-ik\left(f + \frac{X^2 + 2X(a_0 + h_x) + 2Y(b_0 + h_y) + Y^2}{2f}\right)}}{f} \times$$

$$\times h_x \left\{ \sum_{m_x=1}^{N_x-1} \cos\left(\frac{kXh_x m_x}{f}\right) + i \sum_{m_x=1}^{N_x-1} \sin\left(\frac{kXh_x m_x}{f}\right) \right\} \times \quad (6)$$

$$\times h_y \left\{ \sum_{m_y=1}^{N_y-1} \cos\left(\frac{kYh_y m_y}{f}\right) + i \sum_{m_y=1}^{N_y-1} \sin\left(\frac{kYh_y m_y}{f}\right) \right\},$$

При подстановке (7) в (6), получим выражение для поля электромагнитной волны:

где  $N_x = 2a_0/h_x + 1$  и  $N_y = 2b_0/h_y + 1$ .

$$E_P = Ah_x \left\{ \frac{\sin\left(\frac{(N_x-1)kXh_x}{2f}\right) \cos\left(\frac{N_x kXh_x}{2f}\right)}{\sin\left(\frac{kXh_x}{2f}\right)} + i \frac{\sin\left(\frac{(N_x-1)kXh_x}{2f}\right) \sin\left(\frac{N_x kXh_x}{2f}\right)}{\sin\left(\frac{kXh_x}{2f}\right)} \right\} \times$$

$$\times h_y \left\{ \frac{\sin\left(\frac{(N_y-1)kYh_y}{2f}\right) \cos\left(\frac{N_y kYh_y}{2f}\right)}{\sin\left(\frac{kYh_y}{2f}\right)} + i \frac{\sin\left(\frac{(N_y-1)kYh_y}{2f}\right) \sin\left(\frac{N_y kYh_y}{2f}\right)}{\sin\left(\frac{kYh_y}{2f}\right)} \right\}, \quad (8)$$

$$\text{где } A = \frac{ikE_0 e^{-ik\left(f + \frac{X^2 + 2X(a_0 + h_x) + 2Y(b_0 + h_y) + Y^2}{2f}\right)}}{2\pi f}.$$

Тогда аналитическое выражение для интенсивности, характеризующее решение рассматриваемой задачи численным методом левых прямоугольников:

$$I = \frac{c\epsilon_0}{2} E_P E_P^* = I_0 \left(\frac{h_x h_y}{\lambda f}\right)^2 \frac{\sin^2\left(\frac{2\pi a_0 X}{\lambda f}\right) \sin^2\left(\frac{2\pi b_0 Y}{\lambda f}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi X h_x}{\lambda f}\right) \sin^2\left(\frac{\pi Y h_y}{\lambda f}\right)}. \quad (9)$$

Как видно из решения (9), в окрестности точек:

$$\frac{\pi X_n h_x}{\lambda f} = \pi n + \epsilon, \quad \frac{\pi Y_m h_y}{\lambda f} = \pi m + \epsilon, \quad (10)$$

$$\epsilon \rightarrow 0, \quad n, m = 1, 2, \dots,$$

возникает неопределенность вида 0/0. Устраняя эту неопределенность, в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  получим:

$$I = I_0 \left(\frac{h_x h_y}{\lambda f}\right)^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin^2\{(N_x-1)(\pi n + \epsilon)\} \sin^2\{(N_y-1)(\pi m + \epsilon)\}}{\sin^2(\pi n + \epsilon) \sin^2(\pi m + \epsilon)} \right] = I_0 \left(\frac{4a_0 b_0}{\lambda f}\right)^2. \quad (11)$$

Зависимость относительной погрешности  $\varepsilon_i$  от характерного параметра точности  $\alpha$ 

$\alpha, [-]$	$\varepsilon_0, \%$ ( $X = 0$ см)	$\varepsilon_1, \%$ ( $X = 7,15$ см)	$\varepsilon_2, \%$ ( $X = 12,3$ см)
2	4,66E-14	11,21	37,90
3	1,28E-13	4,81	15,05
5	1,16E-14	1,69	5,13
10	8,15E-14	0,42	1,25
50	6,75E-13	0,017	0,05

Формула (11) показывает, что значение интенсивности электромагнитной волны в точках  $X_n$  и  $Y_m$  существенно отличается от аналитического решения (4) и совпадает со значением для центрального максимума. В пределе  $h_x \rightarrow 0, h_y \rightarrow 0$  формула (9) становится в точности равной аналитическому решению (4), которое не подразумевает наличие каких-либо максимумов вдали от центра экрана. Т. е.  $X_n$  и  $Y_m$  – координаты центров артефактных максимумов. Их возникновение в распределении интенсивности при численном интегрировании дифракционного интеграла методом левых прямоугольников неизбежно и связано с шагом интегрирования, а период определяется выражением:

$$\begin{aligned} \Delta X &= X_{n+1} - X_n = \frac{\lambda f}{h_x}, \\ \Delta Y &= Y_{m+1} - Y_m = \frac{\lambda f}{h_y}. \end{aligned} \quad (12)$$

Если в заданных пределах области наблюдения на экране  $X_{\max}$  и  $Y_{\max}$  выполняются соотношения  $\frac{\Delta X}{X_{\max}} < 1, \frac{\Delta Y}{Y_{\max}} < 1$ , то метод левых прямоугольников неприменим для решения рассматриваемой задачи.

В связи с этим возникает необходимость введения ограничения на шаг интегрирования и количество узлов расчетной сетки:

$$\begin{aligned} h_x &= \frac{\lambda f}{\alpha X_{\max}}, \quad N_x = 1 + \alpha \frac{2a_0 X_{\max}}{\lambda f}, \\ h_y &= \frac{\lambda f}{\alpha Y_{\max}}, \quad N_y = 1 + \alpha \frac{2b_0 Y_{\max}}{\lambda f}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\alpha > 1$  – характерный параметр точности.

Формулы (13) представляют собой критерий для оценки шага интегрирования или количества узлов расчетной сетки в зависимости от размеров области наблюдения на экране и требуемой точности вычислений.

В табл. 1 приведена зависимость относительной погрешности  $\varepsilon_i$  вычисления центрального и двух последующих максимумов в распределении интенсивности в фокальной плоскости линзы от характерного параметра точности  $\alpha$ . Расчет приведен для следующих параметров задачи: интенсивность падающей волны  $I_0 = 250$  Вт/см<sup>2</sup>, длина волны  $\lambda = 1$  мкм, размеры пучка по оси  $x$  и  $y$   $a_0 = b_0 = 1$  см, фокусное расстояние  $f = 1$  км, пределы наблюдения в фокальной плоскости линзы  $X_{\max} = 20$  см,  $Y_{\max} = 0$  см.

Как видно из табл. 1 метод левых прямоугольников описывает центральный максимум в распределении интенсивности с точностью  $\sim 10^{-13}$  %, которая практически не зависит от параметра  $\alpha$ . В то же время, с увеличением  $\alpha$  погрешность вычисления интенсивности во втором и третьем максимумах уменьшается.

Таким образом, в заданных пределах области наблюдения в фокальной плоскости линзы  $X_{\max} = 20$  см,  $Y_{\max} = 0$  см при  $Y = 0$  см для описания центрального и двух последующих максимумов в распределении интенсивности  $I(X, 0)$  с погрешностью не более 2 % характерный параметр точности должен составлять  $\alpha = 10$ , что соответствует  $N_x = 41$  узлу расчетной сетки.

### Построение численного решения методом коллокаций Левина

Рассмотрим решение поставленной задачи численного интегрирования выражения для электрического поля (2) специализированным методом коллокаций Левина. Как известно [7–8], данный метод приближенного вычисления интегралов от быстро осциллирующих функций основан на переходе к численному решению системы ОДУ с последующим сведением к СЛАУ для определения первообразной от подынтегральной функции  $p(x)$ .

Функция  $p(x)$ , удовлетворяющая условию:

$$\frac{d}{dx} [p(x)e^{i\omega g(x)}] = f(x)e^{i\omega g(x)}, \quad (14)$$

позволяет вычислить осциллирующий интеграл:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)} dx &= \int_a^b \frac{d}{dx} [p(x)e^{i\omega g(x)}] dx = \\ &= p(b)e^{i\omega g(b)} - p(a)e^{i\omega g(a)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для определения функции  $p(x)$  достаточно удовлетворить уравнению:

$$\frac{dp(x)}{dx} + i\omega \frac{dg(x)}{dx} p(x) = f(x). \quad (16)$$

Производную искомой функции  $dp(x)/dx$  можно представить в виде:

$$\frac{dp(x)}{dx} = Dp(x), \quad (17)$$

где  $D$  – матрица дифференцирования Чебышева. Элементы матрицы дифференцирования вычисляются по следующим формулам [10]:

$$\begin{aligned}
 d_{j,k} &= \frac{(-1)^{k-j}}{t_j - t_k}, \quad 0 < j \neq k < N, \\
 d_{k,k} &= -\frac{1}{2} \frac{t_k}{1-t_k^2}, \quad 0 < k < N, \\
 d_{0,0} &= \frac{1}{6}(1+2N^2), \quad d_{N,N} = -\frac{1}{6}(1+2N^2), \\
 d_{0,k} &= 2 \frac{(-1)^k}{1-t_k}, \quad 0 < k < N, \\
 d_{k,0} &= -\frac{1}{2} \frac{(-1)^k}{1-t_k}, \quad 0 < k < N, \\
 d_{k,N} &= \frac{1}{2} \frac{(-1)^{N-k}}{1+t_k}, \quad 0 < k < N, \\
 d_{N,k} &= -2 \frac{(-1)^{N-k}}{1+t_k}, \quad 0 < k < N, \\
 d_{0,N} &= \frac{1}{2}(-1)^N, \quad d_{N,0} = -\frac{1}{2}(-1)^N,
 \end{aligned} \tag{18}$$

где  $t_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right)$ ,  $0 \leq j \leq N$ . – система узлов Гаусса-Лобатто.

Так как интеграл рассматривается на отрезке  $[a, b]$ , то для перехода к стандартной области задания полиномов Чебышева  $[-1, 1]$  необходимо провести соответствующие преобразования переменных:

$$x_j = \frac{b-a}{2}t_j + \frac{b+a}{2}, \quad 0 \leq j \leq N. \tag{19}$$

Таким образом, при подстановке (17), (18) и (19) в уравнение (16), получим СЛАУ следующего вида:

$$(D + i\omega\Lambda)p = f, \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 p &= [p(x_0), \dots, p(x_N)]^T, \quad f = [f(x_0), \dots, f(x_N)]^T, \\
 \Lambda &= \text{diag}\left(\frac{b-a}{2} \frac{dg(x_0)}{dx}, \dots, \frac{b-a}{2} \frac{dg(x_N)}{dx}\right).
 \end{aligned}$$

Дифференциальная матрица  $D$  является сингулярной матрицей, но ее число обусловленности  $\text{Cond}(D) = \|D\| \cdot \|D^{-1}\|$ , улучшается при прибавлении к  $D$  диагональной матрицы  $i\omega\Lambda$ . В этом случае  $\|i\omega\Lambda\|_2$  показывает степень улучшения. Когда  $\|i\omega\Lambda\|_2$  сравнительно велико, матрица  $(D + i\omega\Lambda)$  становится хорошо обусловленной  $\text{Cond}(D + i\omega\Lambda) \sim 1$ , в противном случае она остается плохо обусловленной

ной  $\text{Cond}(D + i\omega\Lambda) \gg 1$ , что ведет к большой ошибке при решении СЛАУ (20).

Применительно к рассматриваемой задаче с учетом (19) выражение (15) окончательно примет вид:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)} dx &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} [p(x)e^{i\omega g(x)}] dx = \\
 &= \frac{b-a}{2} [p(x_0)e^{i\omega g(x_0)} - p(x_N)e^{i\omega g(x_N)}].
 \end{aligned} \tag{21}$$

Тогда выражение (2) для амплитуды электромагнитной волны будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 E_P &= \frac{ikE_0 a_0 b_0}{2\pi} \frac{e^{-ik\left(f + \frac{X^2 + Y^2}{2f}\right)}}{f} \times \\
 &\times \left[ p_1(x_0)e^{ik\frac{x_0 X}{f}} - p_1(x_N)e^{ik\frac{x_N X}{f}} \right] \times \\
 &\times \left[ p_2(y_0)e^{ik\frac{y_0 Y}{f}} - p_2(y_N)e^{ik\frac{y_N Y}{f}} \right].
 \end{aligned} \tag{22}$$

Нетрудно заметить, что в окрестности точки  $X = Y = 0$  матрица  $(D + i\omega\Lambda) \approx D$ , а значит решение, полученное методом коллокаций Левина, может приводить к большой ошибке в распределении интенсивности вблизи центра экрана, поэтому возникает необходимость в выборе подходящего метода решения плохо обусловленной СЛАУ (20). В работе [8] отмечено, что надежным для решения данного типа задач является метод SVD (singular valuede composition), который и будет использоваться в дальнейшем.

### Сравнение методов численного интегрирования с точным решением

Для сравнения двух квадратурных методов численного интегрирования (методы левых прямоугольников и трапеций), а также специализированного метода коллокаций Левина с точным аналитическим решением (4) были выбраны следующие параметры задачи: интенсивность падающей волны  $I_0 = 250$  Вт/см<sup>2</sup>, длина волны  $\lambda = 1$  мкм, размеры пучка по оси  $x$  и  $y$   $a_0 = b_0 = 1$  см, фокусное расстояние  $f = 1$  км, пределы области наблюдения в фокальной плоскости линзы  $X_{\max} = 20$  см,  $Y_{\max} = 0$  см.

На рис. 1 представлены графики зависимости интенсивности электромагнитной волны  $I$  от координаты  $X$  в фокальной плоскости линзы при  $Y = 0$  см, полученные в результате численного расчета методами левых прямоугольников, трапеций и коллокаций Левина, а также точное аналитическое решение.

Численные расчеты квадратурными методами проводились на равномерной сетке с характерным параметром точности  $\alpha = 1$ , а специализированным методом – на сетке узлов Гаусса-Лобатто. Количество узлов расчетной сетки во всех случаях составляло  $N_x = 5$ . Для решения СЛАУ (20) применялся метод SVD.

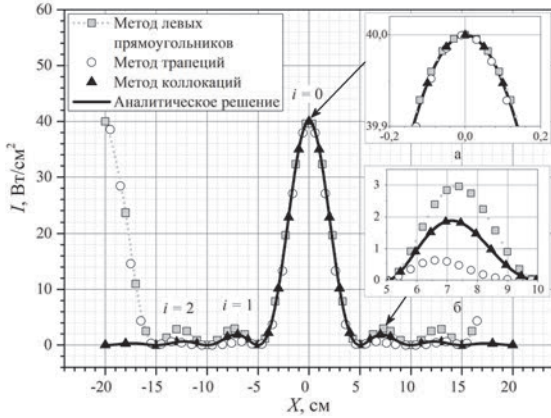


Рис. 1. Сравнение приближенного численного и точного аналитического решения: а – центральный максимум в увеличенном масштабе, б – второго максимума в увеличенном масштабе

Из рис. 1,а и рис. 1,б видно хорошее качественное совпадение рассмотренных методов приближенного численного интегрирования с точным аналитическим решением при описании центрального максимума. Метод коллокаций Левина дает более точный результат при описании второго максимума в распределении интенсивности. Метод левых прямоугольников, при этом, завышает результат, а метод трапеций – занижает. Также из данных, представленных на рис. 1 виден артефактный максимум в распределении интенсивности, координата которого в соответствии с выбранными параметрами расчета совпадает с периодом  $\Delta X = 20$  см.

В табл. 2 приведены результаты количественного сравнения методов численного интегрирования по относительной погрешности  $\varepsilon_i$  для центрального и двух последующих максимумов в распределении интенсивности с характерным параметром точности  $\alpha = 10$  ( $N_x = 41$ ).

Таблица 2

Сравнение методов численного интегрирования по относительной погрешности  $\varepsilon_i$

Метод численного интегрирования	$\varepsilon_0, \%$ ( $X = 0$ см)	$\varepsilon_1, \%$ ( $X = 7,15$ см)	$\varepsilon_2, \%$ ( $X = 12,3$ см)
Левых прямоугольников	8,15E-14	0,42	1,25
Трапеций	8,15E-14	0,84	2,48
Коллокаций Левина	2,68E-13	4,32E-13	3,75E-13

Из табл. 2 видно, что даже на расчетной сетке с  $N_x = 41$  узлами все рассмотренные методы количественно описывают центральный максимум с точностью  $\sim 10^{-13} \%$ . Квадратурные методы оказываются в  $\approx 3$  раза точнее метода коллокаций Левина. Второй и третий максимумы при численном интегрировании методом коллокаций Левина описываются с точностью  $\sim 10^{-13} \%$ . В то же время, максимальная погрешность вычислений методами левых прямоугольников и трапеций не превышает 3 %.

На рис. 2 показан график зависимости интенсивности  $I$  во втором максимуме с координатой  $X = 7,15$  см при  $Y = 0$  см от количества узлов расчетной сетки  $N_x$  для трех методов численного интегрирования.

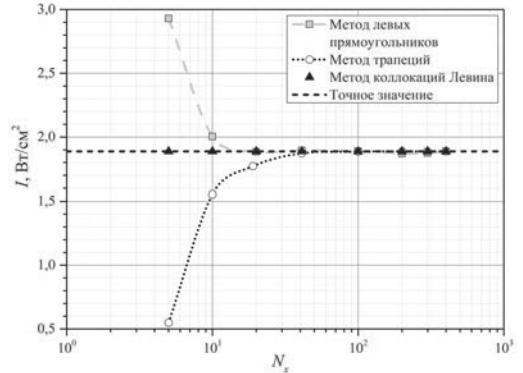


Рис. 2. Исследование методов численного интегрирования на сходимость

Из рис. 2 видно, что специализированный метод коллокаций Левина обладает наилучшей сходимостью и позволяет получать решение поставленной задачи уже на сетке, состоящей из  $N_x \approx 5$  узлов. В то же время, для описания второго максимума в распределении интенсивности стандартными квадратурными методами численного интегрирования с погрешностью не более 1 %, потребуется сетка из  $N_x \approx 40$  узлов.

На рис. 3 представлена зависимость отношения времени  $t$ , затрачиваемого на расчет различными методами ко времени  $t_{\text{лп}}$ , затрачиваемому на расчет методом левых прямоугольников от количества узлов расчетной сетки  $N_x$ .

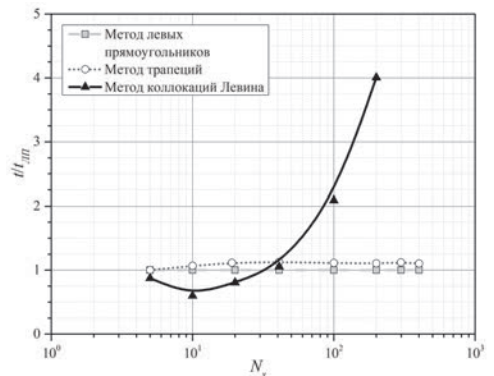


Рис. 3. Сравнение методов численного интегрирования по времени расчета

Из данных, представленных на рис. 3 видно, что по временным затратам метод коллокаций Левина не уступает квадратурным методам вплоть до  $N_x \approx 40$  узлов расчетной сетки. При  $N_x > 40$  точек, преимуществом по времени расчета обладают стандартные квадратурные методы численного интегрирования.

### Заключение

На примере задачи фокусировки лазерного излучения с плоским волновым фронтом в приближении тонкой линзы проведено сравнение трех алгоритмов численного интегрирования: метод левых прямоугольников, метод трапеций и специализированный метод коллокаций Левина.

Для квадратурных методов численного интегрирования получен критерий, определяющий выбор шага интегрирования в зависимости от размеров области наблюдения в фокальной плоскости линзы и требуемой точности вычислений.

Показано, что для описания центрального и двух последующих максимумов в распределении интенсивности излучения на экране с погрешностью не более 2 % метод коллокаций Левина с использованием SVD решателя СЛАУ требует в  $\approx 8$  раз меньшее количество узлов расчетной сетки, по сравнению с методами левых прямоугольников и трапеций и не уступает им по временным затратам вплоть до  $N_x \approx 40$  узлов. При  $N_x > 40$  точек преимуществом по времени расчета обладают стандартные квадратурные методы численного интегрирования.

Таким образом, на примере решения задачи фокусировки лазерного излучения с плоским волновым фронтом в приближении тонкой линзы показаны преимущества использования специализированного метода коллокаций Левина над стандартными квадратурными методами численного интегрирования.

1. Ахманов С. А. Физическая оптика: Учебник. 2-е изд. / Ахманов С. А. Никитин С. Ю. М.: МГУ, Наука, 2004. С. 656.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Изд. 2-е. Перевод с английского. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973.
3. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. С. 512.
4. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989. С. 432.
5. Соболев И. М. Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1978.
6. Jeffrey G. B. Louis Napoleon, George Filon (1875-1937) // *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society*. 1939. Vol. 2, N 7. P. 500–509.
7. Levin D. Procedures for Computing One and Two-Dimensional Integrals of Functions with Rapid Irregular Oscillations // *Math. Comp.* 1982. Vol. 38, N 158. P. 531–538.
8. Ловецкий К. П., Мигаль И. А. Сравнение методов вычисления интегралов от быстро осциллирующих функций // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ», 2015. Т. 7, № 2. <http://naukovedenie.ru/PDF/70TVN315.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/70TVN315.
9. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник: в 3 томах / Фихтенгольц Г. М. 14-е изд., стер. Санкт-Петербург: Лань, [б. г.], 2020. Т. 2. С. 800.
10. Mason J. C., Handscomb D. C. Chebyshev Polynomials. Chapman and Hall // CRC. 2002. P. 360.